SAIN MÁRTON

Nincs királyi út!

Matematikatörténet

GONDOLAT * BUDAPEST, 1986

Szakmailag ellenőrizte

VEKERDI LÁSZLÓ ANDRÉKA HAJNAL SAIN ILDIKÓ

ISBN 963 281 7044

TARTALOM

A matematikai analízis története (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Fermat, Wallis, Gregory, Barrow)

Newton és Leibniz

Newton után Angliában (Berkeley, Maclaurin, Taylor)

Leibniz után a Kontinensen (A Bernoulli család, a Bernoulli testvérek, Euler)

A függvényfogalom fejlődése (Descartes, Leibniz, Euler, Fourier, Dirichlet, Bolzano, Fréchet, Riesz, Hilbert)

A sorelmélet fejlődése (Mercator, Lagrange, Cauchy, Fourier. Fejér, Weierstrass)

A differenciálhányados fogalmának fejlődése Euler után (d'AIembert, L'Huillier, Lacroix, Cauchy, Weierstrass)

Az integrál fogalmának fejlődése Leibniz és Newton után (Euler, Laplace. Clairaut. Lagrange, Riemann, Lebesgue, Stieltjes, Riesz)

A differenciálegyenletek (Johann Beinoulli, Riccati, Lagrange, Daniel Bernoulli, d'AIembert, Taylor, Lipschitz, Euler, Laplace, Poisson, Gauss, Green, Osztrogradszkij, Ljapunov, Cauchy, Lie, Poincaré, Birkhoff, Petzval, Beke, Kármán)

A variációszámítás kialakulása (Euler, a Bernoulli testvérek, Lagrange, Haar)

A számelmélet fejlődése

A számfogalom kialakulása (Argand, Gauss, Hamilton, Peirce, Frobenius, Cartan, Grassmann, Clifford, Fermat, Dirichlet, Kummer, Cantor, Liouville, Kürschák, Méray)

A számelmélet néhány problémája (Fermat, Waring, Sierpinski, Euler, Gauss, Csebisev, Minkowski, Hajós, Erdős, Goldbach, Vinogradov)

Az algebra fejlődése (Diophantosz, Al-Hvárizmi, Fibonacci, Chuquet, Pacioli, Widmann, Cardano, Viéte, Descartes, Newton,

ELŐMAGYARÁZKODÁS

Szeretném mindjárt az első pillanatban kiábrándítani vagy megvigasztalni a kedves olvasót - kit hogyan. Aki ettől a könyvtől korszakalkotóan új tudománytörténeti felfedezéseket vár, az csalódni fog. Aki azt hiszi, hogy ez a könyv egy nagy matematikus munkája érthetetlen szak-tolvaj-nyelven, és a szerző magához méltónak sem tartja az elemi ismeretekkel való foglalkozást, az szintén csalatkozni fog. A könyv összeállításánál legfőbb célul azt tűztem ki, hogy a matematikatörténet felfedezéseit, tehát magát a matematikát - amennyire ez lehetséges - közel hozzam az olvasóhoz. Tegyem pedig mindezt történelmi keretben egyrészt azért, hogy szembeszökő legyen a matematikai gondolkozásnak és eredményeknek a ma eléggé meg nem becsült kulturális értéke,

másrészt azért, mert szeretném az érdeklődést felébreszteni egy nagyon szellemes tudomány és annak története iránt. Sok igen értékes tudománytörténeti mű éppen mert rendszerint azokat az illető tudomány tudósai írták, csak a kiválasztottak számára élvezhető. Ezt a könyvet azonban elsősorban nem a matematikát művelő tudósoknak szántam, hanem a matematika iránt érdeklődő és ezen a területen legalább középiskolás műveltséggel rendelkező olvasóknak. Az viszont természetes, hogy külön öröm számomra, ha az előzetes figyelmeztetés ellenére tudós matematikusok is kézbe veszik.

Az előzőekből talán kiviláglik, hogy a szíves olvasó ismeretterjesztő matematikatörténeti áttekintést tart a kezében, amely kezdetben részletes, és mindinkább csak átfogó jellegű, amint a jelenkori felsőbb matematikai ismeretek megszületéséhez közeledünk. Amint a megfelelő helyeken erre a figyelmet külön is felhívom, a könnyebb érthetőség kedvéért bátorkodtam a komoly tudomány számára megengedhetetlen eszközökkel is élni. Ez azonban - véleményem szerint - nem égbekiáltó bűn. Nem jelent többet annál, mint hogy a középiskolában szokásos jelöléseket használom, hogy néhány tételnek csak az egyszerűbb esetére tértem ki, vagy hogy segítségül hívtam például a koordinátageometriát, illetve más középiskolai ismeretet stb. Úgy vélem azonban, hogy ez sohasem megy az eredeti gondolatmenet szépségének a rovására, hanem inkább annak a könnyebb meglátását segíti elő. Néhol alkalmam nyílt néhány önálló gondolat kifejtésére és alkalmazására; az olvasó elnézését kérem, ha ilyenkor nem tudtam a kísértésnek ellenállni.

Az eddigiekből sejthető, hogy ez nem matematika-tankönyv, hanem csak a történelem folyamán született legfontosabb és legérdekesebb matematikai gondolatmenetek vázlatos ismertetése. A könyvben szereplő tételek szabatos bizonyításai tankönyvekben és más kézikönyvekben keresendők.

Abban a reményben, hogy a népszerűsítés érdekében követett módszerbeli eljárásom megértésre talál, ajánlom munkámat minden olyan kedves olvasónak, aki középiskolás tanulmányai során megszerette a matematikát, vagy legalábbis nem okoztak számára a matematikaórák elviselhetetlen gyötrelmeket.

Végül kedves kötelességemnek teszek eleget, amikor köszönetet mondok azért a sok önzetlen segítségért, amely nélkül ez a könyv meg sem születhetett volna. Elsőként Gerner Józsefnek, a könyv szerkesztőjének köszönöm lelkes támogatását és gondos javító szerkesztő munkáját. Köszönöm a lektoroknak a kötelességszerű bírálatot messze túlhaladó segítségét. Nemcsak kritizáltak, hanem megmutatták a hibák javításának módját is. Hálával tartozom nem hivatalos lektoraimnak is, Németi Istvánnak, Weszely Tibornak és magukat megnevezni nem akaró segítőimnek, akik egy-egy rész elolvasásával, értékes megjegyzéseikkel baráti módon támogattak. Nagyon igazságtalan lennék, ha nem mondanék hálás köszönetét feleségemnek is, aki gondoskodásával és türelmével biztosította a munkához szükséges nyugalmat, sőt gépelési munkájával számomra időt és fáradságot takarított meg.

Budapest, 1985

Sain Márton

AZ ÓKOR

A SZÁMÍRÁS ELŐTT

Sok-sok százezer éven át küzdött az ember a vadállatokkal, az éhséggel, a betegségekkel, a zord időjárással és saját fajtájával, csupán azért, hogy puszta létét fenntarthassa. A nagyon nehezen élő, ám nagyon élni akaró ősember idejének nagy részét élelmiszerszerzéssel töltötte, és nem is törődhetett mással, mint a minden pillanatban létét fenyegető veszélyek elhárításával és a szinte állandósult éhségének kielégítésével. Számolásra nem volt szüksége. Számfogalma kimerült a kevés és a sok megállapításával. Ez az állapot csak ott szűnhetett meg, ahol könnyen és nagy mennyiségben jutott táplálékhoz. Az ilyen helyek közül a legfontosabbaknak bizonyultak azok, amelyeken vadon is megteremtek az állandó táplálékot biztosító növények, főleg a gabonafélék. Az első gabonatermő vidékeken, rendszerint valamelyik nagy folyó mentén, állandósulhatott az emberi élet. A két nagy folyam közötti Mezopotámia rozsa és árpája, Szíria tönkölye (laza kalászú gabonaféle), a Nílus-völgy búzája, Kínában a Jangce-kiang és a Hoang-ho menti rizs és köles, Mexikóban az évente sokszor kétszer is termő kukorica nagy vonzóerőt jelentett a mindig éhes embernek. Tudomásunk szerint a felsorolt területeken tértek át az emberek először a földművelő életmódra a gyűjtögetés, a vadászat és a halászat helyett. A fejlődésnek ez a szakasza szinte az egész Földön a csiszolt kőkorszakra esik, mintegy i. e. 10 000-től i. e. 3000-ig. Ekkor alakult át az ember passzívan elfogadó magatartása a természettel szembeni aktív tevékenységgé. A földműveléssel együtt jelentek meg a háziállatok, a szerszámok, a cserépedények. Létrejöttek az első települések. Lassan elkülönültek az emberi termelőmunkák. A földművesek mellett megjelentek a sokféle mesterséget gyakorló kézművesek. E településeken kialakult egy központi hatalom, amely irányította, összehangolta a termelési ágazatokat, és gondoskodott a település, majd később az állam védelméről.

Ebben a korban már nélkülözhetetlenné lettek a számok és az írás. A földművelés, a sokféle ipari tevékenység, a kereskedelem már nem lehetett meg a mérés, a hosszúság, a terület, a térfogat és a tömeg mértékegységei nélkül. A földművelés, a hadviselés és

később az utazás szükségessé tette a térbeli és az időbeni tájékozódást. Megindult a csillagos ég tanulmányozása, elkészítették az első naptárakat. A szám, a mennyiség és a mérés lassan átszőtte az emberek egész életét, mindennapi tevékenységét csakúgy, mint a vallásos szertartásokat.

A termelés, a gazdálkodás, az ipar és a kereskedelem szükségessé tette a számszerű ellenőrzést, a megtermelt, a raktározott és az elfogyasztott vagy eladott javak hosszabb ideig tartó nyilvántartását, feljegyzését. Az első írásokkal egy időben, i. e. 4000-3000 táján megszülettek a számok rövid leírására alkalmas jelek, majd később a számjegyek. A számoláshoz kezdetben segítségül hívták a kéz és a láb ujjait, esetleg más testrészeket és különböző segédeszközöket, olykor az idők folyamán kialakult mértékegységeket. Ezek nyomán fejlődtek ki a különböző számrendszerek. A számírás legrégibb emlékei Mezopotámiából és Kínából származnak.

MEZOPOTÁMIA

A 60-AS SZÁMRENDSZER

A Tigris és az Eufrátesz folyók közrefogta, jó termő, halakban és vadakban gazdag területnek, de a két folyó közén kívüli termékeny vidéknek is a birtoklása vágya és törekvése volt a környező törzseknek, népeknek. A Mezopotámiától délre eső sztyepp és sivatag lakói éppen úgy szerettek volna a két folyó termékeny tájain élni, mint az északi zord hegyek lakói. Nem csoda, hogy ez a terület az állandó harcok színhelye lett.

Mai tudásunk szerint először a hegylakó sumerok vetették meg lábukat a két folyó közében, és annak déli részén elsőkként alkottak államot az i. e. 4. évezred végén, i. e. 3200 táján. Virágzó, nagy városokat építettek: Uruk, Ur, Eridu, Suruppak, Lagas népessége a 25-30 000 főt is elérte. Az i. e. 3200-2800 körüli Urukból ékszerek, szobrocskák, fegyverek és mázas edények kerültek elő. Ezeken még erősen képszerű, de egyszerűsödő, a későbbi ékírássá fejlődő jelek, feliratok láthatók. Kezdetben a városok önálló kormányzattal rendelkeztek, és csak i. e. 2300 körül kezdtek laza szervezetbe tömörülni. Az így lassan kialakuló állam egységét azonban a déli, sémi származású akkádok teremtették meg. Ez az arab törzs a sumerokkal egy időben jelent meg Mezopotámiában és a sumer városoknál nagyobb katonai erőt képviselt. A két nép azonban nem volt kimondottan ellenséges viszonyban. I. SARRUKÍN (Szárgon) akkád király i. e. 2300 táján erős, egységes államot hozott létre egész Mezopotámiában. Ezt alig másfél évszázados fennállása után a hegyi gutik támadása döntötte meg. Az új egység már a szintén sémi eredetű amoriták alatt jött létre, és HAMMURÁPI (i. e. 1728-1686) nevéhez fűződik. Ez a népének törvényt adó uralkodó az Eufrátesz-parti Babilont (bab = kapu, ilu = isten, Bab-ilu = isten kapuja; görögösen ; Babülón) a birodalom fővárosává építette ki. Ebben a korszakban az írás - amelyet a hódító népek sorozatosan átvettek a meghódítottaktól - már ékírássá fejlődött.

Az árucsere, a kereskedelem, az öntözéses földművelés szükségessé tette nemcsak a mértékegységek kialakulását, hanem a pénz

szerepét játszó, az áruk értékét jelző ezüstrudak, -korongok használatát, és a maihoz nagyon hasonló naptár bevezetését. Naptárukban 1 év 354 napra, illetve 12 hónapra oszlott, és a hónapok váltakozva 29 és 30 naposak voltak. Hogy az időbeli periódus összhangba kerüljön a Nap mozgásával, 19 éves ciklusokat szabtak meg, és ezen ciklusokon belül minden 3., 6., 8., 11., 14., 16. és 19. év 13 hónapból, illetve 384 napból állott.

Ezt a magas civilizációjú és fejlett kultúrájú birodalmat i. e. 1530-ban a hettiták kirabolták és lerombolták, de az ő uralmuk sem volt tartós. Tőlük, több mint 5 évszázadra, magukhoz ragadták az uralmat az ugyancsak hegylakó kassúták. Alattuk a sumerok teljesen asszimilálódtak és beolvadtak a többséget alkotó akkád népbe. Az i. e. XIII. században egész Babilont elfoglalták a nemsokára világhatalmat képviselő, harcias asszírok, akik az i. e. IX. században már egész Mezopotámia urai voltak. Uralmukat az i. e. VII. században a szintén sémi kaldeusok szüntették meg, akik helyreállították Babilont. Legnagyobb királyuk, NABÚ-KUDURRI-USZUR (Nabukodonozor) elősegítette a csillagászat, a matematika és a természettudományok művelését. A kaldeusokat KÜROSZ, a perzsa hódító igázta le az i. e. VI. században. Mintegy 200 év múlva a perzsákat legyőző NAGY SÁNDOR, majd a rómaiak, aztán a törökök vették birtokba Mezopotámiát. Közben Mezopotámia teljesen elvesztette sokáig kiváltságos és kiemelkedő kulturális szerepét, bár a tudományok és ismeretek közvetítését még sokáig vállalta.

Mezopotámia régi nagyságáról a XIX. század második felében megindult és a ma is tartó régészeti ásatások tanúskodnak. A felszínre hozott leletek között van több tízezer ékírásos szöveget tartalmazó égetett agyagtábla. ANDRÉ PARROT francia régész 1933-ban megkezdett ásatásai során megtalálták az Eufrátesz partján a legendás Mári város romjait. A várost annak idején HAMMURÁPI rombolta le. Az Eufrátesz jobb partján épült város Abu-Kemáltól mintegy 10 km távol van. Mári királyi palotájának levéltárából kb. 20 000 babilon ékírásos szöveg került elő: levelezések, rendeletek, gazdasági feljegyzések. Ezek közül a legrégibbek az i. e. 2000. év tájékáról származnak.

1974-ben a szintén Eufrátesz melletti Meszkenében, a régi Elmár

kikötőváros romjaiból is előkerült néhány száz ékírásos agyagtábla. A nagy meglepetést azonban 1975-ben az olasz PAOLO MATTHIAF. professzor kutatásai eredményezték. Ő Aleppótól délre megtalálta az eltemetett Ebla városát, ahol a királyi palota két kis szobájában mintegy 15 000 agyagtábla rejtőzött az i. e. 2400-2300-as évekből. E táblák egy része a már megfejtett sumer nyelven íródott, de igen soknak a szövege egy még ma sem teljesen ismert, nyugati ósémi nyelven rögzít értékes adatokat a kor gazdasági és kulturális életéről. E táblák között találtak rá az említett ókánaáni nyelvet és a sumer nyelvet összekapcsoló szótárra is. A táblák között még iskolai szövegek is vannak, amelyeken a tanulók hibái és ezek javításai látszanak. Az itt fellelt irodalmi vonatkozású emlékek egyike a *Gilgames-eposz* leírása.

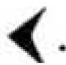
A Mezopotámiában és annak környékén talált nagyszámú ékírásos tábla között több száz kimondottan matematikai tartalmú. Ezek alapján hű képet adhatunk az i. e. 2000. év táján használt mezopotámiai számírásról és meglepően ügyes számolási technikáról.

A számokat 1-től 60-ig különböző alakú és helyzetű ékjelekkel írták le. Ezeket a jeleket egy háromszög keresztmetszetű pálcikával nyomták a még puha agyaglapra. A teleírt táblát azután kiégették. 1-től 10-ig olyan ékekkel jelölték a számokat, amelyeknek a homloka felül van:

=1, =2, =3, =4, =5,

=6, =7, =8, =9.

A 10 jele egy kapocsszerű ékjei volt:

.

A számok 10-től kezdve

59-ig:

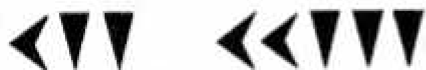
=10, =11, =12, =13, . . .

=19, =20, =30, =40, =50, =59.

A 60 leírására ugyanazt a jelet használták, amit az 1 leírására, vagyis a



jelet. Számírásukban tehát l-től 59-ig a nem helyi értékes 10-es számrendszer fedezhető fel, azután pedig a helyi értékes 60-as számrendszerben írták a számokat. Az egyes helyi értékeket kezdetben kis hézaggal különítették el egymástól, például:



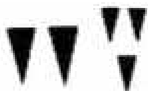
$= 12 \cdot 60 + 23 = 743$,

vagy:



$= 2 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 + 11 = 7391$.

Némi zavart okozhatott az, hogy az üres helyi értékeket nem jelölték, tehát például a



jelenthette a $2 \cdot 60 + 3 = 123$-at, de a $2 \cdot 60^2 + 3 = 7203$-at is, sőt még a $(2 + 3/60)$-ot vagy a $(2 + 3/60^2)$-t is.

tett az, hogy a szövegekben mindig megnevezett számok fordultak elő, tehát a szám nagyságrendjét a szövegből következtetni lehetett. Később azonban a zérus jelének bevezetése elkerülhetetlenné vált. Erre használták a két, egymás alá írt 10-es jelet. Tehát például a



$= 22*60^2+0*60+51 = 79\ 251$-et

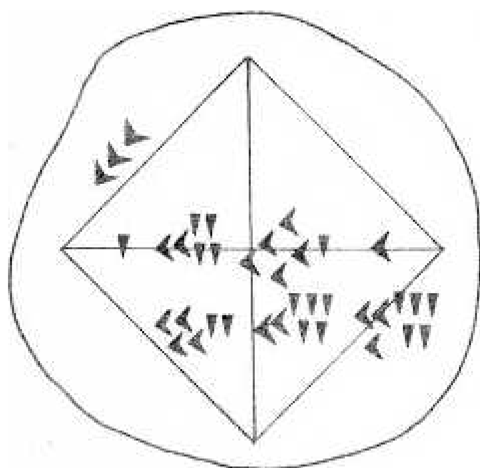
jelenthette. Az azonban, hogy a szám végén álló zérust sohasem írták ki, és hogy az egyesek helyét nem jelölték, elég nagy bizonytalanságot okozott a számolvasásban, még a szöveg segítsége mellett is. A babiloni helyi értékes 60-as számrendszerű számírásnak ezeket a fogyatékosságait csak a görög csillagászok szüntették meg, köztük PTOLEMAIOSZ, aki - mint még a középkorban is sok csillagász - támaszkodott a babiloni csillagászati eredményekre, és ezek, valamint a babiloni csillagászati táblázatok is 60-as számrendszerben íródtak.

A Mezopotámiában kialakult 60-as számrendszer előzményei talán a sumer és az akkád súly-, illetőleg pénzegységekre vezethetők vissza. Amikor az akkádok megszerezték az uralmat a két folyó közén, akkor már mind a sumeroknak, mind az akkádoknak megvolt a maguk súlyegysége. A sumer súlymértékegység a mina volt (kb. fél kp), az akkádoké pedig a sékel. A sékel azonban 60-szor kisebb, mint a mina. Az egységes állam megteremtése után megmaradt használatban mind a két mértékegység. Ezek egyszersmind pénzegységekül is szolgáltak (1 ezüst mina = 60 sékel). A gazdasági élet fejlődése további, nagyobb pénzegység bevezetését kívánta, és a már kialakult 60 váltószám felhasználásával bevezették a talentumot, vagyis 1 talentum = 60 mina = 60^2 sékel. A mindennapi életben bizonyára például a 110 sékel helyett mind gyakrabban mondták, hogy 1 mina és 50 sékel vagy röviden egy ötven, amint mi is az 1 Ft 50 f helyett sokszor mondjuk, hogy egy ötven. A súly- és a pénzegységben kialakult 60-as számrendszer elég meggyőzően magyarázná a babiloni helyi értékes 60-as számrendszerű számírást.

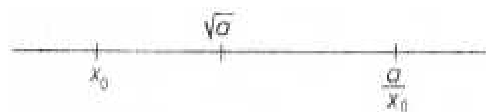
A MEZOPOTÁMIAI SZÁMOLÁSTECHNIKA

A legrégibb ránk maradt babiloni matematikai emlékek a számolást megkönnyítő és meggyorsító táblázatok. Ezek között találunk szorzótáblákat, reciprok-, négyzet-, köb-, négyzetgyök- és köbgyöktáblázatokat. Az osztást a szorzó- és a reciproktáblázatok együttes alkalmazásával végezték el. Például a

75 : 8 osztás kiszámítása úgy történt, hogy a reciproktáblázatból kikeresték 1/8 értékét



2. ábra



3. ábra

Bizonyos esetekben a közelítést igen nagy pontosságig tudták fokozni. Erre meglepő példa a √2 igen pontos közelítő értékének az ismerete. New Yorkban a Yale Egyetem babiloni gyűjteményében őriznek egy kőkorongot, amelyen a *2. ábra* rajza látható.

A négyzet vízszintes átlójára írt szám: $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1{,}414\,212\,2$, ami közismerten a √2 igen jó közelítése. A négyzet bal felső oldalára írt szám, a 30 bizonyára a négyzet oldalhosszát jelenti, és akkor a legalsó szám, a $42 + 25/60 + 35/3600 \approx 42{,}426\,388\,8$ pedig a négyzet átlójának (30√2) közelítő hossza. Ez a közelítő pontosság méltán vívja ki csodálatunkat. A magyarázatot az adja meg, hogy a babiloni matematikusok, számolómesterek ismertek egy jó iterációs eljárást a √2 meghatározására. Ennek lényege a következő:

Legyen feladatunk a √a tetszőlegesen pontos közelítő értékeinek a

meghatározása, ahol $a>1$.

Induljunk el egy általunk választott (durva) közelítő értékkel, az x_0-lal úgy, hogy

$\sqrt{a} > x_0 > 1$ és a hiba $h_0 = \sqrt{a} - x_0 < 1$

legyen.

Ekkor, mivel

$a/\sqrt{a} = \sqrt{a}$, *azért* $a/x_0 > \sqrt{a}$

Így sikerült a $\sqrt{a}$ értékét két korlát közé szorítanunk:

$$x_0 < \sqrt{a} < \frac{a}{x_0},$$

amint ezt a számegyenes is szemlélteti.

Bizonyára e két korlát számtani közepe:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$$

szintén egy közelítő érték. Számítsuk ki a $\sqrt{a} \approx x_1$ esetében elkövetett hibát, h_1-et!

$$h_1 = |x_1 - \sqrt{a}| = \left|\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{x_0^2 - 2x_0\sqrt{a} + a}{2x_0}\right| =$$

$$= \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2x_0} < \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2}, \quad \text{mivel} \quad x_0 > 1.$$

Az x_0 választás esetén azonban az elkövetett hiba, $h_0 = \sqrt{a} - x_0 < 1$, azért

$$h_1 < \frac{(x_0-\sqrt{a})^2}{2} = \frac{h_0^2}{2} < h_0, \quad \text{hiszen} \quad h_0 < 1.$$

Az x_1 tehát jobb közelítő érték, mint az x_0.

Ha most ezt az eljárást ismételjük, az x_0 helyett mindjárt az x_1-et választva, akkor az x_1-nél is jobb: $x_2 = 1/2(x_1 + a/x_1)$ közelítést nyerjük. Az eljárás ismétlésével tetszőleges pontossággal határozhatjuk meg a $\sqrt{a}$ értékét. Ezt az ismétléses eljárást, ezt az iterációt a mezopotámiai számolómesterek ismerték, és a $\sqrt{2}$ közelítő értékének kiszámítására alkalmazták. Ha a $\sqrt{2} \approx 1{,}3$ elég durva közelítéssel kezdünk, akkor is, már a második lépés után megkapjuk az 1,414 222 4 értéket (zsebszámológéppel).

Ugyancsak a fent vázolt módszert használták Mezopotámiában a gyök(a^2+b) közelítésére is. Ha az első közelítő értéknek az a-t választjuk, akkor az előbbiek szerint:

$$a < \sqrt{a^2+b} < \frac{a^2+b}{a},$$

és a második, jobb közelítés az

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+b}{a}\right) = a + \frac{b}{2a}.$$

Ez a közelítés mindig nagyobb, mint a helyes érték, hiszen

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Talán mondanom sem kell, hogy az ókori Babilóniában nem használtak még képleteket, csak szavakba öntött megoldási utasításokat. A megokoló gondolatmenetet nem közölték, csupán azok a receptek maradtak ránk, amelyek megegyeznek a fent közölt gondolatmenet eredményével. Elképzelhetetlen azonban, hogy a babiloni „receptek” készen születtek. Valamilyen gondolati

utat be kellett járni ahhoz, hogy a babiloni, tiszteletet érdemlő eredmények létrejöjjenek. Ezek a számolási utasítások sejteni engedik, hogy nem járunk messze az igazságtól, ha azt állítjuk, hogy az eredeti gondolatmenetek a közöltekhez hasonlók voltak.

A BABILONI ARITMETIKA

Mielőtt a részletes tárgyalásba kezdenénk, állapodjunk meg abban, hogy a helyi értékes 60-as számrendszerbeli számok írásánál az egyesek után pontosvesszőt teszünk, ha törtrész is következik utánuk; máshol azonban a különböző helyi értékeket vesszővel választjuk el. Tehát például:

$$26,32 ; 53,41 = 26 \cdot 60 + 32 + 53 \cdot 60^{-1} + 41 \cdot 60^{-2},$$

vagy

$$2,0,33 = 2{*}60^2 + 0{*}60 + 33.$$

1945-ben Otto Neugebauer és A. Sachs New Yorkban a Columbia Egyetem Plimpton Könyvtárában felfedeztek egy óbabiloni cseréptáblát (Plimpton 322). A cserép egy többrészes táblázat töredékeit tartalmazza, de sikerült a felfedezőknek a táblázatot kiegészíteniük. A rekonstruált és részben kiegészített táblázat így néz ki:

b		$c^2 : b^2$	a		c			p	q
2,0	(120)	1;59,0,15	1,59	(119)	2,49	(169)	1	12	5
57,36	(3456)	1;56,56,58,14,50,6,15	56,7	(3367)	1,20,25	(4825)	2	64	27
1,20,0	(4800)	1;55,7,41,15,33,45	1,16,41	(4601)	1,50,49	(6649)	3	75	32
3,45,0	(13 500)	1;53,1,0,29,32,52,16	3,31,49	(12 709)	5,9,1	(18 541)	4	125	54
1,12	(72)	1;48,54,1,40	1,5	(65)	1,37	(97)	5	9	4
6,0	(360)	1;47,6,41,40	5,19	(319)	8,1	(481)	6	20	9
45,0	(2700)	1;43,11,56,28,26,40	38,11	(2291)	59,1	(3541)	7	54	25
16,0	(960)	1;41,33,59,3,45	13,19	(799)	20,49	(1249)	8	32	15
10,0	(600)	1;38,33,36,36	8,1	(481)	12,49	(769)	9	25	12
1,48,0	(6480)	1;35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	(4961)	2,16,1	(8161)	10	81	40
1;0	(1)	1;33,45	0;45	(0,75)	1;15	(1,25)	11	1	0,5
40,0	(2400)	1;29,21,54,2,15	27,59	(1679)	48,49	(2929)	12	48	25
4,0	(240)	1;27,0,3,45	2,41	(161)	4,49	(289)	13	15	8
45,0	(2700)	1;25,48,51,35,6,40	29,31	(1771)	53,49	(3229)	14	50	27
1,30	(90)	1;23,13,46,40	56	(56)	1,46	(106)	15	9	5

Az általunk b-vel, p-vel és *q*-val jelölt oszlopok és a táblázat

aláhúzott számai, illetve számjelei a sérült cserépről hiányoztak. A zárójelben szereplő számokkal, a könnyebbség végett, az előttük álló számokat tüntettük fel a helyi értékes tízes számrendszerben. A felfedezők a táblázatban hibás adatokat is találtak. Eredetileg az "a" oszlopban a 8,1 helyett 9,1 és a 2,41 helyett annak a négyzete, a 7,12,1 szerepelt.

A „*c*” oszlopban is a hibás 3,12,1 -et és az 53-at ki kellett igazítani 1,20,25-re, illetve 1,46-ra. Ahhoz, hogy ezeket a javításokat ilyen határozottsággal végre lehessen hajtani, rá kellett jönni arra a törvényszerűségre, amellyel a táblázatot készítették. A számok helyett most azt *a* betűt fogjuk használni, amelyet a szám oszlopa fölé írtunk. NEUGEBAUER és SACHS észrevették, hogy a $c^2 — a^2$ különbség ismét négyzetszám: b^2, ha pedig képezik a $c^2:b^2$ hányadost, akkor rendre azokat az 1-hez közeli értékeket nyerik, amelyek a $c^2: b^2$ feliratú oszlopban találhatók. A táblázat hiányzó részén tehát ezeknek a b^2-eknek a négyzetgyökei, a *b*-k bizonyára szerepeltek, úgy, ahogyan ezt a „b"-vel jelölt oszlopban látjuk. Ezek után már a hiányzó számok pótlása és az észrevett hibák kijavítása természetesen adódott.

Kiderült tehát, hogy az *a, b* és *c* számok pitagoraszi számhármasok, azaz derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai lehetnek, méghozzá olyan mérőszámok, amelyek véges hatvanados törtekkel fejezhetők ki. A táblázat *a, b* és *c* oszlopai megengedik, hogy az egyesek helyét önkényesen válasszuk meg. Mi ezen számok mindegyikét - a 11. sorban szereplők kivételével - egész számoknak tekintettük, mert így a tízes számrendszerben is egész számokat nyertünk.

Lehetett volna például: az 1,59 = 119 helyett 1 ;59 = 1 + 59/60-ot is venni, ugyanígy a 2,49 = 169 helyett 2;49 = 2 + 49/60-ot. Ekkor persze a „b” oszlopban a 2,0 = 120 helyett is a 60-szor kisebb 2 = 2 került volna.

Az *a, b* és *c* egész, illetve racionális számok tehát kielégítik a $c^2 — a^2 = b^2$, illetve a

$(c/b)^2 - (a/b)^2 = 1$ feltételt.

Jelöljük az egyszerűség kedvéért a c/b és a/b racionális számokat s-

sel, illetve t-vel, ekkor

$s^2 - t^2 = 1$

vagy

$(s+t)(s-t) = 1.$

Így

$s+t = 1/(s-t)$

Mivel $s+t$ racionális szám, azért p/q alakba írható, ahol p és q természetes számok. Ezzel az átírással:

$s+t = p/q$

és

$s-t = q/p.$

Innen:

$$s=\frac{p^2+q^2}{2pq} \quad \text{és} \quad t=\frac{p^2-q^2}{2pq},$$

tehát:

$$\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^2-\left(\frac{p^2-q^2}{2pq}\right)^2=1$$

vagy

$(p^2+q^2)^2-(p^2-q^2)^2=(2pq)^2.$

Az így átalakított egyenlőségből látszik, hogy ha p és q természetes szám, akkor (p^2+q^2), $(p^2—q^2)$ és $2pq$ természetes számok, és pitagoraszi számhármast alkotnak. Ha például

$p=12$ és $q=5$,

akkor

$p^2 — q^2 = 119$, $p^2 + q^2 = 169$ és $2pq = 120$.

Az eredményekben ráismerhetünk a Plimpton 322 táblázat első sorában szereplő számokra: $a = 119$, $b = 120$ és $c = 169$.

Az általunk kiegészített táblázatban szerepelnek az egyes számhármasoknak megfelelő *p* és *q* értékek is. Ezek valószínűleg az eredeti táblázat hiányzó részén szintén megvoltak (természetesen a 60-as számrendszerben). A helyi értékek megválasztásánál kivételt tettünk a 11.sorban, ahol a *b, a* és *c* oszlop számait rendre 1-nek, 0,75-nak és 1,25-nak vettük azért, hogy a *p* és a *q* számára ne kelljen irracionális számot

$$\left(\sqrt{60} \text{ és } \frac{\sqrt{60}}{2}\right)$$

választanunk. Észrevehető, hogy a táblázatban szereplő pitagoraszi számhármasok a $c^2 : b^2$ hányados fogyó értékei szerint vannak rendezve. (Ugyanúgy a $p : q$ hányadosnak fogyó értékei szerint is.) Ezeket a hányadosokat a táblázat szerkesztője igen gondosan, 8 hatvanados helyi érték pontossággal számította ki, ami 14 tizedes pontosságnak felel meg.

A babiloni aritmetikához tartozik még a mértani sorozat és a négyzetszámok sorozatának az ismerete. Volt táblázat, amelyen az $1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$ vagy az $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ összeg értéke olvasható. Majdnem biztosan feltételezhetjük, hogy általánosságban is ismerték e sorozatok első *n* elemének összegzési eljárását.

A BABILONI ALGEBRA

Az algebra fő tárgya hosszú időn keresztül az egyenletek megoldása és vizsgálata volt. Ilyen értelemben beszélhetünk babiloni algebráról, annak ellenére, hogy a ma szokásos algebrai jelölések akkor még ismeretlenek voltak. Igaz ugyan, hogy a babiloni ékírás bizonyos esetekben igen jól pótolta az algebrai jeleket. Ha például egy feladatban egy téglalap hosszúsága és szélessége ismeretlen, akkor ma ezeket az ismeretlen mennyiségeket például *x* és *y*

betűkkel jelöljük. Az ékírásban azonban egyetlen ékjei írta le azt a szót, hogy hosszúság és egy másik ékjei azt, hogy szélesség. Ilyen körülmények között nem volt szükséges az ismeretlenek számára a külön jelölés, sőt nem is lett volna előnyös.

Az ókori Mezopotámiában hiányzott az egyenletmegoldás mai formalizmusa, de az egyenletekre vezető feladatok megoldási receptjei teljesen megegyeznek a mai megoldóképletekkel. Nem közölték ugyan, hogy milyen úton jutottak el a megoldáshoz, de a legtöbb esetben a követendő utasításokból következtethetünk a gondolatmenetre is. A babiloni egyenletmegoldásra jól jellemző példákat válogatott össze VAN DER WAERDEN az *Egy tudomány ébredése* című, magyar fordításban is megjelent könyvében. Innen szemeltem ki néhány feladatot. Ezeknek találjuk az alábbiakban az óbabiloni megoldását, kísérve a mai jelölésekkel.

A könnyebb megértés kedvéért bocsássunk előre egy sablont, amelyet Mezopotámiában rutinszerűen használtak az

$x * y = a$

$x + y = b$

alakú egyenletrendszer megoldására. Nem a nekünk legkézenfekvőbb módszert használták az egyik ismeretlen kiküszöbölésére, hanem ügyes helyettesítést alkalmaztak, amely mindig jól használható, ha az $x + y$ értéke adott.

Legyen

$x = b/2 + u$ *és* $y = b/2 - u$

Ekkor igaz marad az eredeti második egyenlet, most is $\boldsymbol{x + y = b}$. Az x és az y helyett tehát egy harmadik ismeretlent vezettek be: u-t. Így az első egyenlet:

$$\left(\frac{b}{2} + u\right)\left(\frac{b}{2} - u\right) = a$$

alakot öltött, ahonnan:

$$\frac{b^2}{4}-u^2=a,$$

és

$$u=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}.$$

A gyök negatív értékét nem vették számításba. Az így kiszámított *u* segítségével

$$x=\frac{b}{2}+u=\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}$$

és

$$y=\frac{b}{2}-u=\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-a}.$$

Legyen például a babiloni szövegben az

$xy=a$

$x+y=b$

egyenletrendszerrel leírható feladat a következő:

„A szélesség meg a hosszúság 30. A terület 221. Mekkora a szélesség és a hosszúság?"

A megoldási utasítás ilyenforma volt: Eljárásod ez legyen: Törd a 30-at ketté: 15. A 15-ször 15 egyenlő 225-tel. Vond ki ebből a területet: 225-ből 221 az 4. Négyzetgyöke 4-nek: 2. Add ezt a 15-höz: 17. Megkaptad a hosszúságot. Vond ki a 2-t a 15-ből: 13. Ez a szélesség.

A szélesség meg a hosszúság: 17 meg 13 az 30. A terület: 17-szer 13 az 221.

Amint látjuk, a megoldási recept rendszerint az eredmény próbájával fejeződik be. Ez már kétségkívül a bizonyítási igény jelentkezését mutatja, bár távolról sem látszik még az a törekvés, hogy a megoldás módját meg is értesse az olvasóval. Az utasítás ellenőrizhetőleg szóról szóra követi az általunk nyert megoldóképlet szerinti műveleti sorrendet.

Az első óbabiloni példánk HAMMURÁPI idejéből származik: „Hosszúság, szélesség. A hosszúságot és a szélességet összeszoroztam, és így megkaptam a területet. Amennyivel pedig a hosszúság meghaladja a szélességet, azt hozzáadom a területhez, és 3,3[-at nyertem]. A hosszúság és a szélesség összeadva 27. Mi a hosszúság, a szélesség és a terület?”

A megoldás leírásában használjuk a 10-es helyi értékű számírást, így a feladat algebrai megfogalmazásban:

$xy+x—y=183$

$x+y=27.$

A babiloni megoldás: „Eljárásod ez legyen: 27-et, a hosszúság és a szélesség összegét add a 183-hoz: 210.” Ma így mondanánk:
Add össze a két egyenletet:

$xy+2x=210$

vagy

$x(y+\ 2)=210.$

A babiloni szöveg így folytatja: „2-t a 27-hez add hozzá: 29.” Ugyanez ma: Adj a második egyenlet mindkét oldalához 2-:

$x+(y+2)=29.$

Vezessünk be most új ismeretlent, *az* y'*-t:* legyen $y+2=y'$. Ekkor egyenleteink:

$xy'=210$

$x+y'\ =\ 29.$

Így eljutottunk az előrebocsátott példához, amelyet a babiloni számolómesterek már rutinszerűen oldottak meg:

„29-ből letöröd a felét. 14,5-szer 14,5 az 210,25. Levonsz 210-et a 210,25-ból. A különbség 0,25. Négyzetgyöke 0,5. Az első 14,5-hez add hozzá a 0,5-et: a hosszúság 15.

Kivonsz a második 14,5-ből 0,5-et: a szélesség 14. Azt a 2-t, amit a 27-hez hozzáadtál, levonod a 14-ből, a szélességből: 12 a végleges szélesség. A 15 hosszúságot a 12 szélességgel összeszoroztam: 15-ször 12 az 180. Ez a terület."

Végül jön a próba: „A 15 hosszúság a 12 szélességen mennyivel nyúlik túl? 3-mal haladja meg. 3-at adj a 180 területhez: 183."

A következő feladat szintén kétismeretlenes, de elsőfokú egyenletrendszerre vezet:

„1 búr területről 4 gúr gabonát arattam. Egy másik búrról 3 gúr gabonát arattam. A gabona 8,20-szal haladja meg a gabonát. A földjeimet összeadva 30,0-at kapok. Mekkorák a földjeim?"

A megoldáshoz ismét helyi értékes 10-es számrendszerű számokat használunk. A babiloni szövegben keveredik kétféle mértékegység. A terméshozamnál szereplő gúr gyakorlati mértékegység. A gabonák különbsége (8,20 = 500) viszont „tudományos" mértékegységekben : silákban van megadva:

1 gúr = 300 sila.

A búr szintén gyakorlati terület-mértékegység, de a földek összege (30,0 = 1800) sarban van megadva, ami már „tudományos" mértékegység :

1 búr = 1800 sar.

A feladat adatai a „tudományos" mértékegység-rendszerben:

4 gúr = 1200 sila

és

3 gúr = 900 sila.

Mi valahogy így gondolkoznánk : A jobb földön x sar területen (1200/1800)x = 2/3 sila gabona. A rosszabb földön y sar terület hozott (900/1800)y = 1/2y sila gabonát. A különbség: $2/3x-1/2y=500$.

Az összes földterület: $x+y=$ 1800. Ezután megoldanánk a

$$2/3x-1/2y=500$$

$$x+y=1800$$

egyenletrendszert. (x = 600 sar, $y=$ 1200 sar.)

A babiloni feladatmegoldó azonban így gondolkozott: „Törd az 1800-at, a földek területének az összegét ketté: 900. Végy tehát 900-at és még egyszer 900-at!”

Vagyis, ha a jó és a rossz föld egyaránt 900 sar lenne, akkor a jó földön teremne (1200/1800)*900 = 600 sila, a rossz földön pedig (200/1800)*900 = 450 sila. A terméshozamok különbsége tehát 150 sila lenne. A feladat szerinti különbség azonban 500 sila, tehát a 150 silát 350 silával növelnünk kell.

Ha a jó földet 1 sarral növeljük és ugyanakkor a rossz földet 1 sarral csökkentjük, akkor a termes nő 2/3 silával és egyidejűleg csökken 1/2 silával, vagyis a termékülönbség 2/3 + 1/2 = 7/6 sila. Ahányszor a 7/6 sila megvan a 350 silában, annyi sart kell a silány földből jóvá minősíteni, azaz 350 : 7/6 = 300 sart. Így a jó föld 900 sárról 1200 sarra szaporodott, és a rosszabb 900-ról 600 sarra csökkent.

Az utolsó mozzanatot a babiloni szöveg így hajtatja végre: „Mit kell 7/6-dal szoroznom, hogy megkapjam a 350-et? Végy 300-at, mert 300-szor 7/6 az 350. Vond ki ezt a 300-at az egyik 900-ból, amit kétszer vettél föl, és add hozzá a másikhoz. Az első 600-at ad, a második 1200-at. 1200 az első föld területe, 600 a második föld területe.”

Joggal feltételezhetjük, hogy a babiloni matematikusok ismerték az egyszerű algebrai azonosságokat, persze nem képletszerűen, hanem

szavakban, szabályokban. Ilyen szabályokra gondolunk: Két tag összegének és ugyanazon két tag különbségének a szorzata egyenlő a két tag négyzetének a különbségével; mivel egyenlő egy kéttagú összeg négyzete, köbe; különbség négyzete, köbe? Ezt tanúsítja a következő feladatuk:

„Két négyzetem területét összeadtam: 25,25. A második négyzetoldal az első négyzet oldalának kétharmada meg még 5 gar."

A feladat egyenlet alakban (10-es helyi értékű számokkal):

$x^2+y^2= 1525$

$y=2/3x+5.$

Látszik, hogy a következő lépésnél a $(2/3x+ 5)$ négyzetre emelésével meg kellett birkózniuk. A négyzetet az első egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$13x^2+60x=13\ 500$

egyenletet, amelyből az x értékét a ma ismert és használatos megoldóképletnek megfelelő utasítássorozattal számították ki. Sajnos nem maradt annak semmi nyoma, hogyan jöttek rá a másodfokú egyenlet megoldási eljárására, de igen valószínű, hogy teljes négyzetté kiegészítéssel.

Megemlítem még, hogy készítettek $x^2(x+ 1)$ és $x^2(x— 1)$ táblázatokat is, amelyek segítségével az

$x^3+x^2=a$ *és* az $x^3—x^2=a$

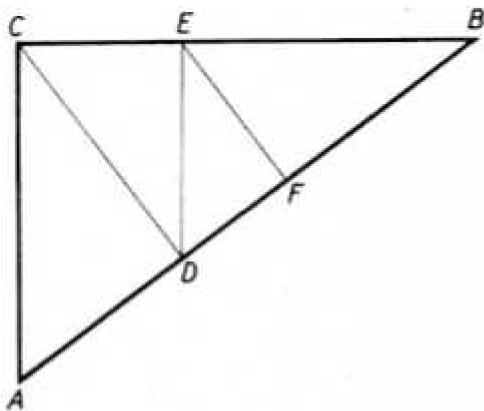
alakúra visszavezethető harmadfokú egyenleteket meg tudták oldani.

Az eddigiekből talán kitűnik, hogy 4000 évvel ezelőtt a babiloni matematikusok gondolkozásmódja kifejezetten algebrai jellegű volt, és ezen a területen bámulatos eredményeket értek el.

A BABILONI GEOMETRIA

Még a XX. század elején úgy tűnt, hogy a babiloni geometria néhány jól-rosszul megoldott gyakorlati, főleg terület- és térfogatszámítási feladatra szorítkozik. Előfordult a Pitagorasz-tétel használata is, de inkább csak ürügyképpen az egyenletmegoldási feladatok kapcsán.

1936-ban azonban kiderüli, hogy a babiloni geometriát csak azért becsültük le, mert nem tudtunk róla. Ebben az évben a szúzai ásatásokból (ma Iránban a Karkheh és a Dzsurrahi folyók között) előkerült a matematikai tartalmú agyagcserepek közül egy olyan is, amely összehasonlítja azokat az arányokat, amelyek fennállnak a szabályos sokszögek területe és oldaluk négyzete között. Ezeket az arányokat fellelhetjük a három-, négy-, öt-, hat- és hétszögek esetében. A szabályos ötszögnél ez az arány a tábla szerint: 1 2/3 (1 ;40), a hat- és a hétszögeknél pedig 2,625 (2;37,30), illetve 3,683 (3;41). Ugyanez a tábla feltünteti a szabályos hatszög kerületének és a köré írható kör kerületének a viszonyát is. Ez az érték 0,96 (0 ;57,36). Ebből az arányból következik, hogy π értékét 3,125-nek vették, ami nem is rossz közelítés.



4. ábra

Egy babiloni cserépen látható a *4. ábra* szerinti rajz. Az *ABC* derékszögű háromszög oldalainak a cserépen feltüntetett méretei: *AB* = 75, *BC* = 60 és *AC* = *45.* Szerepel a rajzon az *ACD,* a *CDE,* a *DEF* és az *EBF* derékszögű háromszögek területe is. Ezek rendre: 486 (8,6), 311,04 (5,11 ;2,24), 199,066 (3,19 ;3,56,9,36) és

353,894 (5,53 ;53,39,50,24). Ezeknek a területértékeknek a segítségével számította ki a feladat szerzője az *AD,* a *CD,* a *BD* és a *CE* szakaszok hosszát, nyilvánvalóan felhasználva azt a tételt, hogy hasonló háromszögek területeinek aránya egyenlő a megfelelő oldalak négyzeteinek az arányával. Például:

$AD^2 : AC^2 = t_{ADC} ; t_{ACB}$

illetve:

$AD^2 : 45^2 = 486 : 1350.$

Ebből:

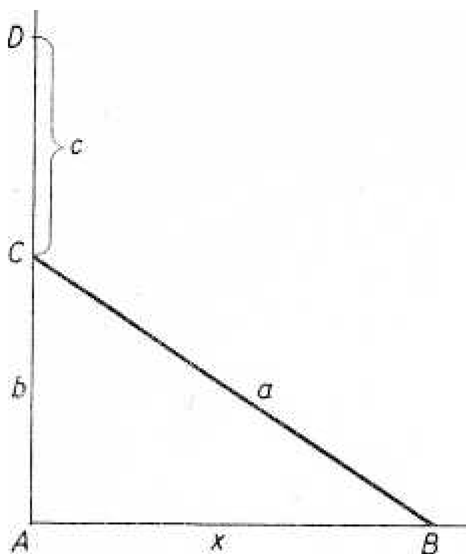
$$AD = \sqrt{\frac{486 \cdot 45^2}{1350}} = 27.$$

Hasonló módon számítja ki és adja meg a tábla a $CD = 36$, a $BD =$ 48 és a $CE =$ 21,6 (21 ;36) hosszúságok mérőszámait is. A szöveg a *DE* számításánál megszakad, de így is meggyőzően tanúsítja, hogy a babiloni számolómesterek ismerték és alkalmazták a hasonlóság fogalmát. Érdemükből nem sokat von le az, hogy a kör kerületét számították a $\pi = 3$ rossz közelítő értékkel is, vagy hogy a csonka kúp térfogatának kiszámítására a

$V = 1/2(3R^2 + 3r^2)*m$

hibás képletet használták. Megjegyezzük, hogy a négyzetes csonka gúla térfogatát is előbb a helytelen

$V = 1/2(a^2 + b^2)\ m$



5. ábra

képlettel határozták meg, de később használták a helyes

$$V=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]m$$

képletet is.

Annak bizonyságául, hogy a babiloni geometria nem volt a mai értelemben az óbabiloni matematika része, hanem inkább csak egy lehetőséget jelentett az aritmetikai vagy algebrai számítások alkalmazására, álljon itt egy korabeli geometriai szövegű feladat: Az *5. ábra* szemlélteti, hogy:

Egy 0;30 hosszú gerenda (*a)* a falhoz *(b)* támasztva áll. Felül 0;6-dal lecsúszott (c). Lentről mennyivel távolodott el? (*x* = ?)

A feladat szerint az *ABC* derékszögű háromszög a = 0;30 (0,5) átfogójából és a *b* = *a*—c = 0;30—0 ;6 = 0; 12 befogójából ki kell számítani a másik befogót. Ez a Pitagorasz-tétellel történt:

x = gyök(0 ;30^2- 0; 12^2) ≈ 0;27,36 (0,46).

Ennek a feladatnak a különféle változataira a mai tankönyvekben is sokszor rábukkanhatunk.

A babiloni matematika értékelésénél, úgy hiszem, a legreálisabb szempont az, hogy mennyire tudta kora gazdasági, termelési igényeit kielégíteni. E tekintetben nincs mit felróni a babiloni matematikusoknak. A gyakorlati élethez való szoros kötődésre mutat az, hogy megelégedtek a számolási eljárások rögzítésével. Megokolásokkal ebben a korban nem találkozunk. Talán ez magyarázza azt is, hogy egy-egy hibás képlettel (csonka gúla) sokáig elszámolgattak, ha az a gyakorlat számára még elfogadható értéket szolgáltatott. Ez az oka annak is, hogy nem jelentett számukra elméleti problémát az, hogy például: a $\sqrt{2}$ egészen más természetű szám, mint az egész vagy a törtszámok. Amint láttuk, a gyakorlat számára a $\sqrt{2}$-t tetszőleges pontossággal meg tudták határozni, és ezzel meg is elégedtek. Ez a nagyon gyakorlati alapokon nyugvó, algebrai jellegű matematika azonban biztos lehetőséget nyitott a mai értelemben vett matematika kifejlődéséhez.

EGYIPTOM

Ó-EGYIPTOM TÖRTÉNETÉNEK ÁTTEKINTÉSE

A Nílus völgye és a két folyó köze: Egyiptom és Mezopotámia hasonlítottak abban, hogy mindkettő termékenységét az időszakonként kiáradó folyók biztosították. Mezopotámia azonban Egyiptomhoz képest nyitottabb terület, amelyen sűrűn váltakoztak az uralkodó népek. Nyersanyag hiánya miatt kereskedelemre is szüksége volt. E két tényező a mezopotámiai földművelő életmódot nagyfokú mozgékonysággal is ötvözte. Egyiptom zárt területét azonban sivatag és tenger határolták, csupán Elő-Azsiával érintkezhetett a keskeny és nagyon jól lezárható Szuezi-szoroson keresztül. Az ókori Egyiptom története ennek megfelelően szinte csak egyetlen népnek a története. Kultúrája az ősidőktől kezdve folytonos fejlődést mutat, bár a helyhez kötöttség a haladásnak bizonyos fokig a gátját is jelentette. Az egyiptomi „tudóstól” azt várták, hogy megfeleljen nevének, azaz valóban sokat tudjon, hogy a már meglevő ismeretekből mennél többet birtokoljon, de nem kívántak tőle új felfedezéseket, sőt sokszor ezt nem is helyeselték. Az egyiptomi tudós aktív működése inkább csak a részletek tisztázására, finomítására, a meglevő ismeretekben való

elmélyedésre szorítkozott. Ezt a magatartást sugallta az egész állam szervezete is. A Nílus biztosította a bő Egyiptomi földmérők termést, de nem adta ingyen.

Nagyon rendszeres, jól összehangolt munkával kellett az öntözőberendezéseket elkészíteni, gondozni, a termés betakarítását biztosítani, a javak elosztását megszervezni stb. Ezt az összerendezettséget a kialakult központi hatalom biztosította. A papok, a katonák, az írástudó hivatalnokok, a kézművesek és a parasztság fölött a fáraó, Ozirisz napisten fiának, Hórusznak a leszármazottja kezdetben csak irányította az államot, majd később uralkodott a kialakult birodalomban. Ennek a társadalmi tagoltságnak a megszervezettsége bizonyos biztonságot jelentett, de egyszersmind az államszervezet megmerevedése, az állapotok rögzítése a kultúra haladását is lassította.

Az egységes egyiptomi birodalom az i. e. 3. évezred elején jött létre. (MÉNÉSZ az első dinasztia megalapítója.) Ez az Óbirodalom fejlődésének tetőfokát KHEOPSZ fáraó alatt érte el, i. e. 2550 körül. Hatalmát, korának műszaki ismereteit és fejlett művészetét hirdeti a 148 m magas és 928 m alapkerületű hatalmas piramisa. A 3. évezred végén az Óbirodalomban a társadalmi bomlás jelei már elszaporodtak. Hosszú ideig tartó zűrzavar után Théba arisztokráciája ragadta magához a hatalmat, és kezdetét vette az ún. Középbirodalom (i. e. 2000-1700). Ezután következett a néhány száz évig tartó hükszósz uralom. Mivel a hükszószok abban az időben urai voltak Palesztinának és Szíriának is, azért akkor került Egyiptom először szorosabb politikai és gazdasági kapcsolatba Elő-Ázsia államaival. Ebben az időszakban uralkodott AAUSZERRÉ (i. e. 1700-1650 körül) vagy más nevén APÓPHIS fáraó, akit csupán azért emelek ki, mert az ő uralkodásának 33. esztendejében íródott a Thébában megtalált Rhind-papirusz, az első írott, matematikai tartalmú, egyiptomi emlék.

A hükszószok kiűzése után alakult meg az Újbirodalom. Ekkor érte el Egyiptom legnagyobb kiterjedését: Núbiától Mezopotámiáig terjedt hatalma. Az i. e. 700. év táján, amikor Asszíria kiterjesztette uralmát egész Nyugat-Ázsiára, akkor Egyiptom is elveszítette függetlenségét. Mintegy 250 év múlva a perzsák vették birtokukba, majd NAGY SÁNDOR kezére került. Az ő

hirtelen halála után, a Ptolemaidák uralma alatt az egyiptomi Alexandria igen fontos kulturális szerephez jutott. Egyiptom az i. e. 30-as években római tartomány lett.

A MATEMATIKAI TARTALMÚ EGYIPTOMI PAPIRUSZOK

Az elsőnek megismert egyiptomi, matematikai tartalmú, írásos emlék a Rhind-papirusz. 1858 telén HENRY RHIND SKÓT régiségkereskedő Egyiptomban kezeltette tüdőbaját. Luxorban megvételre kínáltak neki egy, még sérülten is szokatlanul nagyméretű papiruszt, amelyet Théba egyik romépületében találtak.

RHIND felismerte a tekercs értékét, és megvásárolta. A papirusz RHIND halála után a British Museumba került. A tekercs elveszettnek vélt, hiányzó része 50 év múlva került elő a New York-i Történelmi Társulat gyűjteményéből. A Rhind-papirusz írója AHMESZ (JAHMESZ) királyi írnok. A bevezetésből megtudjuk, hogy „Ezt az iratot a 33. uralkodási évben, az áradás évszak 4. hónapjában (őfelsége Felső-) és Alsó-Egyiptom királya AAUSZERRÉ (APÓPHIS) alatt - aki élettel legyen megáldva - másolták régi iratok alapján. Készíttetett Felső- és Alsó-Egyiptom királya NIMAATRÉ (III. AMENEMHAT) alatt. JAHMESZ írnok írta ezt a másolatot."

A lemásolt irat tehát a Középbirodalom idejéből származik, az i. e. 1878-1840 közötti évekből, amikor III. AMENEMHAT uralkodott. Komoly vélemények utalnak arra, hogy már ez is másolat volt. Így valószínűleg nem tévedünk nagyot, ha úgy véljük, hogy a Rhind-papirusz vagy inkább az Ahmesz-papirusz tartalma az i. e. 2000. év táján fogalmazódott meg. Különben is a leírt ismeretek, különösen az ilyen összefoglaló jellegű művek, mint az Ahmesz-papirusz, biztos, hogy nem a leírás pillanatában, hanem már jóval előbb megszülettek.

Ugyancsak ebből az időből származik az Ahmesz-papirusznál valamivel kisebb „moszkvai papirusz" és a „londoni bőrtekercs".

Az első két papirusz a mindennapi élettel kapcsolatos számolási, geometriai feladatokat tartalmaz a megoldásokkal együtt. A londoni bőrtekercsen törtek közötti összefüggéseket találunk, amelyek hozzásegítettek ahhoz, hogy megértsük az egyiptomiaknak a törtekkel való számolási módját. Az Ahmesz-papiruszon 84, a

moszkvai papiruszon 25 feladat van a számolási technika bemutatására, az egyszerű egyenletek megoldására, a terület- és a térfogatszámításra.

AHMESZ, a királyi írnok a maga korában - mint a királyi írnokok rendjének tagja - nagy tudású gyakorlati szakember lehetett, aki képes volt urának parancsait megvalósítani, megoldva az azokkal együtt járó gazdasági, műszaki, számolási, szervezési problémákat. Az írnokok megbecsülését mutatja az is, hogy nem egy fáraót a korabeli szobrászok az írnok pózában ábrázoltak. AHMESZ nem biztos, hogy kiváló matematikus volt, hiszen a nevét viselő papiruszon hibák is vannak, bár az is lehet, hogy a régi írás másolását végezte gépiesen.

Az i. e. 3000 körül keletkezett egyiptomi írásnak két-, illetve háromféle alakja fejlődött ki. A kezdeti képírásból alakult ki a hieroglif írás (hieroglipha = szent bevésés; görög szó). Idővel az írásjelek nem csupán szavakat, fogalmakat jelöltek, hanem főként mássalhangzócsoportokat vagy egyes mássalhangzókat. A hieroglif írás tehát mássalhangzós írás, a magánhangzókat nem jelölték. Innen a bizonytalanság a szavak kiolvasásában. A hieroglif írásjelek rövidített, egyszerűbb alakjából fejlődött ki a hieratikus írás, amely olyasféle szerepet játszott, mint ma az írott betűk a nyomtatott betűk mellett. A kőbe vésett, gondosan kialakított írásjelek hieroglifek voltak, de a papiruszra az ahhoz jobban illő hieratikus írással írtak. A kétféle íráshoz később csatlakozott a nép által beszélt nyelv, a mindennapi élet témáival foglalkozó szövegek rögzítésére szolgáló ún. démotikus írás, amely az i. e. VII. században jött létre.

A sokáig megfejthetetlen hieroglif írás titkára először derített fényt a rosette-i tábla, amelyet NAPÓLEON egyiptomi hadjárata alkalmával találtak meg. Ezen háromféle írással: papi (hieroglif), népi (démotikus) és görög nyelven azt az ünneplést örökítették meg, amelyben az egyiptomi papok részesítették i. e. 197-ben PTOLEMAIOSZ EPIPHANÉSZT abból az alkalomból, hogy sikerült megfékeznie a felső-egyiptomi lázadást. Ez a háromnyelvű, fekete bazaltból készült kőtábla, amelyet BOUCHARD mérnök Rosette város mellett ásott ki, szállítás közben angol kézre került, és ma is a British Museum-ban őrzik. A rosette-i táblán először néhány

nevet (PTOLEMAIOSZ, ALEXANDROSZ, KLEOPÁTRA) sikerült azonosítani. Ezek alapján a hieroglif írást a francia JEAN FRANCOIS CHAMPOLLION (1790-1832) fejtette meg.

AZ ÓEGYIPTOMI SZÁMÍRÁS

A hieroglif írás számjelei a következők:

| = 1, || = 2, ||| = 3, |||| = 4, ||||| = 5, |||||| = 6, ||||||| = 7, |||||||| = 8, ||||||||| = 9.

A tízeseket a halom jelével (∩) írták le:

∩ = 10, ∩∩ = 20, ..., ∩∩∩∩∩ = 50, ..., ∩∩∩∩∩∩∩∩ = 80, ∩∩∩∩∩∩∩∩∩ = 90.

A százasok számára a zsinór jelét használták:

𓍢 = 100, 𓍢𓍢 = 200, 𓍢𓍢𓍢 = 300, ... 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 = 900.

Az ezreseket a stilizált lótuszvirág jelölte:



Később keletkezett a 10 000 jele:



vagy:



A százezret egy madáralak :



vagy az ebihal:





jelölte. A milliót a csodálkozó, térdeplő emberalak fejezte ki:

A tízmillió jele pedig:

Ezeknek feleltek meg az Ahmesz- és a moszkvai papiruszon a hieratikus számjelek:

=1, =2, =3, =4, =5,
=6, =6, =7, =8, =9,
=10, =20, =30, =40, =50,
=60, =70, =80, =90,

=100, =200, ...,
=500, =600, =700,
=1000.

A hieratikus számjelek koronként változtatták alakjukat, úgyhogy a számjelekből az írás idejére is lehet következtetni.

Amint látjuk, az egyiptomi számírás a tízes számrendszeren alapul, de a helyi érték használata nélkül, habár kötött sorrendben írtak : jobbról balra következtek a mind kisebb és kisebb egységek. Például:

21 396=
6 90 300 1000 20 000

Példa a hieratikus számírásra:

1378=
8 70 300 1000 .

Különös figyelmet érdemel a törtszámok egyiptomi írása, mert

ebben némiképpen kifejezésre jut a törtek értelmezése. Általában az egységszámlálójú ún. törzstörtekkel számoltak, és ezért csak ezeket jelölték. A tört vagy a rész jele a hieroglif írásban: **o** a hieratikus írásban pedig a pont. Például:

$= \frac{1}{12}$ vagy $= \frac{1}{12}$, illetve $= \frac{1}{12}$.

Néhány természetes törtnek, amelyek fogalma az ősidőkben keletkezett, más volt az írásmódja. Korszakonként változott azˆ írásjele:

$= \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{2}$.

A 2/3 jelölése igazodott az elnevezéshez: 2/3 neve „két rész”, jele:

A hieratikus írásban is külön jele volt az 1/2-nek, az 1/4-nek, az 1/3-nak és a 2/3-nak:

$= \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{3}$, $= = \frac{1}{3}$, $= \frac{2}{3}$

$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{32}$

6. ábra

Igen érdekes törtjeleket használtak a gabonamennyiségek leírásánál. Eredetük megértéséhez némileg ismernünk kell az egyiptomi mitológiát. Ennek kapcsán kissé kitérünk az egyiptomi naptárszámításra már csak azért is, mert ebből fejlődött ki a ma használatos naptár. Az egyiptomi élet legfontosabb, mondhatni létfontosságú eseménye a Nílus évenkénti kiáradása, amikor a folyó a völgyet beborította termékeny iszappal, és megöntözte a tikkadt földeket. Ez az egyiptomi földműveseket nem érhette készületlenül. Előre tudniuk kellett, hogy mikor önt ki a Nílus, ezért az időszámítást a Nílus áradásához igazították. Az év első napja az áradás napja volt. Később észrevették, hogy ez a nap egybeesik a Sirius csillag ún. heliakus felkelésével, azaz az évnek azzal a napjával, amelynek hajnalán a Sirius először jelenik meg az égen közvetlenül napkelte előtt. Az új évet tehát a sokkal biztosabb Sirius-felkeléstől számították, hiszen a Nílus áradása nem volt napra pontos, a Sirius pedig igen. A Sirius két egymás utáni heliakus felkelése közti időtartamban, az évben 365 nap volt. Az évet három évszakra osztották: az áradás, a sarjadás és a forróság évszakokra. Az évben 12 hónap volt, 30-30 nappal. A többlet 5 napot ünnepnek nyilvánították. Ekkor ünnepelték 5 isten születésnapját. **Plutarkhosz** görög történetíró szerint ennek az eredete a következő: Az egyiptomi Napisten, Ré észrevette, hogy felesége, Nut, az ég istennője megcsalta Gebbel, a Föld istenével. Megátkozta ezért Nutot,hogy ne legyen olyan nap az évben, amelyen gyermekeit megszülheti. Abban az időben az év még pontosan 360 napos volt. Thoth azonban, a bölcsesség istene, szintén szerelmes volt Nutba, és ezért amikor Jahtól, a Hold istenétől kockán elnyerte minden napnak a hetvened részét, ezeket 5 új nappá egyesítette (még maradt is valamicske), és hozzá csatolta az új 5 napot az év meglevő 360 napjához. Ezen az átok nélküli 5 napon szülhette meg Nut 5 gyermekét, mindennap egyet, köztük Oziriszt, Íziszt és Széthet. Ozirisznek, a Nílus, a termékenység és az alvilág istenének és nővérének, Ízisznek a fia: Hórusz lett az egyiptomiak nemzeti istene, a királyi hatalom jelképe. Oziriszt azonban, a műveltség és a tudomány terjesztőjét megölte fivére: Széth. (Ozirisz, isten lévén, nem halt meg egészen!) Széth gyűlöletét Ozirisz fiára, Hóruszra, a sólyomfejű istenre is átvitte. Kettőjük viaskodásában Széth Hórusz egyik szemét darabokra tépte. A stilizált Hórusz-sólyomszem részei szolgáltak a gabonamennyiség bizonyos törtrészeinek a jelölésére a 6. *ábra* szerint.

A ma emberének az 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 sorozatról talán a kettes számrendszer tört helyi értékei jutnak eszébe, de mint említettem, az egyiptomiak nem ismerték a helyi érték fogalmát. Ez a csökkenő mértani sorozat azzal függ össze, hogy az egyiptomiak a szorzásban és az osztásban nagyon sűrűn használták a kettőzés és a felezés műveletét.

AZ ÓEGYIPTOMI SZÁMOLÁS

Az egyiptomi számolómesterek mind a négy alapműveletet az összeadásra igyekeztek visszavezetni. Ez várhatóan az egész számok szorzásánál nem okozott nagy nehézséget. Számunkra csak az benne a szokatlan, hogy az egyiptomiak ezt a kettőzés műveletével hajtották végre. Az Ahmesz-papirusz egyik szemléltető példája a 12*12 szorzás. Ezt így számították ki:

1*12=12

2*12=24

4*12=48 -

8*12=96 -

Amikor a számoló a folytonos duplázásban eddig elért, akkor észvette, hogy a 12*12 összetehető a 4*12 és a 8*12 összeadásával:

12*12=4*12+8*12=48 + 96=144.

A gyakorlatban ezt nem írták ki, hanem a kétszerezés közben megjelölték (nálunk ez kötőjellel történt) az alkalmas szorzatokat, és azokat összeadták.

A művelet meggyorsítása érdekében a kétszerezés mellett sokszor használták a tízszerezést és a felezést is. Erre egy példa: 18 • 19.

1*19= 19 -

2*19= 38 -

10*19=190 -

5*19= 95 -

= =342.

Ezt az „egyiptomi szorzást” még a középkorban is tanították Európa-szerte.

Nehezebb volt a felezés, a kétszerezés, esetleg a tizedelés vagy a harmadolás segítségével az osztás elvégzése. Lényegében az osztást az egyiptomiak is a szorzás fordított műveleteként értelmezték. A szorzásra így szólítottak fel: „Számolj 19-esével 18-szor!” Az osztást pedig így fogalmazták : „Adj össze 19-től, míg 342-t kapsz!” A végrehajtás:

1*19= 19

2*19= 38

4*19= 76

8*19=152-

10*19=190 -

Most a feszülten figyelő számoló észrevette, hogy 152+190 éppen 342, tehát a mai módon így gondolkozhatott volna:

342 : 19=(152+ 190) : 19=(152 : 19) + (190 : 19)=8+ 10= 18.

A két részletosztás eredménye, a 8 és a 10 a kötőjellel megjelölt sorokból kiolvasható. A gyakorlatban a számoló ezt a kettőt adta össze.

Az Ahmesz-papiruszból való a következő osztás: „Adj össze 80-nal kezdve, míg 1120-at kapsz!”

A megoldás:

1*80= 80

2*80=160 -

4*80=320 -

8*80=640 -

A következő duplázás már túlvisz az 1120-on, viszont észrevehető, hogy 160+320+640=1120, tehát a kívánt hányados a kötőjeles sorokból: 2+4 + 8 = 14, hiszen

1120 : 80= (160+320+640) : 80=2 + 4+8= 14.

A papiruszban most valamivel nehezebb osztás következik. (4000 évvel ezelőtt is ismerték már a fokozatosság elvét.) 19 : 8= ?

A számolás:

1* 8= 8

2*8=16 -

1/2*8=4

1/4*8=2 -

1/8*8=1 -

A kötőjeles sorokból leolvasható, hogy 19:8=2+1/4+1/8. Még nehezebb a papirusznak az a feladata, amely azt kérdezi, hogy mennyi az 1 napra eső faggyútermés, ha az egész évi termés 3200 ro? A feladat megoldásához a 3200:365 osztást kell elvégezni. (Adj össze 365-től 3200-ig!) Ez így történt:

1*365= 365

2*365 = 730

4*365=1460

8*365=2920 - (A 3200-ig még van 280.)

1/3*365= 121+2/3

2/3*365=243+1/3 (A két kötőjeles szorzat összegéhez 3200-ig még kell 36 egész és kétharmad.)

1/10 •365= 36+1/2 - (Még mindig hiányzik egyhatod.) (Fejben:

mivel kell megszorozni 365-öt, hogy egyhatodot kapjunk?)

1/2190*365 = 1/6 -

A keresett hányados:

8+2/3+1/10+1/2190,

mert

$$3200 : 365 = \left(2920 + 243\frac{1}{3} + 36\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) : 365 = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2190}.$$

A feladat jól illusztrálja, hogy az osztás ilyen nehézkes, egyiptomi módja igen sok ügyességet és jó fejszámolást követelt. A papiruszok azon feladata, amelyek megoldásához az alapműveletek elvégzése kellett vagy éppen ezek begyakorlására szolgáltak, mindig a gyakorlati élethez kötődtek. Tárgyuk: kenyérsütés, sörkészítés, terménybegyűjtés, raktározás stb.

Számunkra különösnek tetszik az is, ahogyan a törtekkel számoltak. Amint említettem, minden törtet (természetes törtek kivételével: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4) a számolás előtt felbontottak egység számlálójú, ún. törzstörtek összegére. Ennek az az oka, hogy kezdetben a törteket nem hozták kapcsolatba az osztással, és csak mint az egység valahányad részét értelmezték. Ilyen törzstörtek közötti egyszerű összefüggéseket tartalmaz az i. e. 1700 tájáról származó londoni bőrtekercs. A Rhind-papirusszal együtt találták Thébában. A bőrtekercs táblázatát a ma szokásos átírással alább láthatjuk. Az egyiptomi, egységszámlálójú törtek jelölésére elfogadott forma, hogy a számlálót nem írjuk ki, hanem csak a törtvonalat és a nevezőt, tehát például:

$= \overline{12}$,

a kétharmad jele:

$= \overline{3}$.

A londoni bőrtekercs táblázata

$\overline{18}+\overline{36}=\overline{12}$
$\overline{21}+\overline{42}=\overline{14}$
$\overline{45}+\overline{90}=\overline{30}$
$\overline{30}+\overline{60}=\overline{20}$
$\overline{15}+\overline{30}=\overline{10}$

$\overline{10}+\overline{40}=\overline{8}$
$\overline{5}+\overline{20}=\overline{4}$
$\overline{4}+\overline{12}=\overline{3}$
$\overline{10}+\overline{10}=\overline{5}$
$\overline{6}+\overline{6}=\overline{3}$

$\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}=\overline{15}$
$\overline{24}+\overline{48}=\overline{16}$
$\overline{18}+\overline{36}=\overline{12}$
$\overline{21}+\overline{42}=\overline{14}$
$\overline{45}+\overline{90}=\overline{30}$

$\overline{10}+\overline{40}=\overline{8}$
$\overline{5}+\overline{20}=\overline{4}$
$\overline{4}+\overline{12}=\overline{3}$

$\overline{48}—\overline{96}=\overline{32}$
$\overline{96}+\overline{192}=\overline{64}$

$\overline{6}+\overline{6}+\overline{6}=\overline{2}$
$\overline{3}+\overline{3}=\overline{3}$
$\overline{25}+\overline{15}+\overline{75}+\overline{200}=\overline{8}$
$\overline{50}+\overline{30}+\overline{150}+\overline{400}=\overline{16}$
$\overline{25}+\overline{50}+\overline{150}=\overline{6}$
$\overline{9}+\overline{18}=\overline{6}$
$\overline{7}+\overline{14}+\overline{28}=\overline{4}$
$\overline{12}+\overline{24}=\overline{8}$
$\overline{14}+\overline{21}+\overline{42}=\overline{7}$
$\overline{18}+\overline{27}+\overline{54}=\overline{9}$
$\overline{22}+\overline{33}+\overline{66}=\overline{11}$
$\overline{28}+\overline{49}+\overline{196}=\overline{13}$
$\overline{30}+\overline{45}+\overline{90}=\overline{15}$

$\overline{30}+\overline{60}=\overline{20}$
$\overline{15}+\overline{30}=\overline{10}$
$\overline{48}+\overline{96}=\overline{32}$
$\overline{96}+\overline{192}=\overline{64}$

A táblázatot vizsgálva, először vegyük észre, hogy a második oszlop 10. egyenlősége hibás. Helyesen:

$$\overline{10}+\overline{25}+\overline{50}+\overline{150}=\overline{6}.$$

Ugyanebben az oszlopban az utolsó előtti, vagyis a 17. összefüggés is helytelen. Ha ez a sor igazodna a közvetlenül előtte levő háromhoz és az alatta levőhöz, akkor helyesen:

$$\overline{26}+\overline{39}+\overline{78}=\overline{13}$$

lenne, mert az említett sorokban szereplő összefüggések általános sémája:

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}=\frac{1}{n}.$$

Ez az egyenlőség nyerhető az

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}=\frac{1}{2n}$$

azonosságból, ha annak mindkét oldalához 1/2n-et adunk. Ezt az

utóbbit fedezhetjük fel a 2. oszlop 11. és 13. sorában, valamint az első oszlop összefüggéseinél.

Az 1/2n = 1/3n + 1/6n felbontás legegyszerűbb alakja, az n = 1 esetén:

1/2 = 1/3 + 1/6. Ezt az összefüggést az Ahmesz-papirusz is sokszor alkalmazza. Az 1/2-nek ez a felbontása viszont következik a 2. oszlop 5. és 6. sorából úgy, hogy a 6. sorban az 6 + 6 helyett 3-ot írunk. Ugyancsak a 2. oszlop 3. és 7. sora szerint:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$

amely szintén sokszor felhasznált egyenlőség.

Az 1/2 = 1/3 + 1/6 és a 2/3 = 1/2 + 1/6 alapösszefüggéseknez persze másként is eljuthatunk. Például a 3/4 = 1 + 1/3-nak a 2-vel való osztása után nyerjük, hogy: 2/3 = 1/2 + 1/6. Ugyanígy, ha a 3/2 = 1 + 1/2-et 3-mal osztjuk, kapjuk, hogy: 1/2 = 1/3 + 1/6. Lehetséges, hogy így jött létre a 2. oszlop 2. és 3. sora is: 5/4 = 1 + 1/4-ből : 1/4 = 1/5 + 1/20, és a 4/3 = 1 + 1/3-ból:

1/8 = 1/10 + 1/40.

Tartozom még a 2. oszlop 8., 9. és 10. sorának a magyarázatával. Bemutatok egy lehetséges és valószínű utat. A 10. sor megkapható

az 5/6 egy kézenfekvő felbontásából.

$$\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Ebből:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15},$$

viszont

$$\frac{25}{15}=1+\frac{2}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6},$$

tehát:

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{150}.$$

Ezt az $1/6=1/10+1/15$ egyenlőségbe írva:
$1/6=1/10+1/25+1/50+1/150$.

Ebből már a 2. oszlop 8. sorához is eljutunk, ha megszorozzuk

3/4-del:

$$\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{150}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{15+6+3+1}{150}=$$
$$=\frac{24}{200}+\frac{1}{200}=\frac{3}{25}+\frac{1}{200}=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{1}{200}.$$

Mivel azonban a Rhind-papirusz táblázata szerint: $2/25=1/15$ $+1/75$ (a magyarázata a Rhind-papirusznál), azért

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{1}{200}, \quad \text{illetve:} \quad \overline{8}=\overline{25}+\overline{15}+\overline{75}+\overline{200}.$$

Az eljárás megmagyarázza azt is, hogy az 15 miért áll a táblázatban az 25 után.

Végül a 2. oszlop 9. sora a legutóbbi eredményünknek a fele:

$$\overline{16}=\overline{50}+\overline{30}+\overline{150}+\overline{400}.$$

A bőrtekercs 3. és 4. oszlopának kiolvasható jelei nem adnak újat. Az itt található összefüggések már előfordultak az 1. és a 2. oszlopok valamelyikében.

A törteknek a törzstörtek összegeként való előállítását könnyítette meg az Ahmesz-papirusz táblázata. Ebben fel vannak sorolva mindazon 2 számlálójú törtek, amelyeknek a nevezője páratlan szám, 2/3-tól 2/101-ig. A londoni bőrtekercsnél már megismert törtírásmóddal a táblázat a következő:

$$2:\ 3[=\overline{2}+\overline{6}]$$
$$2:\ 5=\overline{3}+\overline{15}$$
$$2:\ 7=\overline{4}+\overline{28}$$
$$2:\ 9=\overline{6}+\overline{18}$$
$$2:11=\overline{6}+\overline{66}$$
$$2:13=\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$$

$$2:53=\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}$$
$$2:55=\overline{30}+\overline{330}$$
$$2:57=\overline{38}+\overline{114}$$
$$2:59=\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$$
$$2:61=\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$$
$$2:63=\overline{42}+\overline{126}$$

$2 : 15 = \overline{10} + \overline{30}$

$2 : 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$

$2 : 19 = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$

$2 : 21 = \overline{14} + \overline{42}$

$2 : 23 = \overline{12} + \overline{276}$

$2 : 25 = \overline{15} + \overline{75}$

$2 : 27 = \overline{18} + \overline{54}$

$2 : 29 = \overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$

$2 : 31 = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$

$2 : 33 = \overline{22} + \overline{66}$

$2 : 35 = \overline{30} + \overline{42}$

$2 : 37 = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$

$2 : 39 = \overline{26} + \overline{78}$

$2 : 41 = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$

$2 : 43 = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$

$2 : 45 = \overline{30} + \overline{90}$

$2 : 47 = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$

$2 : 49 = \overline{28} + \overline{196}$

$2 : 51 = \overline{34} + \overline{102}$

$2 : 65 = \overline{39} + \overline{195}$

$2 : 67 = \overline{40} + \overline{335} + \overline{536}$

$2 : 69 = \overline{46} + \overline{138}$

$2 : 71 = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$

$2 : 73 = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$

$2 : 75 = \overline{50} + \overline{150}$

$2 : 77 = \overline{44} + \overline{308}$

$2 : 79 = \overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$

$2 : 81 = \overline{54} + \overline{162}$

$2 : 83 = \overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$

$2 : 85 = \overline{51} + \overline{255}$

$2 : 87 = \overline{58} + \overline{174}$

$2 : 89 = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$

$2 : 91 = \overline{70} + \overline{130}$

$2 : 93 = \overline{62} + \overline{186}$

$2 : 95 = \overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$

$2 : 97 = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$

$2 : 99 = \overline{66} + \overline{198}$

$2 : 101 = \overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$

Látható, hogy a táblázat kerüli a triviális felbontásokat, mint például: $2/7 = 1/7 + 1/7$. Ennek az oka az, hogy a kettőzés sokszor alkalmazott, többszöri használata áttekinthetetlenül sok tagú összeget eredményezne. Például:

$$1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

$$2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

$$4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}.$$

A táblázat szerint viszont:

$$1\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$2\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$$

$$4\cdot\frac{2}{7}=1+\frac{1}{7}$$

$$8\cdot\frac{2}{7}=2+\frac{2}{7}=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$16\cdot\frac{2}{7}=4+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$$

$$\ldots$$

Így sohasem jutunk áttekinthetetlenül hosszú eredményhez.

A táblázat segítségével minden, a gyakorlatban fontos tört átalakítható egységtörtek összegére. Például:

$$\frac{5}{21}=\frac{3}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\,.$$

Előre sejthető, hogy az egységtörtekkel nehézkesebb a számolás, mint a mai eljárással, de kivételképpen akadnak olyan feladatok, amelyeknél az egyiptomi módszer az egyszerűbb. A papirusz egyik ilyen feladata: 7 kenyeret 8 ember között egyenlőképpen kell elosztani. Első gondolatunk valószínűleg az volna (tisztelet a kivételnek), hogy mind a 7 kenyeret 8-8 egyenlő részre szeljük, és mindenki kap 7 ilyen szeletet. Az egyiptomi számoló szerint viszont egy ember része:

$$\frac{7}{8}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\,.$$

Így elegendő 4 kenyeret félbevágni, 2 kenyeret negyedekre szelni és

egy kenyeret nyolcadokra, tehát a kenyér szétosztása most kevesebb vágással hajtható végre.

Az Ahmesz-papirusz táblázata minden bizonnyal hosszabb időszak terméke. Erre mutat a benne található módszerek változatossága is. Az egész táblázaton végigvonul a $2/3 = 1/2 + 1/6$ felbontás alkalmazása. Minden olyan tört, amelynek a nevezője 3-mal osztható, ebből az összefüggésből származik. Ha például mindkét oldalát 29-cel osztjuk, akkor nyerjük a

$$\frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$$

átalakítást. Valószínű, hogy ezek és a hasonló eljárásra alapozott felbontások a legrégibbek. Így keletkezett például többek közt a

vagy a

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75} \quad \text{a} \quad \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}\text{-ből}$$

$$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196} \quad \text{a} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\text{-ból.}$$

E felbontásokhoz vezető első nagy lépés a 2/5 és a 2/7 felbontás megtalálása volt, amelynek egy lehetséges útja:

$6/5 = 1 + 1/5$, tehát mindkét oldalt osztva 3-mal: $2/5 = 1/3 + 1/15$ és

$8/7 = 1 + 1/7$, tehát osztva 4-gyel: $2/7 = 1/4 + 1/28$.

Ugyanígy: $12/11 = 1 + 1/11$, tehát osztva 6-tal: $2/11 = 1/6 + 1/66$.

Ezek és a belőlük származó átalakítások összefoglalhatók a

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

azonossággal, hiszen általánosan is igaz, hogy

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},$$

és ebből következik, hogy:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Ilyen felbontás még például a $2/85=1/51+1/255$ is, amely a $2/5=1/3+1/15$-ből keletkezett, és ilyen a $2/77=1/44+1/308$ is, amely a $2/7=1/4+1/28$-ból származott a 11-gyel való végigosztással.

A 2/13 felbontása viszont már biztosan nem ezzel a módszerrel született, hiszen akkor a táblázatban

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$$

állna. Ahhoz, hogy a szerző a táblázatban szereplő felbontást

kapja, már össze kellett kapcsolnia a tört és az osztás fogalmakat.

Valamelyik írnoknak rá kellett jönnie, hogy $2/13=2:13$, vagy ahogyan ő mondta volna: Ha összeadok 13-tól kezdve 2-ig, akkor 2

éppen 2/13-at kapok. A végrehajtás:

$1 \cdot 13 = 13$

$\overline{2} \cdot 13 = 6 + \overline{2}$

$\overline{4} \cdot 13 = 3 + \overline{4}$

$\textcircled{\overline{8}} \cdot 13 = 1 + \overline{2} + \overline{8}$ – (A 2-ig kell még $\frac{3}{8} = \overline{4} + \overline{8}$.)

$\overline{13} \cdot 13 = 1$

$\overline{26} \cdot 13 = \overline{2}$

$\textcircled{\overline{52}} \cdot 13 = \overline{4}$ –

$\textcircled{\overline{104}} \cdot 13 = \overline{8}$ –

A megjelölt sorokból:

$$\frac{2}{13} = 2 : 13 = \overline{8} + \overline{52} + \overline{104} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Ezt találjuk a táblázatban.

Az osztás elvégzésénél külön figyelmet érdemel az 1/8*13=

= 1 + 1/2+1/8 lépésnél annak a megállapítása, hogy „mennyi van még a 2-ig?”, azaz, hogy melyik az a szám, amely az (l + 1/2+1/8)-ot 2-re, illetve az (1/2+1/8)-ot l-re egészíti ki. Ezt mi úgy állapítottuk meg, hogy az összeadást közös nevezőre hozással elvégeztük (5/8), és az összeget kivontuk az 1-ből (3/8), majd a 3/8-ot egységszámlálójú törtek összegeként fejeztük ki: 3/8=2/8+1/8=1/4+1/8.

Az egyiptomi számoló azonban nem ismerte a közös nevező fogalmát, azért az egységre kiegészítő szám keresésénél úgy járt el, hogy az 2+ 8 összegnek vette a 8-szorosát, (8 a nagyobbik nevező), ez 5. Ezután az 5-öt kivonta 8-ból (az 1 nyolcszorosából). Így kapott 3-at. Ezután pedig visszacsinálta a 8-cal való szorzást, azaz a 3-at elosztotta 8-cal (Adj össze 3-tól 8-ig!):

$$1 \cdot 8 = 8$$
$$\overline{2} \cdot 8 = 4$$
$$\boxed{\overline{4}} \cdot 8 = 2 \quad -$$
$$\boxed{\overline{8}} \cdot 8 = 1 \quad -$$

Az osztás eredménye 4 + 8, éppen az általunk is kiszámított kiegészítő érték. A kiegészítő számot tehát nem a törtek közvetlen összeadásával találták meg az egyiptomiak, hanem a részműveletekben szereplő minden mennyiséget megszorozták a nevezők valamely közös többszörösével, majd a számolás végén osztottak vele. Amikor az egyiptomiak eljutottak arra a felismerésre, hogy 2/n = 2:n, akkor már a 2/n táblázat hiányzó részét nagyobb nehézség nélkül kiszámíthatták. Úgy vélem, érdemes megjegyezni, hogy a 2 *:n* osztással esetleg többféle felbontást kaphattak. A 2/35 - tört esetén például az osztás elvégezhető az

$$1 \cdot 35 = 35$$
$$\overline{10} \cdot 35 = 3 + \overline{2}$$
$$\boxed{\overline{30}} \cdot 35 = 1 + \overline{6} \quad - \quad (\text{A kiegészítés: } \frac{5}{6} = \overline{2} + \overline{3}.)$$
$$\overline{7} \cdot 35 = 5$$
$$\overline{21} \cdot 35 = 1 + \overline{\overline{3}}$$
$$\boxed{\overline{42}} \cdot 35 = \overline{2} + \overline{3} \quad - \quad \text{séma szerint,}$$
$$\text{tehát: } \frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}.$$

Lehetséges azonban így is osztani:

$$1 \cdot 35 = 35$$

$$\overline{10} \cdot 35 = 3 + \overline{2}$$

$$\overline{20} \cdot 35 = 1 + \overline{2} + \overline{4} \quad \text{– (A kiegészítés: } \overline{4}.\text{)}$$

$$\overline{35} \cdot 35 = 1$$

$$\overline{140} \cdot 35 = \overline{4} \quad \text{–} \quad \text{Tehát: } \frac{2}{35} = \frac{1}{20} + \frac{1}{140}.$$

Lehetett volna még a 2/35 esetet visszavezetni a 2/5 = 1/3 + 1/15 felbontásra is, amikor 2/35 = *1/21 + 1/105*.

Bizonyára tudnánk olyan formulákat találni, amelyek segítségével sorozatban lehetne gyártani a 2/n alakú törtek felbontásait. A 2/35-nél jól beválna a

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{\frac{p(p+q)}{2}} + \frac{1}{\frac{q(p+q)}{2}}$$

képlet, ahol $p * q = n$, jelen esetben 5 • 7 = 35.

A 2/101 FELBONTÁSÁBÓL PEDIG KIOLVASHATÓ A

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$

összefüggés. Biztos azonban, hogy az egyiptomiak nem ilyen képletekkel dolgoztak, de e képletekhez vezető eljárásokat, úgy látszik, ismerték.

A számolási technika szempontjából érdekes az Ahmesz-papirusz 13. feladata. Eszerint az (1/16 + 1/112)(1 + 1/2 + 1/4) szorzást elvégezni. Az eredményhez valószínűleg úgy jutott el a szerző, hogy az első tényezőnek a 112-szeresét, a 8-at megszorozta a

második tényezővel, és a kijött 8 + 4 + 2 = 14-et elosztotta 112-vel. Így pontosan 1/8-ot kapott. Ugyanazt a módszert alkalmazta tehát, amelyet a „kiegészítő” számok meghatározására az osztásnál használt. Befejezésül lássunk egy példát a törtekkel való osztásra is.

A papirusz 70. feladatában 100-at kell elosztani 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 -dal, azaz 100:(7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = ? volt a kérdés. A végrehajtás:

$$1 \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}$$

$$2 \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 15+\bar{2}+\bar{4}$$

$$\textcircled{4} \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 31+\bar{2} \quad -$$

$$\textcircled{8} \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 63 \quad -$$

$$\bar{3} \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 2+\bar{2}+\overline{12}+\overline{24}$$

$$\textcircled{\bar{3}} \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = 5+\bar{4} \quad -$$

[A 100-ra kiegészítő szám:

$100-(31+\bar{2}+63+5+\bar{4}) = \bar{4}$.]

Az osztás negyedik sorából következik, hogy ha a (7 + 2 + 4 + 8)-ot 63-mal osztom, akkor 8-ot nyerek. Ha pedig az 4-et szeretném megkapni, akkor 2/63-mal kell szoroznom, tehát:

$$\textcircled{\tfrac{2}{63}} \cdot (7+\bar{2}+\bar{4}+\bar{8}) = \bar{4} \quad -$$

100 : 63 = ?

$$
\begin{array}{rll}
1 \cdot 63 = & 63 & - \\
\overline{3} \cdot 63 = & 21 & - \\
\overline{6} \cdot 63 = & 10+\overline{2} & - \\
\overline{12} \cdot 63 = & 5+\overline{4} & - \\
\overline{63} \cdot 63 = & 1 & \\
\overline{126} \cdot 63 = & \overline{2} & \\
\overline{252} \cdot 63 = & \overline{4} & -
\end{array}
$$

Így: 100 : 63= 1 + 3+ 6+12+252= 1 + 2+12+ 252. Ennek a 8-szorosa: 8+4+ 2/3+2/63, tehát a végeredmény:

$$100 : \left(7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}\,.$$

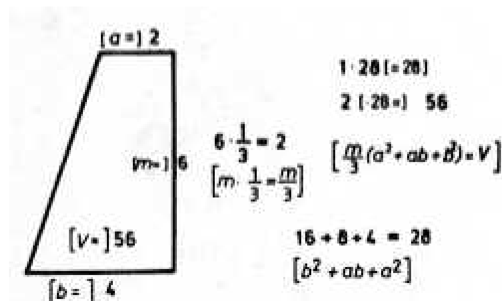
AZ ÓEGYIPTOMI GEOMETRIA

Az eddig példaképpen felhozott feladatok azt az egyiptomi számolási technikát igyekeztek bemutatni, amely szükséges volt az óegyiptomi élet gazdasági, műszaki, adminisztratív problémáinak a megoldásához. Az egyiptomi papiruszok geometriáját is csak úgy tekinthetjük, mint gyakorlati számolási feladatokat. Az e csoportba tartozó feladatoknak csupán a szövegük, a témájuk geometriai. Elméleti geometriai gondolatmenetekkel a papiruszokban nem találkozunk. A feladatok közt szerepel: egyenes vonalú síkidomok területének kiszámítása, hasáb, henger, gúla és csonka gúla térfogatának meghatározása. Az általános négyszög területét úgy számolták ki, hogy a szemközti oldalak számtani közepét összeszorozták. Ez a gyakorlat számára sokszor jó közelítés volt.

A Kheopsz-piramis szerkezetében fellelhető az ún. aranymetszés. (Az *a* szakaszt úgy osztjuk két részre, *b*-re és c-re, ahol b > c, hogy teljesüljön az $a : b = b : c$ aránypár. Így a nagyobbik szelet mértani középarányosa az egész szakasznak és a kisebbik szeletnek.) Ha egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság aranymetszéssel osztja ketté az átfogót, akkor a háromszöget Kepler-háromszögnek nevezzük.

A Kheopsz-piramis egyik alapélére merőleges szimmetriasík a piramisból olyan egyenlő szárú háromszöget vág ki, amelyet a gúla magassága 2 Kepler-háromszögre bont. Ebből az is következik, hogy a piramis teljes felszínének (az alapnégyzetet is beleszámítva) nagyobbik aranymetszete a palást felszíne, a kisebbik pedig az alapnégyzet. - Sok olyan próbálkozás látott napvilágot, amely a piramisok adataiból olyan geometriai és csillagászati ismereteket vélt kiolvasni, amelyekkel az egyiptomiak jól bizonyíthatóan még nem rendelkeztek. Ilyen a $\pi \approx 22/7 \approx 3{,}1428$ érték is. Ez az érték úgy jön ki, hogy a piramis könyök mértékegységekben mért alapkerületét (1760) elosztjuk a piramis kétszeres magasságával (560-nal). Voltak, akik ezt úgy értelmezték, hogy az egyiptomi építők a piramisban a π értékét örökítették meg. Kis számolással azonban beláthatjuk, hogy a piramisnak ez a tulajdonsága az előbb említett aranymetszésszabály szerinti építkezésnek a következménye. Az építőnek azonban még az aranymetszés törvényét sem kellett ismernie, elég volt az is, ha fejlett arányérzékkel rendelkezett. Ezt számos óegyiptomi szobor igazolja, amelyeken ugyancsak felfedezhetők az aranymetszés szerinti arányok. A számolómesterek nemcsak az Ahmesz-papiruszon, hanem a jóval későbbi egyiptomi számításokban is, a kör területét a $t = ((8/9)d)^2$ képletnek megfelelő utasítással határozták meg, ahol d a kör átmérője.

A mai $t = r^2\pi$ képlettel való összehasonlítás azt mutatja, hogy Egyiptomban az előbbinél pontatlanabb, de a gyakorlatban jól használható $\pi = 3{,}16$ értékkel számoltak. Nem valószínű, hogy az Ahmesz-papirusz keletkezése előtt 500 évvel (KHEOPSZ i. e. 2550 táján uralkodott) pontosabb π értéket használtak volna, mint századokkal, sőt évezredekkel később.



7. ábra

Az egyiptomi geometria legnagyobb eredménye a csonka gúla térfogatának a kiszámítása, amelyről a moszkvai papirusz tesz bizonyságot. A moszkvai Puskin Szépművészeti Múzeumban őrzött ún. moszkvai matematikai papirusznak ezt a részletét mutatja a *15. kép,* és magyarázza a 7. *ábra.* A kép felső része maga a papirusz, amelyen hieratikus írás adja meg a számítási utasítást. Alatta ugyanaz a szöveg látható, de J. J. PEREPJOLKIN hieroglif-átírásával. Az ábra pedig magyar szöveggel magyarázza a papirusz idézett részét. A papiruszon olvasható utasítás soronkénti fordítása a következő:

1. sorban: Add össze ezt a 16-ot

2. sorban: ezzel a 8-cal és ezzel a 4-gyel!

3. sorban: Kijön 28. Számítsd ki

4. sorban: egyharmadát a 6-nak. Kijön 2. Szám-

5. sorban: lálj 28-asával kétszer. Kijön 56.

6. sorban: Nézd, ez 56. Jól számoltál.

Az érdeklődők kedvéért közlöm néhány hieroglifjei hangértékét. Amint tudjuk, csak a mássalhangzókat, illetve mássalhangzócsoportokat jelölték.

8. ábra

AZ ÓEGYIPTOMI ALGEBRA

Ahogyan mezopotámiai algebra létezett, ugyanolyan értelemben, ha nem is olyan fejlett fokon, beszélhetünk egyiptomi algebráról is. Egyenletformában megfogalmazható feladatokról van tehát szó. Úgy tetszenek, hogy ezek már elszakadtak a közvetlen alkalmazhatóságtól, az aprópénzre váltható hasznossági szemponttól. Ezekben az elsőfokú és tiszta másodfokú egyenleteknek megfelelő feladatokban fellelhető a játékos kedv és a szórakozásként végzett számolás. Amint az eddigiekből kitűnt: a matematika eredete biztosan a gyakorlati élet feladataiban található meg, de a társadalom egy bizonyos fejlettségi fokán már elszakadhat a közvetlen gyakorlattól. Igaz, hogy a matematikát az emberi szükségletek hozták létre, de ezek nem feltétlenül gyakorlati hasznosságú szükségletek. Amelyik társadalom már igényli a művészeti alkotásokat, ott nem kell csodálkoznunk, hogy jelentkezik az öncélúság a matematika művelésében is. A papiruszok példái ilyen vonatkozásban is önmagukért beszélnek:

Egy szám meg a hetedrésze 19. Melyik ez a szám?

A papirusz modernizált megoldása: Tegyük fel, hogy a keresett

szám: 7. Ennek hetede: 1. A kettő összege: $7+1 = 8$. A feladat szerint azonban nem 8-nak, hanem 19-nek kellett volna kijönnie. A keresett szám tehát nem 7, hanem ennél nagyobb annyiszor, ahányszor nagyobb a 19 a 8-nál. Elvégzendő tehát a 19 :18 osztás:

$$\begin{array}{lll} & 1\cdot 8=8 & \\ \text{(2)} & \cdot 8=16 & - \\ & \overline{2}\cdot 8=4 & \\ (\overline{4}) & \cdot 8=2 & - \\ (\overline{8}) & \cdot 8=1 & - \end{array} \qquad \text{Tehát: } 19:8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

így a helyes eredmény:

$$7\cdot\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

Valóban:

$$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\cdot\left(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=19.$$

A látott módszer az ún. „regula falsi”, a hamis szabály módszere. Ez abban áll, hogy az ismeretlen számára választunk egy alkalmas, hamis értéket, és ezzel végrehajtjuk a feladat által megkívánt műveleteket. Az így nyert eredményt azután összehasonlítva a feladat megfelelő adatával, az ismeretlen előre kiválasztott, hamis értékét helyesbítjük.

Az egyiptomiak az ismeretlent az „aha” szóval jelölték, ami sokaságot jelent. Az egyiptomi írásban ez a szó egyetlen „h” betű. Mivel kezdetben a papirusz megfejtői ezt a „h”-t „hau”-nak olvasták, azért a matematikatörténetben a hibás „hau” szó terjedt el a valószínűleg helyes „aha” helyett.

Egy másik példa a „hau”- vagy „aha”-számításokra, ugyancsak az Ahmesz-papiruszból:

Egy szám, ennek a kétharmada, a fele és a hetede összesen: 37. Melyik ez a szám?

Egyenlet alakú megfogalmazásban: Megoldandó az

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37$$

egyenlet. Ezt a feladatot az egyiptomi megoldó is úgy végezte el, ahogy ma mi tennénk. A 37-et elosztotta (1 + 2/3 + 1/2 + 1/2 + 1/7)-del, amikor is megkapta a 16 + 2/21 = 16 + 1/56 + 1/679 + 1/776 eredményt.

Az egyiptomi algebra ismertetésének befejezéséül lássunk még egy példát a „regula faisi” alkalmazására:

„Egy négyzetnek, meg egy másiknak, amelynek oldala az első négyzet oldalának (1/2 + 1/4) része, területe összesen: 100. Mondd meg nekem!”

Bizonyára az eredeti négyzet oldalhosszát kell kiszámítani, azaz meg kell oldani az

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=100$$

másodfokú egyenletet. A papirusz számolási utasítása: Tegyük fel, hogy a keresett négyzet oldala: 1, akkor a második négyzet oldala: 1 + 9/16(= 1 + 1/2 + 1/16). Add össze a két négyzet területét: 1 + 9/16 (= 1 + 1/2 + 1/16). Vonj ebből négyzetgyököt: 5/4(| = 1 + 1/4). Ez nem 10. Az eredeti négyzet oldala tehát nem 1, hanem annál annyiszor több, ahányszor a 10 nagyobb az 5/4-nél. 10 : 5/4 = 8. A keresett négyzet oldala tehát 8-szor nagyobb az 1-nél, azaz 8. A másik négyzet oldala így 8*3/4 = 6. A két négyzet területösszege valóban 100.

Egyiptom matematikájának bemutatását zárjuk le az Ahmesz-

papirusz két aritmetikai feladatával. Az első azt mutatja, hogy az egyiptomiak ismerték a számtani sorozat fogalmát, a másik pedig azt, hogy a mértani sorozatét is. Az egyik:

100 cipót 5-felé kell osztani úgy, hogy a részek számtani sorozatot alkossanak (számtani sorozat egymást követő elemei legyenek), és a három nagyobb rész összegének a hetede akkora legyen, mint a két kisebb rész összege. A feladatot a „regula faisi” módszerével oldották meg.

$$\left(1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\ 29\frac{1}{6},\ 38\frac{1}{3}.\right)$$

A másik feladat különböző szövegekkel napjainkban is sokszor felbukkan. A papiruszon ez áll:

	7 ház
	49 macska
	343 egér
	2 401 kalász
	16 807 búzaszem
összesen:	19 607.

Nem nehéz a hozzá tartozó szöveget kitalálni. 7 ház mindegyikében 7 macska. Mindegyik macska megevett 7 egeret. Minden egér megevett 7 kalászt. Minden kalászban volt 7 szem búza. Mennyi ezek összege? Ha a feladat a búzaszemek számát kérdezte, akkor a felelet helytelen, az összeadás felesleges. A számok összege viszont nem értelmezhető. A szövegtől függetlenül, a papiruszon egy 7 hányadosú mértani sorozat első 5 elemének az összegét látjuk. Magyar vonatkozásban emlékeztet e példa az ismert találós kérdésre: Jankó elment Piripócsra. Találkozott 3 tóttal. Minden tótnak 3 zsákja, minden zsákban 3 macska. Hányán mentek Piripócsra? Valószínű, hogy az Ahmesz-papirusz idézett feladata is ilyen játékos találós kérdés. A magyar változat megválaszolásához azonban nem kell számolni.

Az eddig ismert leletek alapján Egyiptom matematikájáról alkotott képünk azt mutatja, hogy az elméletileg meg nem alapozott, csupán számolásokra alkalmat adó geometriájuk és a nagyon körülményes számolási módszerük nehézzé tette a továbbfejlődést. A matematikában való jelentős továbblépéshez a műveletek és a törtek másféle értelmezése és a matematikai jellegű problémák más irányból való megközelítése lett volna szükséges. Mindenesetre az óegyiptomi matematika is teljesítette az egyiptomi élet megkívánta számolási feladatokat, és megmerevedéséért az akkori társadalom szerkezetét kell okolnunk.

GÖRÖGORSZÁG

A KRÉTAI ÉS A MÜKÉNÉI KULTÚRA

Az Égei-tenger térségében a legrégibb civilizáció és kultúra Kréta szigetén fejlődött ki. Ennek kezdete az i. e. 3000. év tájékára tehető. Ettől kezdve a krétai kultúra töretlenül virágzott az i. e. 1500-as évekig. Már i. e. 2000 tájékán felépültek a gazdag díszítésű palotáktól ékes krétai városok, mindegyik egy-egy király székhelye. Ezek közül a későbbi főváros: Knósszosz és a sziget déli részén fekvő, kulturális leletekben szintén gazdag Phaisztosz a legismertebbek. A sziget gazdasági és az erre épülő kulturális életét a földművelés mellett a fejlett bronzművesség és fazekasipar és az élénk, a hajózást is igénybe vevő, kiterjedt kereskedelem biztosította. Hajóik Ciprus szigetéről szállították a rezet, és ónért a mai spanyol partvidékre is eljutottak. Krétai edények a mezopotámiai ásatásokból éppen úgy előkerülnek, mint az egyiptomi királysírokból. Ezt a romjaiban is csodálatos krétai kultúrát, virágzása teljében - amerikai geológusok (D. NINKOVICH és B. C. HEEZEN) szerint - i. e. 1500 körül egy hatalmas vulkáni kitörés pusztította el, és a sziget földjét a mindent belepő vulkáni .hamu évekre terméketlenné tette.

Még a krétai kultúra virágzása idején, az i. e. 1900-as években jelentek meg a Balkán-félsziget déli részén a magukat akhájoknak nevező görögök. A Trója ellen viselt háborújukról beszél HOMÉROSZ *Iliásza* és *Odüsszeiája.* E művek az i. e. VIII. században íródtak, és nem tekinthetők hiteles történelmi forrásoknak, hiszen HOMÉRoszhoz csak szájhagyományok útján, legendák alakjában juthatott el a sok századdal előbb lefolyt hősi csaták története. A német HEINRICH SCHLIEMANN mégis a homéroszi művekbe vetett hitével ásta ki Trója romjait, és 1876-ban a mükénéi kultúra ékszerekben és aranyban gazdag emlékeit. A krétaihoz nagyon hasonló mükénéi kultúra Görögország késői bronzkorszakának idején, i. e. 1600 és 1100 között virágzott, és hirtelen pusztulással ért véget az i. e. XII. században. Ez időben egybeesik az utoljára beáramló görög törzseknek, a dóroknak a Peloponnészoszi-félszigetre való érkezésével (i. e. XIII-XII. század). Sokan a dórok számlájára írják a mükénéi kultúra megsemmisülését, de más

vélemények szerint nem bizonyítható, hogy az akkori Görögország kifosztása és romba döntése az ő művük volt.

A dórok, amint a nyelvészeti kutatások igazolják, benépesítették a Peloponnészoszi-félszigetet a középső, hegyes Árkádia kivételével, és uralmuk alá került a félsziget nyugati partvidékétől kezdve az Égei-tenger szigetvilága Kószig, illetve Rodoszig. A dór nyelvterületbe tartozott a XII. században Mükéné és Kréta szigetén Knósszosz is. A görögök a nagy természeti katasztrófa után, az i. e. 1450-es években települtek be Krétára. Ma is rejtély, hogy mi okozhatta az általuk újjáépített Knósszosz pusztulását.

A gazdag mükénéi kultúra leleteiből az angol ARTHUR JOHN EVANS arra következtetett, hogy egy ilyen magas kultúrát teremtő nép már nem nélkülözhette az írást. Ilyen irányú kutatásai Krétára vezették, ahol 1900 tavaszán Knósszoszban meg is találta az első ismert krétai írott emléket. Rengeteg írásos égetetlen agyagtáblát fedezett fel Phaisztoszban is. E leletek alapján háromféle írást különített el.

Az i. e. 2000 és 1650 közötti időben képszerű jeleket (ember, ló, kocsi, kéz, csillag stb.), hieroglifákat használtak írásra. Ez a hieroglifikus írás i. e. 1750-re már vonalas (lineáris) jelekké egyszerűsödött. Ennek a lineáris írásnak kétféle változata különült el. Az első fajtát („lineáris A”) kb. i. e. 1400-ig használták. Ez még megfejtetlen. A második fajta írás, a „lineáris A”-nak még tovább egyszerűsödött válfaja, az ún. „lineáris B” írás i. e. 1400 körül terjedt el, tehát a görögök Krétán való megjelenésével nagyjából egy időben. 1939-ben CARLO BLEGEN amerikai professzor KURUNIOTISZ görög régésszel karöltve a Peloponnészoszi-félszigeten a régi Püloszban (a mai Epano Englianosz nevű település mellett) a homéroszi NESZTOR palotájában mintegy 600 „lineáris B” írású agyagtáblát talált. Mind az utóbbiak, mind a krétai táblák égetetlen agyaglapokba karcolt gazdasági feljegyzéseket tartalmaznak, például leltárakat, anyagkészleteket, adókivetéseket és más kimutatásokat. A „lineáris B” írást az angol MICHAEL VENTRIS (1922-1956) fejtette meg. Kiderült, hogy a „lineáris B” ősgörög nyelvű és alapjában szótagírás, amelynek jelei közé keveredtek a még felismerhetően képszerű, tárgyakat jelentő jelek is. A megfejtett írások bizonyítják, hogy a mükénéi kultúra már görög kultúra volt.

Az agyagtáblákon nem található időpont megjelölés. A feljegyzések csak egy éven belüli időszakra szóltak. Az év leteltével az agyagtáblákat megsemmisítették, és a következő évre újakat írtak. Ezekről a táblákról leolvasható, hogy az ősgörögök nem helyi értékes 10-es számrendszerben írták a számokat. Számjeleik:

| = 1, || = 2, ..., = 9,

— = 10, = = 20, ..., = 90,

○ = 100, ..., = 1000, ..., = 10 000.

Az összeget jelentő szavukat így írták le:

= da-so vagy = da-sa.

Az agyagtáblákon csak összesítések szerepelnek, ezekből tehát nem tűnik ki, hogy használták-e a szorzást és az osztást. Talán a számolás megkönnyítésére szolgált, hogy például az adókivetésnél mindig kerek számok szerepelnek (50,100,150,200,250, 300). Az egyik táblán például ez áll: „28 kos, 22 anyajuh; hiány 50.” A kivetett adó tehát 100 juh volt.

A táblák szövegei alapján azt kell hinnünk, hogy nem ismerték a pénzt. Súly-, illetve tömegmértékegységeik azonban voltak. Ezeknek a nagyságára csak bizonytalanul következtethetünk részben a használt edények űrtartalmából, részben pedig az élelmiszeradagok mennyiségéből. A következő tömegmértékegységeknek csak a jeleit ismerjük:

Tudjuk, hogy a

ideogrammák a száraz anyagok tömegmértékegységeit jelölték, és

ezek megfelelői a folyadékoknál:

E mértékegységeknek a különböző becslések alapján kialakult valószínű nagyságrendje:

= 0,4 l,
= 8 = 3,2 l,
= 1,5 = 12 = 4,8 l.

A krétai, illetve a mükénéi kultúrák hirtelen pusztulása után, kb. az i. e. 1000. évtől a görögöknek mindent elölről kellett kezdeniük. Csak az i. e. VIII. századra alakult ki az új görög írás, a föníciai írás alapján. Ez az oka, hogy a közbeeső időszakról szinte semmit sem tudunk.

Az i. e. VIII. században Görögország területén már nagyjából békés viszonyok uralkodtak. Nem szabad azonban egységes irányítás alatt álló országra gondolnunk. A görög nép akkor és még azután is sokáig kisebb-nagyobb városállamokban, poliszokban élt. Kezdetben ezek az államok monarchikus jellegűek voltak, de a VIII. században a kormányzást az arisztokraták (hoi arisztoi = a kiválóak) gyakorolták a kiváltságok nélküli, de szabad parasztok, kézművesek és kereskedők fölött.

Az i. e. VII-V. században az arisztokrácia uralmát a legfejlettebb görög államokban felváltotta a szabad polgárságnak, a démosznak az uralma. A démoszon belül a legteljesebb demokrácia valósult meg, amely azonban a rabszolgamunkára épült. Ebben az időben a civilizáció és a kultúra területén Athén volt a legkiemelkedőbb görög város. Ugyanakkor katonai ereje miatt veszedelmes versenytársa lett Spárta, igaz, hogy nem a kultúra vonalán. A két egymással vetélkedő város, ha nem is mindig a legnagyobb egyetértésben, egyesíteni tudta erőit az V. században lefolyt, perzsák elleni háborúban. A győztes marathoni és szalamiszi csaták után Athén lett a vezető görög város. I. e. 478-ban létrehozta a perzsák elleni háború folytatására a déloszi szövetséget, amely sikerrel vehette fel a versenyt a Spárta körül i. e. 530 táján kialakult

peloponnészoszi szövetséggel is.

Az i. e. V. század Athén életében káprázatos fejlődést hozott nem csupán gazdasági vonalon, hanem a tudományok és a művészetek területén is. Az a korszak, amely a perzsák visszaverésétől (i. e. 478) a peloponnészoszi háborúig (i. e. 431) terjed, a görög történelem ún. klasszikus korszaka, a rabszolgákat leszámítva, igen széles népréteg számára biztosította a politikai szabadságot és a szellemi alkotás lehetőségét. Ekkor épült az athéni Akropoliszon az Erekhtheion, Athéné istennő szentélye. Ekkor készítette szobrait PRAXITELÉSZ és PHEIDIASZ. Ekkor írta tragédiáit AISZKHÜLOSZ, EURIPIDÉSZ, SZOPHOKLÉSZ, vígjátékait ARISZTOPHANÉSZ és ódáit PINDAROSZ. Ekkor díszítette Athént festményeivel POLÜGNÓTOSZ. Ekkor tanította a filozófiát SZÓKRATÉSZ, PLATÓN mestere. Ekkor élt a peloponnészoszi háború történetírója: THUKÜDIDÉSZ. Ekkor ismerte fel a világ anyagi egységét ANAXAGORASZ. Ekkor fogalmazta meg DÉMOKRITOSZ az atomelméletet. Ekkor rakták le a természettudományok és a mai értelemben vett matematika alapjait.

Ez a csodálatos korszak fejeződött be a peloponnészoszi háborúval (i. e. 431-404). A testvérháború felőrölte a poliszok erejét, úgyhogy II. FÜLÖPnek, a makedón hódítónak i. e. 338-ban már nem tudtak ellenállni. A khaironeai csata végleg megtörte a görög városok erejét, és a poliszok elvesztették függetlenségüket. II. FÜLÖP megteremtette az egységes Görögországot.

Az Égei-tenger partvidékét és szigeteit benépesítő görög népnek merőben más földrajzi adottságokhoz kellett alkalmazkodnia, mint az egyiptomi vagy a mezopotámiai embereknek. A zömében terméketlen területen nem lehetett földművelésre alapozni az életet. Az ország félszigeti-szigeti jellege, a zegzugos, szaggatott tengerpart mindenütt a tenger közelségét tudatosította. A tenger pedig nagy csábító, különösen akkor, ha a szárazföld nem nyújt elég élelmet. A görög kereskedők hamarosan hajóra szálltak, és a kialakult tengeri kereskedelembe egy kis kalózkodás is belefért. ODÜSSZEUSZ, az agyafúrt görög harcos, kalandos utazásaival szinte jelképe lehetne a mozgékony, élénk eszű, a magát minden helyzetben feltaláló ókori görög embernek. Az ókori görög kereskedők kapcsolata Mezopotámiával és Egyiptommal köztudott.

Ezek a nyitott szemű emberek nemcsak az árucserét bonyolították le, hanem külföldi tapasztalatokkal, ismeretekkel is gazdagították az ottani kultúrát. Nem véletlen, hogy az első ismert görög tudósok közt nemritkán találunk kereskedőket.

A görögországi életmód nem földhöz kötött, mint Egyiptomban és Mezopotámiában vagy - mint látni fogjuk - Kínában, hanem mozgékony és szabad volt. A görögök, a földet művelő népek statikus életvitelével szemben a dinamikus életstílust képviselték. Ez pedig a görög gondolkozásban, a görög szellemben is megmutatkozott. Babilon és Egyiptom tudománya, főleg az utóbbié, megelégedett annyival, hogy felelni tudott a mindennapi élet „hogyan” kérdéseire, és hogy a gyakorlatban jól használható recepteket adott. A tanulékony görögök kezdetben sok ilyen receptet átvettek, de ők már feltették a „miért” kérdést is. Meg akarták érteni a világot amelyben éltek, a világ jelenségeit, és nem utolsósorban önmagukat, az embert. Az importált ismereteket elgörögösítették, saját szempontjaik szerint dolgozták fel és fejlesztették tovább. A babiloni és az egyiptomi gondolkodás szinte óvakodott az egyénitől, nem mert eltérni a szokványostól, nem újított, hanem csak átvette, megtanulta a készen kapott eljárásokat. A görög szellemben az egyéni, a szabad, az újat kereső, a felfedezni vágyó törekvések uralkodtak. Az első archaikus görög szobrokat még össze lehet téveszteni az egyiptomi merev, a hagyományos törvényektől és stílustól éltérni nem merészelő szobrokkal. Nem kellett azonban sok évnek eltelnie ahhoz, hogy a görög kézben felszabaduljon a képzőművészet, és ne minden műben ugyanazt az eszmét, az örökkévalóság vágyát mintázza meg, hanem a mindig változó, mozgó, hajlékony, élő embert.

Valahogy így lehettek a matematikával is. Bizonyára sokat tanultak kezdetben az egyiptomiaktól és a babiloniaktól is, de csakhamar már alig lehetett ráismerni arra, amit átvettek, legalábbis az első ránk maradt görög matematikai emlékekben már nem lehet felismerni az egyiptomi vagy babiloni alapokat. A görög matematika bizonyítási igénye és igényessége, sajátos, az élettől már jobbára elszakadt tárgya, valamint a matematika módszere szinte készen pattant elő az ismeretlenből, de éppen ez a fejlettség és a további fejlődés lendülete mutatja, hogy kellett lenniük előzményeknek. A görög matematikának ezt a kezdeti, átmeneti

szakaszát nem ismerjük. Thalész azért lett a görög matematika atyja, mert ő az első görög matematikus, akiről tudunk.

AZ ÓGÖRÖG SZÁMÍRÁS ÉS SZÁMOLÁS

Amint az előző fejezetben láttuk, az ősgörögök számaikat a nem helyi értékes 10-es számrendszerben írták („lineáris B").
Ugyanezt mondhatjuk a későbbi, az i. e. IX-VIII. században kialakult görög számírásról és az i. e. V. század táján bevezetett ión alfabetikus számírásról is. A régebbi, az ún. attikai számírás jelei:

I = 1, Γ = 5, Δ = 10, H = 100, X = 1000, M = 10 000.

E jelek az 1 kivételével a megfelelő számnév első betűi. Az 5 jele kezdetben a Π (pi) volt, a penta szó kezdő betűje. Ugyanígy a Δ a deka szónak, H a hekatonnak, X a khiliasznak és M a müriasznak az első betűje. A 100 jelénél talán feltűnő, hogy a H jel a görög nagy éta (é) betű, azonban a ma étát jelentő H jel régen a görög nyelvből már korán kiveszett gyenge h hangnak a jele volt. Amikor az idézett számjelek keletkeztek, akkor még a hekaton szót HEKATON-nak írták, és csak jóval később lett: ‘EKATON. A felsorolt jelekkel például:

43 224 = MMMMXXXHHΔΔIIII.

Azért, hogy az 5 egységen felüli számjeleknél ne legyen túl sok ismétlés, bevezették még a

𐅄 = 50, 𐅅 = 500, 𐅆 = 5000 és 𐅇 = 50 000

jeleket. Ezek felhasználásával például:

65 783 = 𐅇M𐅆𐅅HH𐅄ΔΔIII

Ezt a számírást különösen dátumok megjelölésére még i. e. 100 körül is használták - mint ahogy ma is használjuk a római számjeleket a hónapok jelölésénél -, bár az ión betűk elterjedésével

már az i. e. V. század előtt megszületett egy ún. alfabetikus számírás. Amint az elnevezés is mutatja, a számjeleket az ábécé betűi szolgáltatták. A görög ábécé első 9 betűje jelentette a számokat 1-től 9-ig. A következő 9 betűvel írták le a tízeseket 10-től 90-ig. A további 9 betűvel a százasokat jelölték 100-tól 900-ig. Mivel azonban az ión ábécében csak 24 betű volt, azért kiegészítették három régi betűvel.

Ez a három betű a

F

(neve: vau vagy digamma, vagy sztigma), a

ϙ

(neve: koppa) és a

ϡ

(neve: szampi). Kezdetben tehát, amikor a görögök csak nagybetűkkel írtak, a számok jelei:

Α,	Β,	Γ,	Δ,	Ε,	F,	Ζ,	Η,	Θ,
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ι,	Κ,	Λ,	Μ,	Ν,	Ξ,	Ο,	Π,	ϙ,
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ,	Σ,	Τ,	Υ,	Φ,	Χ,	Ψ,	Ω,	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Amikor pedig az ión írás kisbetűit is bevezették, akkor:

α,	β,	γ,	δ,	ε,	ς,	ζ,	η,	ϑ,
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι,	ϰ,	λ,	μ,	ν,	ξ,	ο,	π,	ς,
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ,	σ,	τ,	υ,	φ,	χ,	ψ,	ω,	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Az ezresek számát ugyanezekkel a betűkkel jelölték, de a betű elé

vesszőt tettek:

$,\alpha=1000$, $,\beta=2000$, $,\gamma=3000$ stb.

Azért, hogy a számokat a szavaktól megkülönböztessék, a számokat jelentő betűcsoportokat felülhúzták, tehát például:

$$576=\overline{\varphi\xi\zeta} \quad \text{vagy} \quad 5342=\overline{,\varepsilon\tau\mu\beta}.$$

A 10 000 számára megmaradt az M jel, és a tízezresek számát az M fölött jelölték, például

$$50\,000=\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}} \quad \text{vagy} \quad 340\,000=\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}.$$

Ilyen módon:

$$576\,338=\overset{\nu\zeta}{\mathrm{M}}\overline{,\zeta\tau\lambda\eta}.$$

Ha a leírandó számban nagyon sok tízezres volt, akkor ezek számát írhatták az M után is, de ettől a szám többi részét ponttal választották el, így:

$$55\,552\,315=\mathrm{M}\overline{,\varepsilon\varphi\nu\varepsilon\cdot,\beta\tau\iota\varepsilon}.$$

A müriádokat, azaz a tízezreseket olykor két ponttal is jelölték, például:

$$\ddot{\pi}\,\ddot{\beta}=820\,000.$$

Elképzelhető, hogy az ilyen, alfabetikus számírás mellett (amilyenekkel találkozunk az ókori zsidóknál, az ószlávoknál és az örményeknél is) a számolás nehézkes volt.

A szorzást például úgy végezték el, hogy az összeszorzandó két számot felbontották egyesek, tízesek, százasok stb. összegére, és a többtagúak szorzási szabálya szerint, a szorzandó minden tagját megszorozták a szorzó minden tagjával, végül az így nyert részletszorzatokat összegezték. Tehát például a 642 • 536 szorzásnál

a következőképpen jártak el:

$$\begin{aligned}
600 \cdot 500 &= 300\,000 \\
600 \cdot 30 &= 18\,000 \\
600 \cdot 6 &= 3\,600 \\
40 \cdot 500 &= 20\,000 \\
40 \cdot 30 &= 1\,200 \\
40 \cdot 6 &= 240 \\
2 \cdot 500 &= 1\,000 \\
2 \cdot 30 &= 60 \\
2 \cdot 6 &= 12 \\
\hline
\text{összesen:} &\ 344\,112,
\end{aligned}$$

persze mindezt görög, alfabetikus számírással. E mellett az ún. görög szorzás mellett használták az egyiptomiaktól átvett és egyiptomi szorzásnak nevezett kettőzés módszerét is.

Az írásban végzett műveleteket nehezítette az is, hogy abban a korban a papír, illetve a papirusz nehezen hozzáférhető, drága eszköz volt. Ezért terjedt el az abakusszal, a számolótáblával való számolás. Az abakusz lényegében párhuzamos, egyenes sorokkal (árkokkal) ellátott tábla volt. A párhuzamos sorok közül a legalsó az egyesek, a következő a tízesek, az azutáni a százasok stb. helyét jelölte ki. E párhuzamos rovátkákba kavicsokat, kis korongokat lehetett helyezni. Így például az alulról számított második sorba helyezett 3 kavics jelentette a 30-at. Az alapelv tehát ugyanaz volt, mint a ma is még sok helyen (Szovjetunió, Kína) használatos golyós számológépek elve. Az abakuszon a rovátka helye határozta meg ugyanannak a kavicsnak (pszéphosznak) az értékét, tehát az abakusz lehetővé tette, hogy a nem helyi értékes 10-es számrendszerbeli számírással kijelölt számolási műveletet helyi értékes 10-es számrendszerű számolással lehessen végrehajtani. Az abakuszon valamely szám kirakása egyenértékű a szám helyi értékes felírásával. Az abakusznak másik nagy előnye volt még, hogy az írástudatlanok is tudtak vele számolni. Ezen előnyei miatt

lett az abakusszal való számolás hosszú életű. Még a XIV-XV. században is széltében-hosszában használták.

Érdekes a „görög törtek” története. Az i. e. VI-V. század előtti időkben kialakult a görögöknél is a törtfogalom, nagyjából a mai törtfogalomnak megfelelően. Az egységszámlálójú törtek írásához

a megfelelő egész számot használták. Így például az 1/4-et a 4 segítségével jelölték : $\delta = 4$, $\delta' = 1/4$. A közönséges törtek írásánál kezdetben a nevező alá írták a számlálót, de törtvonal nélkül: $2/3 = \gamma/\beta$. Később azonban, valószínűleg indiai hatásra, helyet cserélt a nevező a számlálóval: $2/3 = \beta/\gamma$.

A fentebb jelzett érdekesség a „görög törteknél” az, hogy a görög matematikában PÜTHAGORASztól ARKHIMÉDÉSZig elkerülték a törteket, tagadták létezésüket, annak ellenére, hogy a gyakorlati életben használták azokat. Ennek filozófiai okai vannak. Amint majd látni fogjuk a püthagoreusi számmisztikában: az 1 az oszthatatlan, a részekre nem bontható istenséget, illetőleg a világ egységét jelképezte. A matematikusok absztrakt 1 fogalma azonosult a kortárs eleai filozófiának „a létező” fogalmával, amely az eleai iskola tanítása szerint egységes és oszthatatlan. Az erre a mintára kialakított matematikai egység fogalma nem fért össze az oszthatóság, a feldarabolhatóság fogalmával, tehát a törtszámok létezésével sem, hiszen „a szám az egységek halmaza”. Ez az oka annak, hogy a Püthagorasz utáni görög matematikusok a tört fogalmát helyettesítették az arány fogalmával: a két szám (a görögöknél a szám azonos a mi természetes számunkkal) arányával. Az 1-et kezdetben nem is tekintették számnak, hiszen az egységekből összetevődő szám osztható, de az 1 definíció szerint nem.

ARKHIMÉDÉSZ azonban már szakított ezzel a filozófiai megalapozású egységfogalommal, és szabadon használta a közönséges törteket úgy, ahogy a nem matematikus, „közönséges” emberek. Nagyjából úgy számoltak a törtekkel, mint mi.

Ugyancsak érdekesség, hogy a görög nem helyi értékes számírással párhuzamosan a görög csillagászok (például PTOLEMAIOSZ is) igen jól számoltak a babiloni 60-as helyi értékes számrendszerben, és

ezen belül a hatvanados törtekkel is. Ennek fő oka az, hogy a mezopotámiai csillagászati eredmények alapozták meg a görög csillagászatot. A babiloni csillagászati táblázatok és megfigyelési eredmények pedig 60-as helyi értékes számrendszerben íródtak. A görög csillagászok a babiloni számrendszerű számokat a görög számjelekkel írták át, például:

$$235^\circ\ 42'\ 38'' = \beta\lambda\varepsilon^\circ\ \mu\beta'\ \lambda\eta''.$$

A görög számírással kapcsolatban meg kell említenünk egy nagyon lényeges „semmiséget”. A görög csillagászok (talán PTOLEMAIOSZ) éppen a babiloni helyi értékes 60-as számrendszerű írást tökéletesítették a zérus számjegy bevezetésével. Az üres helyi értékeket az (uden) = semmi szó kezdőbetűjével az o (omikron) betűvel töltötték ki. Ez fontos hozzájárulás volt a későbbi hindu, helyi értékes 10-es számrendszerű írás kifejlődéséhez.

Mai ésszel talán csodálkozunk, hogy a görögök ismerték a 10-es számrendszert, ismerték a helyi érték fogalmát, feltalálták a nullát, tehát minden készen volt náluk a helyi értékes 10-es számrendszerű számírás bevezetéséhez, és ezt a dicsőséget mégis átengedték a későbbi hindu matematikusoknak. A meggyökeresedett szokásokat nehéz elhagyni!

A GÖRÖG MATEMATIKA ALAPJAINAK A LERAKÁSA

THALÉSZ (i. e. 6247-548?)

A milétoszi THALÉSZ : az első, mindenben az első. A hét görög bölcs között ő az első, ő az első természetfilozófus, az első fizikus, az első csillagász és az első matematikus. Ő az első ismert görög tudós.

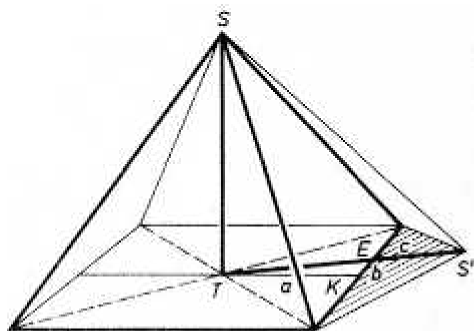
Bizonyára nem véletlen, hogy az első görög tudósok zömmel a kis-ázsiai görög gyarmatok szülöttei. Ezekhez a gyarmatvárosokhoz, telepekhez földrajzilag közel volt az ősi babiloni kultúra. A görög kereskedők messze keletre eljutottak. Semmi csodálatos nincs abban, hogy a kis-ázsiai partvidék városai, szigetei többé-kevésbé a mezopotámiai civilizáció hatása alá kerültek. Ugyanígy lehetett Szicíliában is, ahol az egyiptomi befolyás érvényesülhetett. Mivel az első görög gyarmatosítók a

görögség ión törzséből kerültek ki, azért az általuk elindított görög kulturális fejlődés első korszakát, amely időben nagyjából az i. e. VI. századot jelenti, ióniai korszaknak szokás nevezni.

Ennek az időszaknak volt első képviselőjeTHALÉsz, aki a kisázsiai Milétoszban született. Családja valószínűleg Boiótiából költözött ide. Apja neve EXAMÜNASZ, anyjáé pedig KLEOBULINÉ volt. Az athéni SZOLÓN és a gazdagságáról híres KROISZOSZ lüd király idejében élt. Születésének és halálának éve bizonytalan. A címben feltüntetett adatokra abból következtetnek, hogy megjósolt egy, az i. e. 585 május 28-án bekövetkezett napfogyatkozást. Ez volt az az égi jelenség, amely békekötésre késztette a médeket, amikor Ninive feldúlása után (i. e. 612) tovább akartak terjeszkedni nyugat felé. Midőn elérték a Halüsz folyót, ALÜATTÉSZ lüd király ión zsoldosainak az élén felvette velük a harcot. Ezt a csatát azonban félbeszakította az említett napfogyatkozás, amelytől a katonák annyira megijedtek, hogy a küzdelmet beszüntették. A THALÉSZ által megjósolt és a harcoló feleket megbékéltető napfogyatkozás időpontja segített abban, hogy az ókori görög történelemben a mai időszámítás szerint tudjunk tájékozódni. THALÉSZ csillagászati felkészültsége tette lehetővé a görög naptár reformját is, amelyet az ő megfigyelései és útmutatásai alapján egyik tanítványa hajtott végre.

Az a tény, hogy THALÉSZ képes volt egy napfogyatkozás megjövendölésére, mutatja, hogy ismernie kellett a több száz éves babiloni csillagászati megfigyeléseket. THALÉSZ egyébként kereskedő volt. Ilyen minőségében beutazta az akkor ismert művelt világot Mezopotámiától Egyiptomig. Utazásai alatt sokat tanult. Az emberi életre ható, az életet formáló minden jelenség érdekelte. Ő volt az első, aki hitelesen számolt be hazájában az egyiptomi tudományról. Az egyik, DIOGENÉSZ LAERTIOSZtól (i. sz. III. század) eredő legenda szerint az egyiptomi papok csodálatát vívta ki azzal az egyszerű módszerrel, amellyel egy piramis magasságát meghatározta. Leszúrt egy botot a földbe, és amikor annak árnyéka éppen egyenlő volt a bot hosszával, akkor megmérte a piramis [magasságának az] árnyékát, amely ekkor éppen megegyezett a piramis magasságával. Persze az ilyen legendákat nem lehet készpénznek venni. Ha elképzeljük, ha megrajzoljuk a piramist és az árnyékát, akkor beláthatjuk, hogy nem is olyan egyszerű a

magasságának az árnyékát meghatározni. A megfelelő mérési adatok alapján a Pitagorasz-tétel teszi lehetővé a feladat megoldását *(10. ábra)*. Ha tehát a történet igaz, akkor még inkább csodálhatjuk THALÉSZ feladatmegoldó képességeit. A piramis árnyékában - a megfelelő iránymeghatározás után - közvetlenül az *ES'* és az *EK* szakaszok hosszát célszerű megmérni. Mérhető még a gúla alapélének a fele: *TK* is. Jelöljük a mérési adatokat rendre: *TK-t* a-val, *EK-t* b-vel



10. ábra

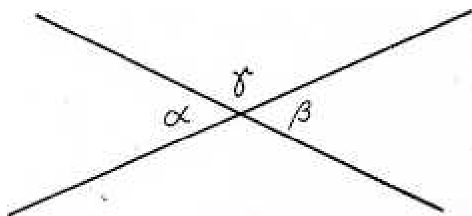
és *ES'-1* c-vel. Így a *TKE* derékszögű háromszögből: *TE* = *gyök*(a^2 + b^2). Ekkor:

$$TS' = \sqrt{a^2 + b^2} + c.$$

A mérendő *m* magasság abban a pillanatban, amikor a leszúrt bot árnyéka olyan hosszú, mint a bot:

$$m = c + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

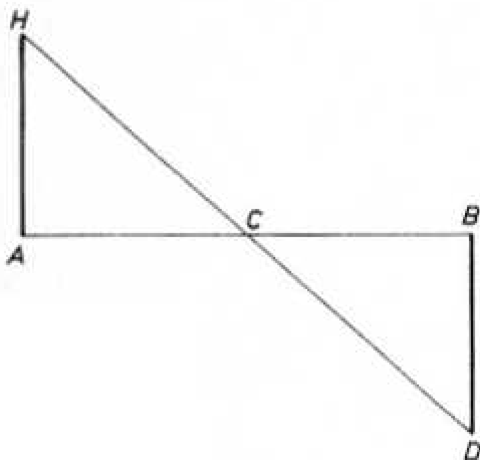
A Pitagorasz-tétel csak akkor kerülhető el, ha THALÉSZ egy olyan helyzetet fog ki, amelynél a piramis magasságának a vetülete éppen merőleges az egyik alapélre.



11. ábra

PROKLOSZ (410-485) görög matematikus állítja EUDÉMOSZ (i. e. 335 táján) elveszett matematikatörténetének kivonatában, hogy THALÉSZ elsőként bizonyított be több geometriai tételt. E szerint ismerte a szög fogalmát, igazolta, hogy a csúcsszögek egyenlők, hogy az átmérő a kört felezi, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek egyenlők. Ezekben az a csodálatos és előremutató, hogy igen fejlett bizonyítási igényről tesznek bizonyságot. Sem az egyiptomi, sem a babiloni matematikában nyomát sem találjuk a bizonyításnak. Matematikusaik megelégedtek jól bevált tapasztalati eljárásokkal, de nem ismerünk a tőlük származó emlékekből egyet sem, amely a gyakorlati ismeretekkel szemben kételyt fejezne ki vagy eredetüket, okukat keresné. A matematikatörténet első olyan ismert alakja, aki bizonyít: THALÉSZ. Bizonyít pedig olyan szemléletes tételeket, mint amilyeneket felsoroltunk. Mintha az eleai filozófia figyelmeztetésére hallgatna: Vigyázz, az érzékek megcsalnak! Persze ezt nehéz állítani, hiszen az eleai filozófiai iskola megalapítója, PARMENIDÉSZ i. e. 480 körül fejtette ki tanait, tehát THALÉSZ halálának valószínű ideje után 60-70 évvel.

Az is igaz, hogy az eleai iskola első ismert képviselője, XENOPHANÉSZ i. e. 540 táján működött, de ő még igen bizonytalanul, homályosan és ellentmondásosan képviselte az eleai tanokat. Az sem valószínű, hogy a bizonyítási igény ilyen magas fokának, a szemlélettől való ennyire tudatos elfordulásnak ne lettek volna előzményei. Kellett, hogy THALÉSZ előtt legyen egy még nem ismert fejlődési szakasz, amelynek eredményeit THALÉSZ munkájában szemlélhetjük. Kellett, hogy legyen egy kor, amely a tapasztalati eredmények elfogadásától elvezetett a bizonyítás szükségességéhez.



12. ábra

Az előbbieknél kevésbé szemléletes tételek bizonyítása is kapcsolódik THALÉSZ nevéhez. Ő mutatta meg - ugyancsak PROKLOSZ szerint -, hogy két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldalban és a rajta levő két szögben. Az I. századbeli PAMPHILOSZ tanúsága szerint THALÉSZ mondta ki először, hogy a félkörben az átmérő fölé rajzolt kerületi szög derékszög. A francia iskolákban Thalész-tételként tanítják azt, amely szerint ha egy háromszöget valamelyik oldalával párhuzamos egyenessel metszünk, akkor e párhuzamos a másik két oldal egyenesével az eredeti háromszöghöz hasonló háromszöget határoz meg.

Említésre méltó még THALÉSZnak az az eljárása, amellyel a tengeren úszó hajónak a parttól való távolságát határozta meg. A 12. ábra szerinti jelöléssel: Kimérte a parton a tetszőleges, de az AH-ra merőleges AB távolságot. Erre a B pontban merőlegest állított, és ezt elmetszette a HC egyenessel, ahol C az AB szakasz felezőpontja. Az így nyert BD távolság éppen a meghatározandó AH távolsággal egyenlő. A bizonyítás éppen a THALÉsznak tulajdonított egybevágósági tételen alapul. Egy másik gyakorlati tanácsa az volt a hajósok számára, hogy ne a Nagy Medve csillagkép alapján tájékozódjanak, hanem úgy, mint a föníciai hajósok: a Kis Medvéhez igazodjanak.

THALÉSZ matematikai, illetve geometriai munkásságát összefoglalva

: Biztosnak látszik, hogy THALÉSZ, a „matematika atyja”, jelképe nemcsak az új görög matematikai korszak kezdetének, hanem egy előző korszak lezárulásának is. Ő a fejlődésnek azt a határkövét jelenti, amely elválasztja a szemléletre alapozott tapasztalati geometriát az érzékekre már nem támaszkodó, logikai bizonyítást igénylő geometriától. Ezzel kapcsolatos és kétségkívül thalészi érdem az absztrakció, amellyel a konkrét tárgytól elvonatkoztatta a geometriai testet, a csak elgondolt testet csak elgondolt lapjaival, éleivel, csúcsaival.

Érdekességként említhetünk meg néhány valóban csak legendaszerű, THALÉsszal kapcsolatos történetet. Plutarkhosz mondja el, hogy Thalész egy esti sétája alkalmával az eget kémlelve egy gödörbe esett, és felesége így pirongatta: Az eget vizsgálod, pedig a lábad előtti árkot sem veszed észre. Úgy látszik, a feleség előtt THALÉSZ nem a hét bölcs egyike volt. Más elbeszélések viszont nagyon is gyakorlati embernek mutatják : jó kereskedőnek. Gúnyolták volna azért, hogy a tudománnyal nem lehet vagyont keresni. Erre ő a csillagokból kiolvasta a következő évi időjárást, és arra következtetett, hogy gazdag olajtermés várható. Kibérelte tehát a következő esztendőre a környék olajpréseit, és így a bő termő évben ő diktálhatta az olajárakat, amivel jókora vagyonra tett szert. Az elbeszélés azonban megjegyzi, hogy bölcshöz és becsületes emberhez méltóan ekkor sem élt vissza monopolhelyzetével, hanem méltányos olajárakat állapított meg.

Sóval is kereskedett - meséli egy másik történet -, és a sószsákokat szamarak hátán szállította. Történt, hogy egy patak mellett haladva az egyik szamár a meleg elől a vízbe menekült, és miután magát lehűtötte, azt is észrevette, hogy zsákja jócskán megkönnyebbedett. Ezt a megfigyelést az okos szamár máskor is hasznosította, és a patak mellett THALÉSZT mindig jelentős veszteség érte. Végül azt találta ki, hogy ennek a csökönyösen fürdőző csacsinak a hátára spongyával teli zsákot rakott, amelynek súlya a fürdés után tetemesen megnőtt. A szamár ezt tapasztalva többet nem ment be a patakba, még a sószsákkal sem. Így járt túl a ravasz THALÉSZ - egy szamár eszén.

E történetkék meseszerűek, de mutatják, hogy THALÉSZ a maga korában és azután is népszerű ember lehetett. A sikeres

kereskedelmi tevékenységtől korán visszavonult, és idejét főleg a matematikának, a filozófiának és az állam ügyeinek szentelte. Mint filozófust a naiv materialisták közé számítják. Természetfilozófiai alaptétele az volt, hogy minden a vízből keletkezett. Bizonyára a víznél jól tapasztalható halmazállapot-változásokban látta a magyarázatát a különböző sűrűségű anyagok keletkezésének. A „minden víz" igazságát látszott az is alátámasztani, hogy az élőlények víz nélkül nem élhetnek. Ez a thalészi filozófia az ő korában határozottan mitológiaellenes volt, bár meg kell jegyeznünk, hogy THALÉSZ hitt a lélek létezésében is. A mágnes vonzását is a mágnes lelkének tulajdonította.

A közügyek intézéséből is kivette a részét. Tanácsaira hallgattak. Az, hogy a hét görög bölcs közé számították (kortársával, az athéni SzoLÓNnal együtt), mutatja, hogy tisztelet övezte. Kedvenc politikai terve volt, hogy létrehozza az ión városok erős szövetségét Teósz fővárossal.

Írásos emléket nem hagyott hátra. Filozófiai tanait továbbfejlesztette és írásba foglalta neves tanítványa, ANAXIMANDROSZ (i. e. 610-547). Könyve azonban, amely az első görög prózai írásműnek számít, sajnálatosan elveszett. Sokan feltételezik, hogy PÜTHAGORASZ is THALÉSZ tanítványa volt. Állítólag PÜTHAGORASZ THALÉSZ tanácsára utazott Egyiptomba, hogy az ottani tudománnyal megismerkedjék. THALÉSZ i. e. 548 táján halt meg, az olimpiai játékok nézése közben.

PÜTHAGORASZ, A PÜTHAGOREUSOK

Az i. e. VI. században megkezdődött a Perzsa Birodalom terjeszkedése nyugat felé is. A kis-ázsiai görög gyarmatok is veszélybe kerültek. Nem csoda, hogy amikor a lüdek királya, KROISZOSZ megkérdezte a delphoi jósdát, hogy megtámadja-e a perzsákat, akkor olyan választ kapott, amelyet biztatásnak is vehetett. „Ha átléped a Halüsz folyót - a két ország közös határát -, akkor egy nagy birodalmat fogsz megdönteni" - szólt a jövendölés. Kroiszoszt azonban megverte KÜROSZ, a perzsa hódító. Utólag a jósda védekezhetett ugyan azzal, hogy KROISZOSZ valóban megdöntött egy nagy birodalmat, ti. a sajátját, KÜROSZ azonban a lüdeket támogató görög gyarmatvárosokra hatalmas hadisarcot vetett ki. Emiatt a perzsa uralom alá került görögök közül aki csak

tehette, igyekezett elvándorolni. Ekkor hagyta ott Phókeát az a görög csoport, amely az itáliai Elea városkát alapította, és ebben az idő'ben érkezett Itáliába PÜTHAGORASZ is, aki tanítványaival az akkori egyik dór gyarmaton, Krotónban telepedett le.

Az i. e. VI. században működő Püthagorasz filozófus és matematikus volt, akit mondhatunk fizikusnak, csillagásznak és mágusnak, vagy akár vallásalapítónak is. A legendák ködébe burkolt életéről alig tudunk valami biztosat. Ezeket a halála után keletkezett mendemondákat távolról sem kell készpénznek venni, mégis érdekes és talán érdemes is elmesélni némelyiket, mert valamennyire jellemzők lehetnek PÜTHAGORASZra és egyben tanítványaira, a püthagoreusokra.

Püthagorasz a Milétoszhoz közeli Szamosz szigetén született, állítólag Pherekküdész filozófus tanítványa volt, aki egy mitológiai kozmogóniát írt. Lehet, hogy Thalész is tanította, és az ő tanácsára utazott Egyiptomba, hogy megismerje a tudományok gyökereit. Ezután történhetett, hogy szülőföldjére visszatérve tanítani kezdett, bár úgy mondják, első tanítványainak ő maga fizetett, hogy meghallgassák. Az újpüthagoreus Jamblikhosz (i. sz. 300 körül) szerint perzsa hadifogolyként 7 évet töltött Babilóniában, ahol megismerkedett a kaldeusok vallásával, filozófiájával, zenéjével és csillagászatával. Talán még Indiába is elkerült. Mindenesetre az i. e. VI. századi Kelet filozófiai és vallási tanai nagy hatással lehettek a fiatal bölcselőre, és ugyanúgy a keleti, sokszor misztikus, mágikus színezetű számtudomány is. Hazájába visszatérve egy vallásos jellegű, politikai célokért is küzdő, ugyanakkor a matematikai tudományokkal (aritmetika, geometria, zene, csillagászat) is foglalkozó, félig-meddig titkos társulatot alapított, amelynek azonban Szamosz szigetéről el kellett távoznia, mert összeütközésbe került az ott uralkodó POLÜKRATÉSZ türannosszal. PÜTHAGORASZ Dél-Itáliába menekült, Krotónba, második hazájába. Itt a püthagoreusoknak kezdetben nagy tekintélyük volt, sőt valamelyes politikai befolyással is rendelkezhettek. Ilyesmit tükröz az a monda, amely szerint Krotón i. e. 511-ben PÜTHAGORASZ segítségével győzte le ellenségét, a szomszédos Szübariszt. A történet elmeséli, hogy Szübarisz lovassága nemcsak félelmetes volt, hanem arról is híres, hogy fuvolazenére minden ló ágaskodva, gyönyörűségesen táncolt.

PÜTHAGORASZ tanácsára a krotóni kémek megtanulták a lovakat táncoltató zenét, és erre Krotónban betanítottak egy egész zenekart. Amikor aztán a szübariszi lovasság támadásba lendült, megszólalt a krotóni zenekar, és a táncoló lovakat a krotóni harcosok könnyűszerrel leöldösték. Tény, hogy Krotón i. e. 511-ben valóban elfoglalta Szübariszt, bár nem valószínű, hogy a harcban a krotóni fuvolazenekar mérte ellenfelére a döntő csapást.

A hagyományok szerint PÜTHAGORASZ előadásai Krotónban nagy sikert arattak, olyannyira, hogy az illemmel nem törődve, még női hallgatói is voltak. Ezek között volt házigazdájának, Milónak szép leánya, THEANO is, aki PÜTHAGORASZ felesége lett. THEANO írta meg a krotóni filozófus első életrajzát, amely valószínűleg hiteles forrás lehetne, de sajnálatosan elveszett. PÜTHAGORASZ maga semmit nem írt le tanításaiból és esetleges felfedezéseiből. Tanai, tudományos eredményei elválaszthatatlanul összekeveredtek tanítványai munkáival. Ezért legtöbbször közelebb járunk az igazsághoz, ha a püthagoreusokra gondolunk akkor is, amikor csak éppen magát PÜTHAGORASZt emlegetjük.

Tudomásunk szerint a püthagoreusok hittek a lélekvándorlásban, vegetáriánusok voltak, és állítólag hosszú hajat és fehér gyapjúköntöst viseltek. A szövetség tagjainak, hogy felvételt nyerjenek, előbb szigorúan előírt életmóddal és zenével meg kellett lelküket tisztítaniuk. Az így felkészült jelöltek különböző próbák után léphettek a szövetség tagjainak a sorába. Ekkor avatták be őket a számok és a harmónia misztériumába. A számok tudományának a művelése és a harmóniatanban való elmélyedés biztosította számukra az örök igazságok megismerését és az istenséghez való felemelkedést. Bármilyen furcsán hangzik: a püthagoreusoknál a matematikával való foglalkozás vallásos tevékenység volt, amely kiegészítette az életmódbeli előírásokat. Hittek abban, hogy egy isten van, aki a világot a számok közötti kapcsolatoknak, törvényeknek megfelelően teremtette. Amiként sok szám van ugyan, de mindegyiknek forrása az „egység”, ugyanúgy a világ sokféle dolgának egyetlen eredete és egységbe foglalója az Isten. A sokféle dolog és jelenség között az isteni harmónia teremt rendet, az foglalja a mindenséget egységbe, és ez a harmónia ugyanaz, ami a számok tudományában és a zenében is fellelhető. Az ember igazi hivatása ennek a boldogságot biztosító harmóniának a megismerése,

amelyhez legeredményesebben a matematika művelése segíti hozzá. A matematikában, amely az aritmetikát, a geometriát, a csillagászatot és a zenét egyesíti, fellelhetők az örök törvények. Ezek biztosítják az ember számára az örökkévaló Istenhez hasonulást, a lélekvándorlástól való megszabadulást, az annyira áhított örök életet. PÜTHAGORASZt kortársai sokszor zavaros fejű prófétának tekintették inkább, mint tudós matematikusnak és filozófusnak. Az i. e. V. századi HÉRAKLEITOSZ csak tudóskodónak, nem pedig tudósnak minősítette. Még PLATÓN is csak a püthagoreusok életmódját dicsérte. Csak az i. e. IV. századi ARISZTOTELÉSZ hangsúlyozta matematikus voltukat.

A püthagoreus szövetség politikai nézetei miatt Krotónban sem maradhatott, el kellett menekülnie Metapontumba, a Tarentumi-öbölbeli városba. PÜTHAGORASZ halála után a szövetség két nagy csoportra bomlott. Az egyik előtérbe helyezte a püthagoraszi tanok vallási, életmódbeli részét, a másik pedig a matematikai kutatásokat. Maga a mozgalom az i. e. IV. században szűnt meg, de később, az i. e. 50—i. sz. 300 közötti időkben újjáéledt az ún. újpüthagoreusok filozófiájában. Érdekes módon a matematika és a fizika történetében még jóval később, mondhatni napjainkban is, fel-felbukkan változott, modernizált formában az a valójában püthagoreusi felfogás, hogy a természeti jelenségek leírására egyedül a matematika képes. A *Természet Világa* 1979-es 9. számában olvashatjuk korunk egyik legnagyobb fizikusának, PAUL DIRACnak a sorait: „azt hiszem, hogy minden fizikus közül SCHRÖDINGER hasonlított hozzám leginkább. Könnyebben egyetértettem vele, mint bárki mással. Azt hiszem, azért, mert mindkettőnkben elevenen élt a matematikai szépség szeretete, s igen nagy mértékben ez határozta meg munkánkat. Valóságos hitkérdésnek tekintettük, hogy a természet alapvető törvényeit leíró egyenletekben nagy matematikai szépségnek kell rejtőzni. Ha tetszik, ez volt a vallásunk. Nagyon hasznos vallás volt ez, sok sikerünk alapjának tekinthető.” Persze a püthagoreusi felfogás és a Dirac-Schrödinger-féle „vallás” között tetemes távolság tátong, de az is igaz, hogy a sallangjaitól megtisztított püthagoreusi tanok nem feltétlenül megmosolyognivalók.

A PÜTHAGOREUSOK ZENEELMÉLETE

Inkább csak szórakoztatásul említjük meg a következő közszájon forgó mesét. Bizonyára nem történt meg, hogy PÜTHAGORASZ egy kovácsműhely előtt 4 kalapács zenéjét hallotta csodálatos összecsengésben, konszonanciában, vagy ahogy a görögök mondták „szümphóniában". A történet szerint az észlelt „szümphóniákat" PÜTHAGORASZ a kalapácsok súlyának arányára vezette vissza, tehát számokkal fejezte ki. Igaz viszont az, hogy a püthagoreusok, mesterük nyomán, tudatosan kísérleteztek a monokhordon (egyhúrú hangszer) a szümphóniák és a húrhosszak közötti összefüggést keresve. A kifeszített húr közepén megpendítve hallatta az alaphangját. Ha a húrt felére rövidítették (ugyanolyan megfeszítés mellett), akkor az alaphang oktávját hallották. E két hang egymásutánja, hangköze a legtisztább konszonancia. PÜTHAGORASZ fogalmazta meg, hogy e konszonancia esetén a húrhosszak aránya 1 : 1/2 = 2 : 1.

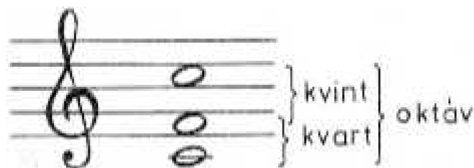
A továbbiakban még két kellemes hangközt vizsgált meg. A kétharmadára lerövidített húr rezgése az alaphang kvintjét adja, ha pedig a háromnegyed hosszúságú húrt pendítjük meg a közepén, akkor az alaphang kvartját halljuk. A kvint és az alaphang esetében a húrhosszak aránya 1 : 2/3 = 3 : 2, a kvartnál pedig 1 : 3/4 = 4 : 3.

A püthagoraszi szümphóniák hangzásakor tehát a húrhosszak aránya rendre: 2 : 1, 3 : 2 és 4 : 3. PÜTHAGORASZnak ez a felfedezése, hogy a zenében a konszonáns hangközök az 1,2,3,4 számokból készíthető arányokkal jellemezhetők, a hangtan első felfedezése, a szó mai értelmében is fizika, hiszen a fizika törvényei mérésekre alapozott matematikai megfogalmazású állítások. Valószínűleg éppen ennek a megfigyelésnek a nyomán alakult ki a püthagoreusokban az a nézet, hogy a természet a számok szerint van elrendezve, és fordítva : a számok törvényein keresztül ismerhető meg a mindenség, és hogy a számok közti harmónia ugyanaz, mint a lelkünkben élő örök törvények harmóniája.

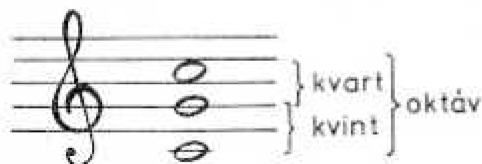
Ebből a harmóniaelméletből sarjadt ki a püthagoreusok két nagy kutatási területe: a zeneelmélet és a számelmélet, majdnem mindig teljes összefonódottságban. Meglepő összefüggést nyertek, amikor az alaphangot adó húr hosszát 12 egységnek vették. Ekkor a kvarthoz tartozó húrhossz 9, a kvinthez tartozó 8 és az oktávhoz

kapcsolódó 6 egységnyi. Észrevették, hogy a húrhosszak között fennáll a következő aránypár: 12 : 9 = 8 : 6, ahol

$$9=\frac{6+12}{2} \quad \text{és} \quad 8=\frac{6\cdot 12}{\frac{6+12}{2}}=\frac{2\cdot 6\cdot 12}{6+12},$$



13. ábra



14. ábra

vagyis az aránypár második tagja a külső tagok számtani, a harmadik tagja pedig a külső tagok „harmonikus” közepe. Az aránypár helyessége füllel is ellenőrizhető, hiszen azt fejezi ki, hogy amint a 12 egységnyi húr hangjához képest a 9 egységnyi húr a kvartot adja, ugyanúgy a 8 egységnyi húr hangjához viszonyítva a 6 egységnyi húr hangja is kvart. A püthagoreusok felfedezték tehát azt az aránypárt, amelynek általános alakja:

$$a : \frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b} : b.$$

Ezt nevezik „arany aránypárnak”. Sejtjük, hogy ezt az aránypárt már Babilonban ismerték. A harmóniatan nyert újabb megerősítést abban, hogy a püthagoreusok észrevették a kocka

csúcsai, lapjai és élei közötti hasonló összefüggést. A kocka éleinek a száma 12, lapjainak száma 6, a csúcsok száma pedig e kettő harmonikus közepe:

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}=8.$$

Az oktaédernél szintúgy: az élek

száma 12, a csúcsok száma 6, a lapok száma pedig e kettő harmonikus közepe: 8. Lám - mondták - a „tökéletes” (mai szóval szabályos) testekben rejlő harmónia tükröződik a számok harmóniájában, és ez ugyanaz, mint a zenei összhang!

A kvart és a kvint latin elnevezés görög mintára készült (dia tesszarón = negyedik, dia pente= ötödik), és arra utal, hogy a görög héthúrú lant negyedik, illetve az ötödik húrjának a megjelölésére szolgált. A püthagoreusok az oktávot eredetileg „harmóniának” hívták, amely szó szerint összeillesztést jelent, és hihetőleg a kvart és a kvint összeillesztésével keletkezett oktáv hangköz származtatását fejezi ki, kétféleképpen is:

kvart + kvint = oktáv, illetve: kvint+kvart= oktáv.

Ugyanez kottázva a 13. és a 14. ábrán látható.

Természetesen felmerült az a kérdés, hogy e két hangköz összetevésének (összeadásának) milyen művelet felel meg a hangközöket jellemző arányok esetében, azaz hogyan lehet megkapni a kvartot jellemző (4 :3) és a kvinthez rendelt (3 :2) arányokból az oktáv (2:1) arányát. A püthagoreusok észrevették, hogy nem az arányok összege, hanem a szorzata adja meg a kívánt eredményt, vagyis: a kvart+kvint= oktáv „összeadásnak”

a $(4 : 3)(3 : 2)=(2 :1)$ szorzás felel meg.

Ebből következik, hogy

az oktáv— kvart= kvint „kivonásnak”

a $(2 : 1) : (4 :3)=(3 : 2)$ osztás felel meg.

A püthagoreusok tehát a kvart és a kvint esetében felfedezték a

következő két szabályt:

1. Két hangintervallum összegének az arányszáma egyenlő a két összetevő hangköz arányszámának a szorzatával.

2. Két hangköz különbségének az arányszáma egyenlő a kisebbítendő és a kivonandó hangköz arányszámának a hányadosával.



15. ábra

Bizonyára észrevettük, hogy amikor az említett hangközöket a most ismertetett arányszámokkal jellemeztük, akkor voltaképpen úgy jártunk el, hogy a hangokhoz nem a húrhosszakat, hanem a megfelelő rezgésszámokat rendeltük. Ha ugyanis a normál *a* hang rezgésszáma 440, akkor az alsó *c-é* 264, a rá következő *f-é* 352 és a *g-é* 396 *(15. ábra)*. E rezgésszámokkal a már ismertetett összefüggések éppen úgy leírhatók, mint a húrhosszakkal. Az arany aránypár a rezgésszámokkal:

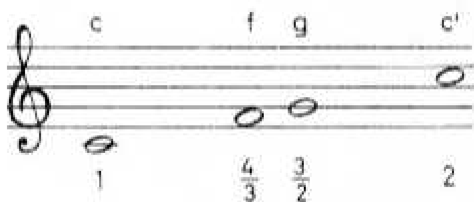
$$264:352=396:528,$$

ahol

$$352=\frac{2\cdot 528\cdot 264}{528+264} \quad \text{és} \quad 396=\frac{528+264}{2}.$$

Ha ezt az aránypárt 44-gyel egyszerűsítjük, akkor nyerjük a már ismert

$$6:8=9:12$$

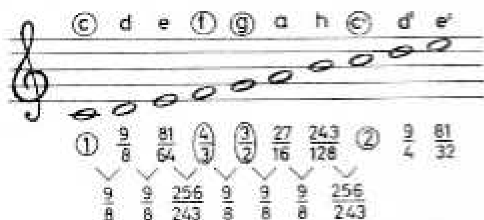


16. ábra

egyenlőséget, az előbbiekkel teljes összhangban; csakhogy most az alaphanghoz tartozik a legkisebb szám és a felső oktávjához a legnagyobb, megfelelően a fizika törvényének, amely szerint a húrhosszak aránya egyenlő a megfelelő rezgésszámok fordított arányával. Így a kvart hangköz arányszáma: (352 : 264) = (4 : 3), a kvinté: (396 : 264) = (3 : 2) és az oktávé: (528 : 264) = (2 : 1).

Tanulságos megfigyelnünk, hogy a püthagoreusi hangtan ismereteivel hogyan építhető fel a dúr skála. Példánkban a C-dúr skála hangjainak a megnevezéseit használjuk. Rendelkezésünkre állnak tehát a készülő püthagoraszi skálájának a 16. ábrán látható hangközei, illetve hangjai.

Az ún. püthagoraszi hangsor a c-ből kiinduló kvintugrásokkal építhető fel. Minden kvintugrásnál az alaphanghoz viszonyított hangköz, illetve a hanghoz rendelt arányszám 3/2-szer nagyobb lesz.



17. ábra

A hangsor származtatását érdemes végigkísérni a 17. ábra kottáján, amelyen feltüntetjük a hangok c-hez viszonyított arányszámát, valamint a szomszédos hangközök arányszámát is. A kísérőszövegben a hang neve után zárójelben szerepel az

alaphanghoz viszonyított arányszám.

Az első kvintugrással a c(l)-ről eljutunk a g(3/2)-re. A második ugrás továbbvisz a g(3/2)-ről a d'(9/4)-re. Ezt egy oktávval lejjebb hozzuk, hogy a c és c' közé essék. Így a d'(9/4)-ből d(9/8) lett. A következő ugrás a d(9/8)-ot átviszi az a(27/16)-ba. Ezután az a(27/16) felugrik az e'(81/32)-re, ami egy oktávval lejjebb: e(81/64). Végül az e(81/64)-ből megszületik a h(243/128) és vele együtt a a nyolcfokú püthagoraszi skála.

A kvintugrások folytatásának nincs értelme, mert így sohasem juthatunk el az alaphang valamelyik oktávjához. Ez csak akkor lehetne, ha a 3/2 valamelyik pozitív egész kitevőjű hatványa megegyeznék 2-nek valamelyik pozitív egész kitevőjű hatványával. Kvintugrásos püthagoraszi hangsort csak némi elhanyagolás árán lehetne kiépíteni. Mivel $(3/2)^{12} = 129\ 3/4$ és $2^7 = 128$, azért ezen arányszámoknak megfelelő hangok intervalluma 519/512, tehát közel 1

arányszámú. A fül számára e két hang közötti különbség elhanyagolható volna. Ez a bonyolult hangközű skála azonban nem született meg.

A zenében azonban az idők folyamán kialakult a nyolcfokú püthagoraszi skálához nagyon hasonló ún. diatonikus skála, amelynek „tiszta” hangközei megfelelnek a kis egész számok arányainak. Ezt mutatja hangközeivel együtt a 18. ábránk:



18. ábra

Hasonlítsuk össze a diatonikus skálának az alaphangra vonatkozó hangközeit a püthagoraszi hangsor megfelelő intervallumaival:

és a h hangnál: 243/128 ≈ 240/128 = 15/8

Fül legyen, amelyik ezeket az eltéréseket észreveszi!

A diatonikus skálát a zenészek a XVII. századig használták. Ekkor azonban elszaporodtak azok a zenedarabok, amelyeken belül hangnemi változások lépnek fel. Ez különösen a billentyűs hangszerek számára jelentett nehézséget. A zenészek ezért kimunkálták az ún. „temperált” skálát, amely az oktávot 12 egyenlő félhangközre osztotta. Ennek elméletét 1558-ban dolgozta ki GIUSEPPE ZARLINO (1517-1590), a velencei Szt. Márk-templom karnagya. Ez a hangsor, amelyet a következő ábránk szemléltet, BACH idejében szorította ki elődeit. Ebben már kivétel nélkül érvényesül a püthagoreusok által feltalált hangköz-összetevési szabály.

19. ábra



A PÜTHAGOREUSOK SZÁMELMÉLETE

A püthagoreusok számelméletét rendszerint el szokták intézni azzal, hogy misztifikálták a számok tudományát. Ez igaz, de meg kell látnunk azt is, hogy a misztikus burokban komoly értékek és lehetőségek rejtőznek. Ezeket az elismerést követelő eredményeket szeretném a következőkben vázlatosan feltárni.

A püthagoreusok, aminthogy a világ dolgainak a sokféleségét az egyetlen Istennel állították szembe, aki egyszersmind forrása is a sokféleségnek, ugyanúgy az „egység” ellentétét a számokban látták olyanképpen, hogy ugyanakkor az egység szüli a számokat. Az egység, az „egy” nem is szám, hanem a számok eredete, amely részekre nem bontható, amelyet osztani nem lehet, csak szorozni, többszörözni. Így az egynél kisebb szám nincs. Az egynél nagyobb számok az egyből keletkeznek, annak megsokszorozásával. A számok viszont részekre bonthatók, oszthatók, hiszen mindegyik valahány egységet tartalmaz. A két egyenlő részre osztható számok,

a páros számok, női jellegűek, a két egyenlő részre nem bonthatók hím természetűek, ezek a páratlan számok. Az „egy” hímnős, sem női, sem férfi, sem páros, sem páratlan. A 2 az első női szám, a három az első férfi szám, logikus, hogy összegük, az 5 a házasság jelképe. A 4-nek sokféle jelentése volt: az első négyzetszám, az igazság jelképe, az évszakok száma stb. Mivel az első 4 szám arányával éppen a püthagoraszi szümphóniák jellemezhetők, azért ezek összege, a 10 $(1 + 2 + 3 + 4)$ már egy magasabb minőséget, a természet harmóniáját fejezi ki. Ennyi a szférák száma is (Univerzum, Szaturnusz, Jupiter, Mars, Nap, Vénusz, Merkur, Hold, Föld, Ellenföld). Bizonyára ismertek szerencsét hozó és szerencsétlen számokat, amint tudtak tökéletes számokról és baráti számpárokról is. Ha csupán ennyiből állana a püthagoraszi számelmélet, akkor nem volna említésre méltó. A püthagoreusok azonban ezenfelül értékes kutatásokat is végeztek a számok közti kapcsolatok, törvények felderítésére. Az már a matematikatörténet számára teljesen közömbös, hogy e vizsgálatok célja kezdetben a világ harmóniájának, sőt magának az isteni lényegnek a megismerése volt.

Valószínűleg első számelméleti tételeik a páros és páratlan számok elméletéhez tartoztak. Ezek közül néhányat felsorolunk:

Páros számok összege és különbsége is páros.

Két páratlan szám összege páros.

Páros számú páratlan szám összege páros.

Páratlan számú páratlan szám összege páratlan.

Ha páros számból páratlant vonunk ki, akkor páratlant kapunk.

Páratlan és páros szám szorzata páros.

Olyan szám, amelynek a fele páratlan, csak úgy bontható kéttényezős szorzatra, hogy az egyik tényező páros, a másik páratlan.

A számok oszthatóságával kapcsolatban két, ma sem problémamentes felfedezésük volt a tökéletes számok és a baráti

számpárok fogalma. Tökéletes számnak nevezték azt a számot, amely egyenlő az önmagánál kisebb osztóinak az összegével. Ilyen például a 6, mert $1 + 2 + 3 = 6$, ahol 1, 2 és 3 a 6 osztói. Tökéletes szám a 28 is, hiszen $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. A püthagoreusok ismerték még a 496 és a 8128 tökéletes számokat. A tökéletes számok képzési szabályát az újpüthagoreus NIKOMAKHOSZ (i. sz. 100 körül) adta meg. Bizonyítás nélkül közölte, hogy ha $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = p$ törzsszám, akkor $2^n p = 2^n(2^{n+1} — 1)$ tökéletes szám. Megfogalmazta azt a ma sem bizonyított sejtést, hogy minden tökéletes szám vagy 6-ra, vagy 8-ra végződik. A matematikatörténészek kimutatták, hogy NIKOMAKHOSZ előbbi tétele igazolható a püthagoreusok párospáratlan szám elmélete alapján. Szeretném megmutatni EUKLEIDÉSZ bizonyítását, amelyet diákkorában egy matematikai versenyen a neves magyar matematikus, HAAR ALFRÉD (1885-1933) is megtalált.

Legyen $N = 2^n p$ olyan szám, amelyben $p = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + + 2^n = 2^{n+1} — 1$ prímszám. Ekkor N önmagával nem egyenlő osztóinak az összege:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + p + 2p + 2^2p + 2^3p + \ldots + 2^{n-1}p =$$

$$= 2^{n+1} — 1 + p(2^n — 1) = p + p(2^n — 1) = 2^n p = N.$$

Így N valóban tökéletes szám.

Röviden itt tekintjük át a tökéletes számok felfedezéseinek további történetét, mert később ezekről már nem lesz szó. Az ötödik tökéletes számot Regiomontanus (1436-1476) találta meg, a Nikomakhosz által megjelölt úton. Ha ugyanis a 2^np-ben az $n = 12$, akkor 2^{13}-1 prímszám, tehát a 33 550 336 tökéletes szám. A XVI. században Scheybl tübingeni matematikus meglelte a hatodik és a hetedik tökéletes számot az $n = 16$ és az $n = 18$ kitevőkre. Leonhard Euler (1707-1783) kimutatta, hogy a $2^{30}(2^{31} — 1)$ tökéletes szám, és hogy minden páros tökéletes szám 2^np alakú. A XIX. században négy új tökéletes szám került elő,

a $2^{60}(2^{61} — 1)$, a $2^{88}(2^{89} - 1)$, a $2^{106}(2^{107} - 1)$ és a $2^{126}(2^{127} - 1)$.

A XX. században már számítógépek határozták meg a

$$2^{520}(2^{521}-1),\quad 2^{616}(2^{617}-1),\quad 2^{1278}(2^{1279}-1),$$
$$2^{2170}(2^{2171}-1),\quad 2^{2202}(2^{2203}-1),\quad 2^{2280}(2^{2281}-1),$$
$$2^{3216}(2^{3217}-1)\quad \text{és}\quad 2^{44\,496}(2^{44\,497}-1)$$

tökéletes számokat.

A baráti számpárok olyan számkettősök, amelyek bármelyike egyenlő a másik valódi osztóinak (az 1-et is számítva) az összegével. A püthagoreusok csak a 220, 284 baráti számpárt ismerték. Ennél valóban:

220 osztóinak összege: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$, és 284 osztóinak összege: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Az arab Szábit ibn Kurra (836-901) fedezte fel az 1184 és 1210 baráti számpárt. Pierre FERMAT-tól való 17 296 és 18 416. René Descartes (1596-1650) adta meg a 9 363 584 és 9 437 056 baráti számpárt. Euler nagyságára jellemző, hogy további 61 baráti számpárt határozott meg. Az elmondottakhoz felesleges hozzáfűzni, hogy a püthagoreusok ismerték a prímszám és az összetett szám fogalmát.

A püthagoreusok azzal, hogy a számot az egységek halmazának definiálták, mesterségesen száműzték a számok közül a törteket, bár a gyakorlati emberek ezzel nem törődve nyugodtan számoltak azokkal. A püthagoreusi számelméletben a törtek helyét a számok aránya foglalta el. Zeneelméletükben már láttuk, hogy a hangközöket számarányokkal jellemezték. Ezek között az elsőket, (2 : 1, 3 : 2, 4 : 3) az oktávhoz, a kvinthez, illetve a kvarthoz rendelték. Az említett arányok általános alakja: $(n+l):n$. Az ilyen arányokat „epimoriosz logosznak”, „fölös részű aránynak” nevezték, jelölve azt, hogy az előtag 1 egységgel nagyobb az utótagnál. Ez az elnevezés az „epimorion diasztéma”, „fölös részű hangköz” zenei kifejezésükből származik. A hangközt jellemző arány matematikai absztrakciója önálló életet kezdett élni az arányelméletben. Ugyancsak epimoriosz logosz volt a neve az $(n+1) : n$ arány bővített alakjainak is, tehát általánosságban a $k(n+1) : kn$

arányoknak. A püthagoreusok bebizonyították, hogy az epimoriosz arányok két tagjának nincs mértani középarányosa. Ha ugyanis lenne, amit jelöljünk m betűvel, akkor

$$k(n+1)kn=m^2, \quad \text{illetve} \quad (n+1)n=\left(\frac{m}{k}\right)^2 \text{ volna.}$$

Mivel a bal oldalon szám áll, hiszen (n + 1) is, *n* is szám, azért a jobb oldalon is szám kell hogy legyen. A jobb oldal szerint viszont ez a szám négyzetszám, ami pedig a bal oldal miatt lehetetlen. Az eredeti feltevés tehát helytelen, annak ellenkezője igaz, azaz (n + l)-nek és n-nek nincs mértani közepe.

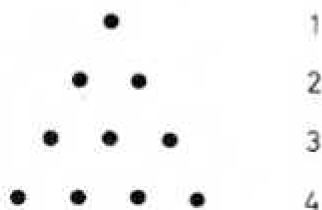
Az arány (logosz) fogalma tehát együtt alakult ki a hangköz fogalmával. Ugyanekkor keletkezett az aránypár fogalma is. Görögül az aránypárt „analogiának” nevezték, azaz logoszonkénti egyenlőségnek, arányok egyenlőségének. A zeneelméletben láttuk erre példaként a 12 : 9 = 8 :6 aránypárt. Az analógia szó később átkerült az európai nyelvekbe, és már nem két arány egyenlőségét, hasonlóságát jelentette, hanem általában hasonlóságot.

A mértani középarányos fogalma is az aránypárral kapcsolatos. Ha ugyanis egy aránypár beltagjai (vagy kültagjai) egyenlők, mint példáulaz $a : b = b : c$ aránypárnál, akkor a neve folytonos aránypár, és *b* éppen a-nak és c-nek mértani közepe. Ez, amint láttuk, az (n + 1) és *n* számok esetében nem létezik, habár a $b^2 = ac$ geometriai értelmezése szerint minden *a, c* oldalú téglalaphoz szerkeszthető a téglalapéval egyenlő területű négyzet. Éppen a mértani megoldhatóság miatt nyerte ez a középarányos a mértani jelzőt.

A hangközök összetevéséből származott a hangközökhöz rendelt arányok összetevése, szorzása, amint azt a hangtani részben már láttuk. A (4 : 3) • (3 : 2) szorzás eredményét, a (4 : 2), illetve a (2 : 1) arányt szinte kísérletileg lehetett ellenőrizni a monokhordon, hiszen a húrhosszakat megfelelően választva, csak meg kellett hallgatni, hogy kielégíti-e a kvart + kvint = oktáv összefüggést. Az arányokkal való műveletek tehát szintén a „szümphóniák” tanulmányozásából eredtek. Ezek a műveletek

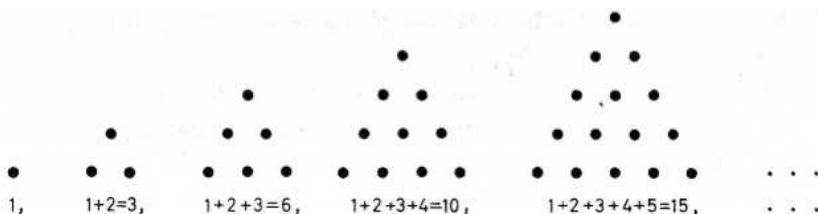
egyébként megfeleltek a mai törtműveleteknek. A fenti példákkal szerettük volna érzékeltetni, hogy a számelmélet a püthagoraszi harmóniatanban, zeneelméletben gyökerezik.

Ennek a számelméletnek azonban volt egy sajátosan geometriai színezetű fejezete is, amely szinte átvezet a geometriába, mert a számokkal mint „geometriai alakzatokkal" foglalkozik. Ez a következőképpen értendő: A püthagoreusok szerették a számokat kirakott kavicsokkal szemléltetni. Sokszor így „mutatták meg" a kimondott tétel igazát is. Ezeknek a különböző alakzatokba rendezett kavicsoknak a száma az, amit figurális számnak nevezünk. Ezek lényegét talán jobban érzékelteti néhány példa.



Emlékezzünk vissza arra a megállapításra, hogy a fülnek kellemes hangközöknél a húrhosszak aránya az 1, 2, 3, 4 számok arányával fejezhető ki. Rakjuk ki ezeket a számokat az oldalt látható, önként adódó elrendezésben:

Az így keletkezett „háromszög", a szent tetraktüsz (négyes alakzat) volt a püthagoreus szövetség egyik jelvénye, amely jelképezte a mindenség harmóniáját. Az ilyen, háromszög alakba rendezhető kavicsok számát (a következőkben a háromszög alakban rendezhető számot) nevezték háromszögszámnak. Ilyen háromszögszámok:



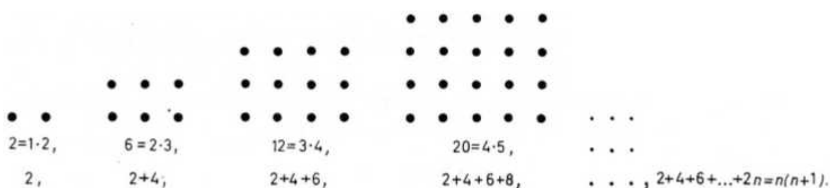
Általánosságban: $1 + 2+3+4+ \dots + n = ((n+1)n)/2$. Az n-edik

háromszögszám az első *n* szám összege.

A téglalap alakba rendezhető számok a téglalapszámok. Ilyenek:



Ezek között külön csoportot alkottak az $n(n+1)$ alakúak:

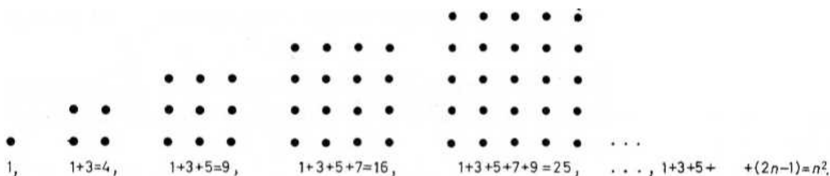


Az n-edik $n(n+1)$ alakú téglalapszám az első *n* páros szám összege.

Az olyan számokat, amelyek téglalap alakba nem rendezhetők, azaz nem bonthatók tényezők szorzatára, lineáris (vonalas) számoknak nevezték (a mai törzsszámok). Lineáris számok:

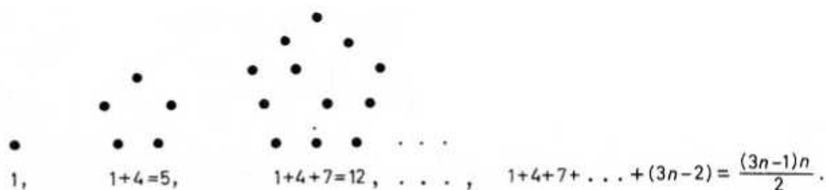


A négyzet alakba rendezhető számok a négyzetszámok. Az elnevezést ma is használjuk. Ezek nyilván:



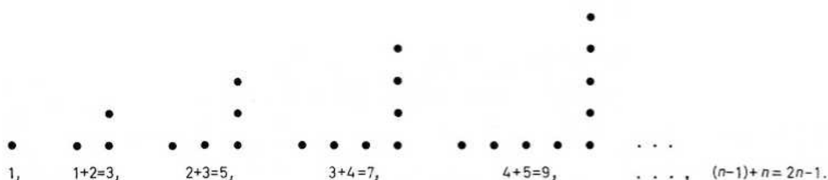
Az n-edik négyzetszám az első *n* páratlan szám összege.

Az ötszögszámok:



Következhetnék a többi sokszögszám a végtelenségig. Ezeket összefoglaló néven síkszámoknak is nevezték.

A síkszámok között kiemelkedő szerep jutott az ún. gnómón-számoknak. A gnómón a napóra görög neve. Legegyszerűbb alakja egy földbe szúrt bot és az árnyéka. A görögök az ilyen L formájú alakzatot általában gnómónnak hívták. Az ilyen alakba rendezhető számokat nevezték gnómónszámoknak. Ezek a következők:



Az n-edik gnómónszám az (n-1)-edik és az n-edik szám összege. Ezek voltaképpen a páratlan számok.

Megemlítjük még a térbeli alakzatokba rendezett számokat. Ezek közül a térszámok közül az elnevezésben ma is élnek a köbszámok: 1, 8, 27, 64, 125, ...

A köbszámok összegezésére a püthagoreusok észrevették egy ügyes eljárást. Ennek menete a következő:

$1^3 = 1$

$2^3 = 3 + 5$

$3^3 = 7 + 9 + 11$

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$

$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$

ezért:

$$1^3=1 \qquad \text{(A jobb oldalon 1 tag)}$$
$$1^3+2^3=1+3+5 \qquad \text{(3 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3=1+3+5+7+9+11 \qquad \text{(6 tag)}$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \qquad \text{(10 tag)}$$
$$\ldots$$

Vegyük észre, hogy ha a bal oldalon az első n köbszám összege áll, akkor a jobb oldalon a tagok száma éppen az n-edik háromszögszám, tehát:

$S_n = 1^3+2^3+3^3+4^3+ \ldots +n^3 = 1 + 3+5+7+\ldots+ (n^2+n - 1)$,

ahol a jobb oldalon

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

számú tag áll. Így:

$$S_n=\frac{n^2+n}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

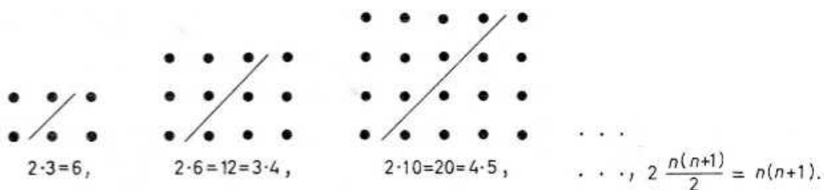
Az első n köbszám összege az n-edik háromszögszám négyzete.

A püthagoreusok a figurális számok között sok más, érdekes kapcsolatot is felfedeztek. Ezek közül ismertetünk néhányat:

Két egymás utáni háromszögszám összege négyzetszám. Szemléletesen:

$1+3=2^2$, $3+6=3^2$, $6+10=4^2$, . . . , $\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$

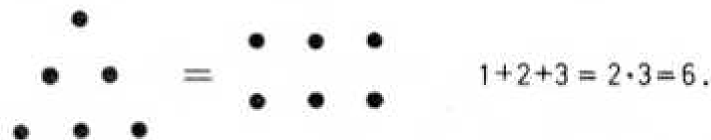
Minden háromszögszám kétszerese téglalapszám.



Érdekes szám a 6, nemcsak azért, mert tökéletes szám, tehát egyenlő a nála kisebb osztóinak az összegével, hanem azért is, mert ugyanezen, osztók szorzatával is egyenlő:

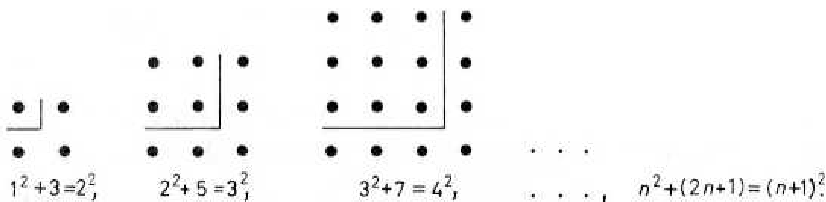
1 + 2+3=6= 1 * 2 * 3.

A 6 az egyetlen szám, amely háromszögszám is és n(n+1) alakú téglalapszám is:

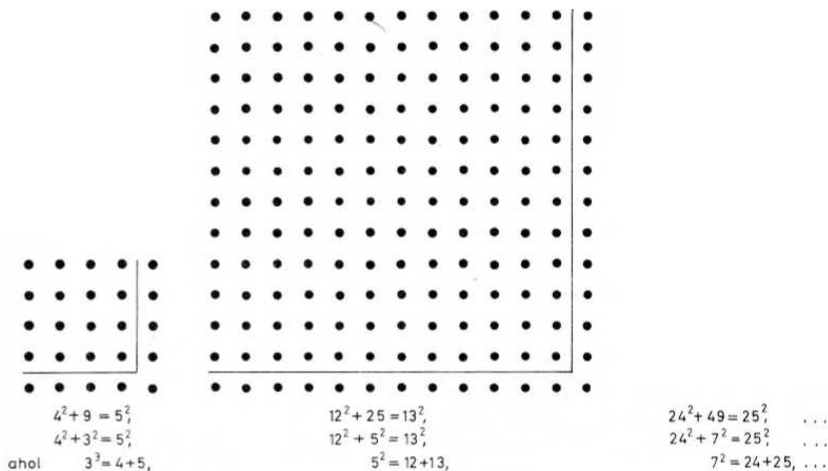


A 6 egységnyi élű kocka az egyetlen olyan kocka, amelynél a felület mérőszáma megegyezik a térfogat mérőszámával. Csakugyan, ha az ilyen kocka élét x betűvel jelöljük, akkor kell hogy $6x^2 = x^3$ legyen. Innen $x = 6$.

Egy négyzetszám meg a hozzá „illeszkedő” gnómónszám ismét négyzetszám:



Alkalmazzuk most ezt a törvényt azokra az esetekre, amelyeknél a gnómónszám maga is négyzetszám, tehát:



Általánosságban, ha a $2n+1$ páratlan számot m^2-tel jelöljük, akkor:

$$\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2.$$

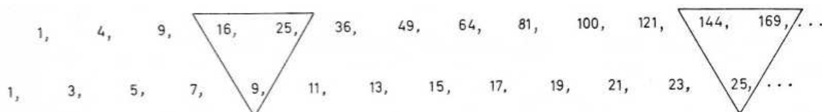
Ha tehát m páratlan szám, akkor az

$$x=\frac{m^2-1}{2},$$

az $y=m$ és a

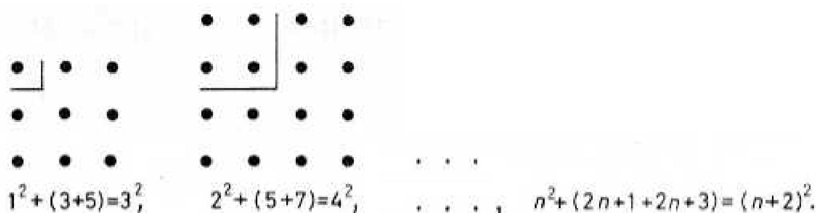
$$z=\frac{m^2+1}{2}$$

pitagoraszi számok, azaz kielégítik az $x^2+y^2=z^2$ egyenletet. A pitagoraszi számhármasoknak ezt a gyártási módját a püthagoreusok valóban ismerték. Ez a magyarázata a következő mechanizált eljárásnak: Írjuk fel a négyzetszámok és a páratlan számok sorozatát az

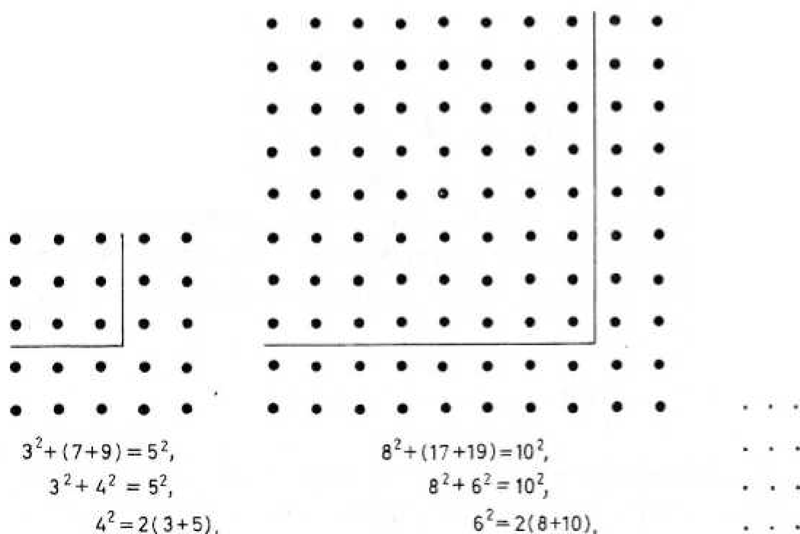


elrendezésben. Valahányszor a páratlan számok sorozatában négyzetszámhoz érkezünk, csatoljuk hozzá a balról, jobbról felette álló kettőt. Az így nyert négyzetszámok alapjai pitagoraszi számhármast alkotnak.

A módszer általánosítható, ugyanis ha egy négyzetszámhoz hozzáadjuk a hozzá illeszkedő két következő gnómónszámot, akkor is négyzetszámot nyerünk:



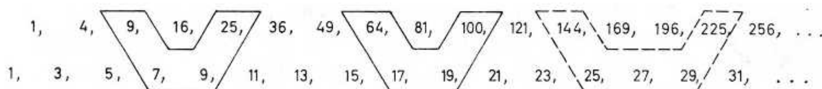
Válasszuk ki ezek közül ismét azokat az eseteket, amelyeknél a két gnómónszám összege négyzetszám, például: $7+9=16$, $17+19=36$, $31+33=64$ stb. Szemléletesen:



Általánosságban, ha a $(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$ négyzetszám, azaz az $(n+1)$ négyzetszám, és bevezetjük az $n+1=a^2$ jelölést, amikor is $n=a^2-1$, akkor

$(a^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2.$

Így az $(a^2 - 1)$, a $2a$ és az $(a^2 + 1)$ pitagoraszi számok. Az előbbi két sorozatból álló sablon most is használható, a bekeretezett számokból pitagoraszi számhármasok olvashatók le.

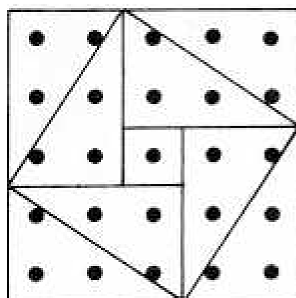


Az általánosítás természetesen a bemutatott irányban folytatható. Lehetséges tehát, hogy három szomszédos páratlan szám összege négyzetszám, például: $25 + 27 + 29 = 81$. Ekkor mivel

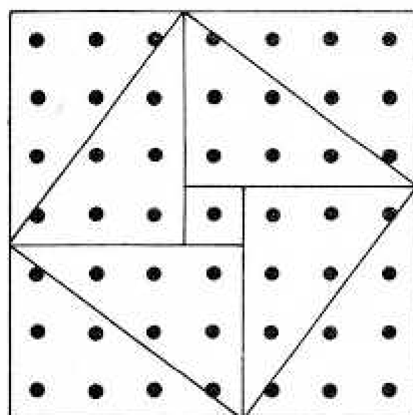
$n^2 + (2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5) = (n + 3)^2,$

azért az $n = 12$ esetén $12^2 + 81 = 15^2$, ami a kettős számsorozat szaggatott vonallal bekerített részéből is leolvasható.

Plutarkhosz szerint a püthagoreusok igazolták, hogy minden háromszögszám eggyel nagyobbított nyolcszorosa négyzetszám. A tétel igaza könnyen belátható, hiszen

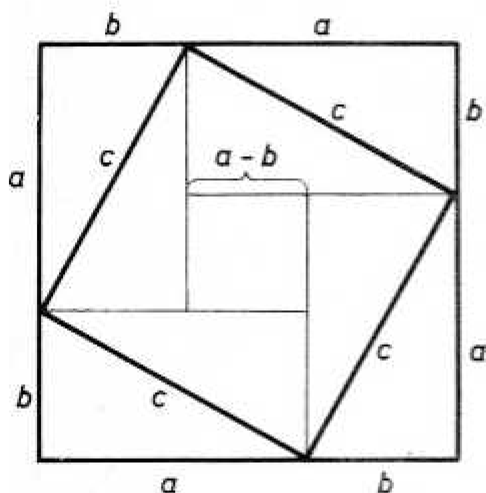


$8 \cdot 3 + 1 = 25 = 5^2$,



$8 \cdot 6 + 1 = 49 = 7^2$,

20. ábra



21. ábra

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 2n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

E szabályból meglepő módon lehet eljutni a Pitagorasz-tételhez is. Nem állítom, hogy a püthagoreusok ezt meg is tették, bár a saját kirakós módszerükkel bizonnyal megtehették, talán így: A tételt szemléltessük „kavicsokkal”. Például: a második háromszögszám 3, a harmadik pedig 6. Ezekkel készült a 20. ábra.

Úgy vélem, hogy már ez a két szemléltető rajz is megadhatja azt az ötletet, hogy a sokszögszámoktól elbúcsúzva, csupán a rajzot vizsgáljuk, amelyben 8 kis derékszögű háromszög és egy négyzet tölt ki egy nagy négyzetet. Általánosságban tehát az az ábra, amelyet a háromszögszámok idézett tétele ihletett, így néz ki *(21. ábra):*

A rajz tanúsága szerint a *c* oldalú négyzet összeállítható 4 egybevágó derékszögű háromszögből és az általuk közrefogott kis négyzetből, tehát:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2.$$

A Pitagorasz-tételt nyerjük akkor is, amikor a rajzot úgy tekintjük, mint amelyen az $(a+b)$ oldalú négyzetet 4 derékszögű háromszög és a c oldalú négyzet tölti ki. Ekkor is:

$(a+b)^2=c^2+4 * (ab)/2$,

azaz

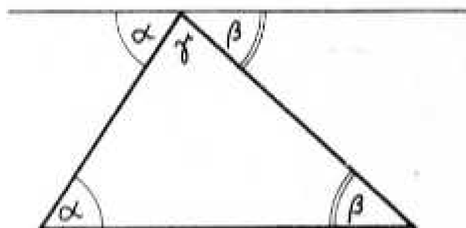
$a^2+b^2=c^2$.

A PÜTHAGOREUSOK GEOMETRIÁJA

Az előző fejezet végén már át is léptünk a számelméletből a geometria területére. A Pitagorasz-tételt, amely leginkább tette ismertté **Püthagorasz** nevét, nem ő fedezte fel; Babilonban, Egyiptomban, Kínában már előtte is ismerték. A püthagoreusok magát a geometriát nem is értékelték annyira, mint a számok tudományát. Ez megnyilvánult az elnevezésben is. A számelméletet mathémának, tanulmánynak hívták, ebből származik a matematika szó. A geometria hisztorié volt, amely a hisztoreo (tapasztal, kérdez, tudakoz) igéből származik, tehát kimondottan tapasztalati jellegű tudományt jelent.

A már említett Jamblikhosz neoplatonista filozófus és matematikus azt állítja, hogy volt egy Püthagorasz hagyatéka címen ismert geometriai tankönyv, amelyet a püthagoreusok adtak közre azért, hogy vele pénzt keressenek. Erre - elveikkel ellentétben - az kényszerítette őket, hogy egy ízben elveszett a szövetség közös vagyona. Sok olyan geometriai tételre, amelyet abból a könyvből ismertek meg, fogták rá, hogy **Püthagorasz** fedezte fel. Biztosnak vehetjük azonban, hogy a püthagoreusok bizonyították be először, hogy a háromszög szögeinek összege két derékszög, úgy, ahogy ez a *22.* ábrából leolvasható. A bizonyításhoz tudniuk kellett, hogy a váltószögek egyenlők. Ez szinte bizonyossá teszi, hogy folytatták THALÉSZnak a szögpárokra vonatkozó vizsgálatait. Ezt valószínűsíti az is, hogy a közös csúcsú szögek számbavételével feleltek arra a kérdésre, hogy milyen szabályos sokszögekkel fedhető le hézagmentesen a sík. (Szabályos háromszögekkel, négyzetekkel és szabályos hatszögekkel.) A zárójelben említett szabályos sokszögeken kívül meg tudták szerkeszteni a szabályos ötszöget is. Ennek a szerkesztésnek a felfedezése az i. e. V. század

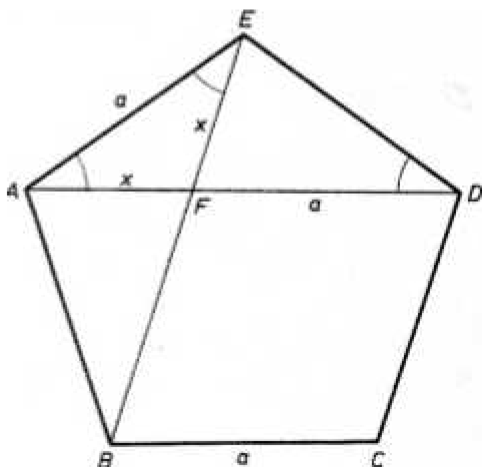
elején **Hippaszosz** nevéhez fűződik. Ekkor a püthagoreusok már két, egymással ellenséges táborra oszlottak. Az egyik a vallási előírásokat tartotta fontosnak, a másik a matematika művelését. **Hippaszosz** ez utóbbi csoportba tartozott, és ezért az előbbiek kiközösítették, sőt állítólag még életében felállították sírkövét annak jeléül, hogy számukra meghalt. Az ötszögszerkesztéshez **HIPPASZOSZnak,** tehát az akkori püthagoreusoknak is, ismerniük kellett, hogy a szabályos ötszög átlói az aranymetszés szabályai szerint osztják egymást. Az aranymetszés egy a hosszúságú szakaszt akként bont két, *b* és c részre, hogy az egész szakasz úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobbik a kisebbikhez, tehát az ábra szerint:



22. ábra



23. ábra



24. ábra

a:b = b:c, ahol *b + c = a.*

Az aranymetszés szabálya valószínűleg még a **Püthagorasz** előtti idők geometriai divatú képzőművészetéből kristályosodott ki. Számos természeti tárgy jelenség mutat megközelítően ilyen felosztottságot.

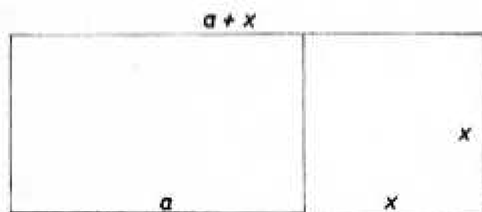
Az *ABCDE* szabályos ötszög két, egymást metsző átlója *AD* és *BE.* Az *AFE* egyenlő szárú háromszög hasonló az *ADE* egyenlő szárú háromszöghöz (mert az egyíves szögek egyenlők). Ezért:

$(a + x) : a = a : x.$

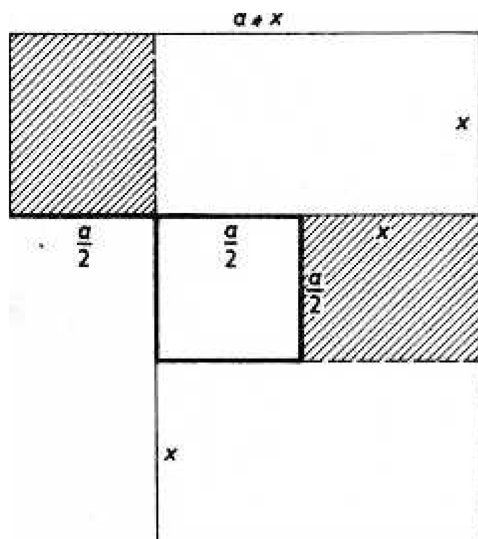
Ha tehát adott *a* oldalú szabályos ötszöget akarunk szerkeszteni, akkor meg kell szerkesztenünk az .v távolságot. **Hippaszosz** ezt a feladatot bizonyos területátalakítással, vagy ahogy akkor nevezték, területillesztéssel oldotta meg. A területillesztés - úgy tudjuk -szintén püthagoreus találmány, de erről általánosságban **Eukleidész** *Elemek* című művével kapcsolatban szeretnék beszélni. Most csak a szóban forgó szerkesztéshez szükséges eljárást ismertetném.

Az (a + x) : a = a : x folytonos aránypár, amelyben az *a* beltag a két kültag mértani közepe, tehát:

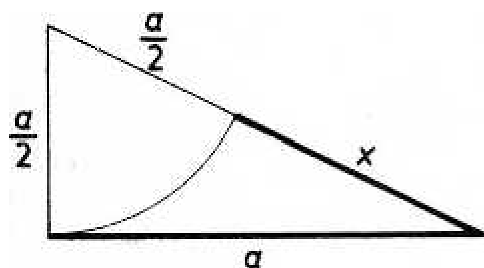
$(a + x)x = a^2$.



25. ábra



26. ábra



27. ábra

Azért, hogy az *a* ismeretében megszerkeszthessük az *x* szakaszt,

„illesszünk” az a távolságra egy a^2 területű téglalapot úgy, hogy az a szakaszról még egy négyzet „kilógjon”, a *25. ábra* szerint.

Felezzük meg az a szakaszt, és a második a/2 távolság alá építsünk négyzetet, végül ehhez a négyzethez illesszünk egy x szélességű „gnómónt”, amint a *26. ábra* mutatja. A rajz szerint a gnómón területe akkora, mint az $(a+x)$, x oldalú téglalap területe. Így

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a+x)x.$$

Az eredeti feltétel szerint azonban $(a+x)x= a^2$, tehát:

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2.$$

Ebbe az összefüggésbe már nem nehéz belelátni a Pitagorasz-tételt. Ha egy derékszögű háromszögnek a két befogója: a/2 és *a,* akkor az átfogója: $(a/2)+x$. Az átfogóból levonva az a/2 szakaszt, maradékul a keresett x szakaszhoz jutunk. Ennek birtokában az a oldalú szabályos ötszöget már nem nehéz megszerkeszteni.

A szabályosötszög-szerkesztési feladat két, említésre érdemes problémát rejt. Az egyik a középarányosok fogalma és szerkesztése, amelyet szintén a püthagoreusok oldottak meg. A számtani és a mértani közepeket a folytonos aránypárokból származtatták. Aránynak nevezték az $a—b=b—c$ egyenlőséget is, amelyben a b számtani középarányosa a-nak és c-nek: $b=(a+c)/2$. Szerkesztése nyilvánvaló, de a törtek száműzésével nem minden két számnak adódott szám számtani közepe. Például a 6 és 7 számtani közepe nem szám, hanem két szám aránya: 13 : 2.

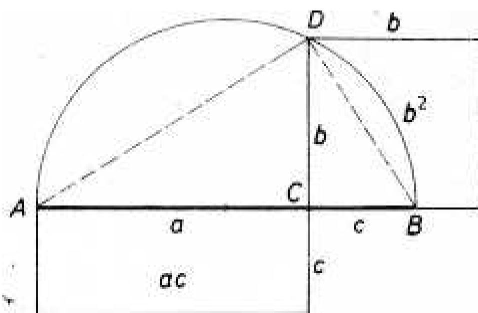
A mértani középarányosnál azonban ennél komolyabb nehézségek merültek fel. Mint ismeretes, az $a:b=b:c$ folytonos aránypárból az a-nak és c-nek mértani közepe: *b,* ami azt jelenti, hogy $b^2= ac$, azonban nem minden a és c számnak létezik mértani közepe, amint ezt már az epimoriosz arányoknál láttuk. Ez nemcsak azt jelenti, hogy például a 6 és 7 számok mértani közepe nem szám, hanem azt

is, hogy még két szám arányával sem lehet kifejezni. Ugyanakkor két tetszőleges szakasz mértani közepe mindig megszerkeszthető, azaz minden *a* és *c* oldalú téglalaphoz szerkeszthető olyan *b* oldalú négyzet, amelynek területe egyenlő a téglalapéval.

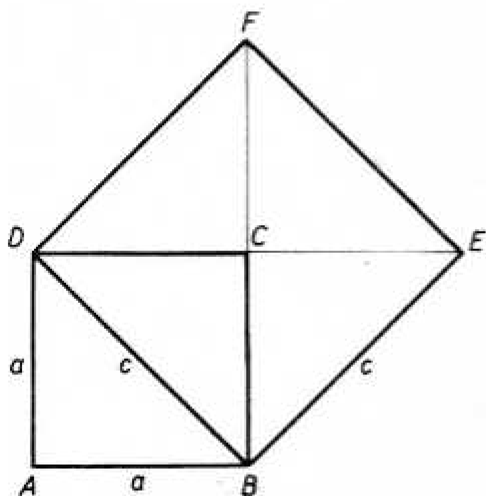
Ezt a szerkesztést a Thalész-tétel és a Pitagorasz-tétel segítségével a püthagoreusok is végre tudták hajtani úgy, ahogy ma a középiskolás diákok. A *28. ábrán* látható szerkesztéshez, úgy vélem, elegendő rövid magyarázat:

Mivel:

$$ACD\triangle \sim DCB\triangle,$$



28. ábra



29. ábra



30. ábra

azért

$a : b = b : c$

és így

$b^2 = ac.$

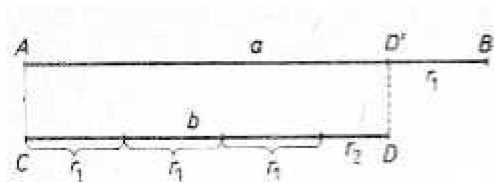
Ha tehát az *ac* szorzat nem négyzetszám és nem is egy aránynak a négyzete, akkor a görög számfogalom szerint nem lehet megmondani az *ac* területű négyzet oldalának a mérőszámát, noha az ilyen négyzet szerkeszthető (mert a szakaszra nézve nem definiáltak egy egységnyi, tovább már nem osztható szakaszt). Az ilyen „nem megmondható számot” a görögök „arrhéton”-nak, „kimondhatatlannak” nevezték. Ez az, amit ma irracionális (nem törtszerű) számnak hívunk. Az irracionális viszony a püthagoreusok egyik nagy felfedezése. Valószínű azonban, hogy egy másik, egyszerűbb feladat kapcsán bukkantak rá. Nem tudni, hogy mikor vetették fel a négyzetkettőzés problémáját, azaz azt a kérdést: hogyan lehet adott négyzethez kétszer akkora területű négyzetet szerkeszteni? Magát a szerkesztést valószínűleg könnyen megoldották a *29. ábra* szerint: A *BEFD* négyzet területe egyenlő az *ABCD* négyzet területének a kétszeresével. Megoldhatatlan nehézségbe ütköztek azonban, ha arra akartak válaszolni, hogy milyen hosszú a *BEFD* négyzet oldala, illetőleg az *a* oldalú négyzet átlója.

Az *a* mérőszámának a megállapítására bármilyen, nála nem nagyobb hosszegység választható, amely valahányszor ráfér maradék nélkül. Ha ezt az egységet úgy választjuk meg, hogy c-re is maradék nélkül rámérhessük, akkor *a* mérőszámából c mérőszámát számként vagy arányként meghatározhatjuk a közös mértékegységekben. A kérdés tehát az, hogy miként lehet a-hoz és c-hez, általában két adott szakaszhoz olyan távolságot találni,

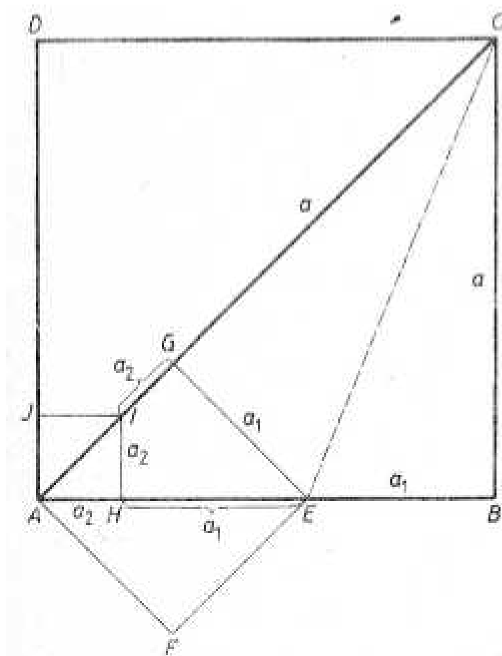
amellyel mindkettő megmérhető? Más szóval: van-e a két szakasznak közös mértéke?

A kérdés megválaszolására szolgáló módszer szintén a monokhordon született meg akkor, amikor a konszonáns hangokhoz tartozó húrhosszakat összehasonlították. Ekkor lényegében két húrhossz, két szakasz közös mértékét állapították meg. Az ezzel megmért húrhosszak arányát rendelték a konszonáns hangközhöz. A kvart esetében például az egész húrhosszra *(AB)* ráméríték a kvartnak megfelelő *AC* húrhosszúságot, azután a *CB* különbségről észrevették, hogy pontosan háromszor fér rá az *AC* szakaszra. Így a CB-vel a teljes *AB* hosszúság és az *AC* szakasz is megmérhető: az *AB-nek* és az *AC*-nek a legnagyobb közös mértéke a *CB*.

Ezzel a mértékegységgel a két húrhossz aránya: 3 : 4. Tetszőleges két szakasz esetén is alkalmazható ez az eljárás. Keressük meg az $AB=a$ és a $CD=b$ szakaszok legnagyobb közös mértékét! Mérjük rá először a kisebbik *b* szakaszt a nagyobb a-ra. Ha maradék nélkül rámérhető például n-szer, akkor éppen *b* a legnagyobb közös mérték. Ha van maradék: r_1, akkor folytassuk az eljárást, mérjük rá az r_1 maradékot b-re. Megint két eset lehetséges: vagy rámérhető r_1 maradék nélkül a *b*-re valahányszor, akkor nyilván r_1-gyel *a* is megmérhető, vagy pedig kapunk valami r_2 maradékot. Az utóbbi esetben ismételjük az előbbi eljárást: mérjük rá r_1-re az r_2 maradékot, és így tovább. Ha ennek az eljárásnak egyszer vége szakad, vagyis kapunk egy utolsó maradékot, amelyet már pontosan sikerül rámérnünk az előző maradékra, akkor az utolsó maradék a legnagyobb közös mérték. Megeshet azonban, hogy az ismertetett eljárás vég nélkül folytatható. Ekkor a két szakasznak nincs közös mértéke, a két szakasz összemérhetetlen, görögül „aszümmetron”, latinul „inkommenzurábilis”. Ez azt is jelenti, hogy nem tudtunk a két szakasz számára közös mértékegységet találni, tehát ha az egyiknek van mérőszáma, akkor a másiké „arrhéton” szám, irracionális szám - és fordítva.



31. ábra



32. ábra

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a négyzet oldala és az átlója összemérhetők-e. Mérjük rá az *ABCD* négyzet *a* oldalát a *c* átlóra. Ráfér egyszer, és a maradék a_1 *(32. ábra)* - Mielőtt folytatnánk, állítsunk merőlegest a *c* átlóra a *G* pontban. Ez metszi az *AB* oldalt az *E* pontban. Az *AGE* háromszögnek két 45°-os szöge van, tehát egyenlő szárú, ezért $GE = a_1$. Az *EGC* és *EBC* háromszögek egybevágóságából következik, hogy $EB = a_1$. A mérési eljárást folytatva, az a_1 maradékot rámérjük az *a* oldalra: ráfér kétszer. Az a_1 másodszori felmérésénél azonban megint négyzetoldalt (a_1) mértünk ugyanazon négyzet (*AGEF*) átlójára, tehát kapunk maradékot, a_2-t. Amint az ábra mutatja: az a_2-nek az a_1-re mérésénél szintén négyzetoldalt mérünk négyzetátlóra (az *AHIJ* négyzetben), tehát ismét lesz maradék. Belátható, hogy a négyzetek hasonlósága miatt, és mivel eljárásunk minden lépésével négyzetoldalt mérünk négyzetátlóra, mindig jelentkezik maradék, azaz az eljárás vég nélkül folytatható: a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenek. Ez az előbbiek szerint azt jelenti, hogy ha a

négyzet oldalát számmal vagy aránnyal (racionális számmal) jellemezzük, akkor az átlójának a mérőszáma „arrhéton” szám, irracionális szám.

Pontosan a most ismertetett módon látható be a *24. ábra AED* és *AFE* hasonló háromszögpárja segítségével, hogy a szabályos ötszög oldala és átlója összemérhetetlen szakaszok. Ezt annak idején HIPPASZOSZ is észrevette.

Ugyancsak a püthagoreusok idejében született meg az indirekt bizonyítása is annak, hogy a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenek. Ha ugyanis az a oldalnak és a c átlónak lenne legnagyobb közös mértéke: x, és $a = nx$, $c = mx$ volna, ahol n és m relatív prímszámok, akkor a Pitagorasz-tétel értelmében

$$2a^2 = c^2$$

vagy

$$2n^2x^2 = m^2x^2,$$

illetve

$$2n^2 = m^2$$

lenne.

Ebből az következnék, hogy m^2 és vele m is páros szám, tehát m $2k$ alakú. Így

$$2n^2 = 4k^2$$

vagy

$$n^2 = 2k^2.$$

Ekkor viszont n^2 és így n is páros szám lenne. A következmény tehát az, hogy m és n is páros szám, ami ellentmond annak a kezdeti feltételnek, hogy n és m relatív prímek. A kiinduló feltevés tehát helytelen, azaz a és c összemérhetetlenek.

E tétel geometriai jellegű bizonyításánál felhasználtuk a hasonlóság

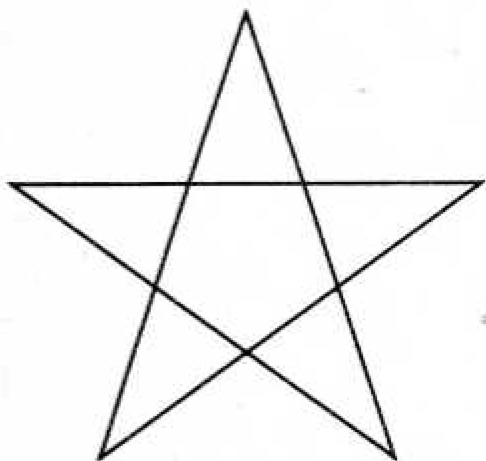
fogalmát, aminek szintén birtokában voltak a püthagoreusok. A hasonlóság eredete is a zeneelméletben keresendő. Vegyünk két különböző hosszúságú húrt. Az egyik legyen például 15 cm, a másik pedig 12 cm hosszú. Ekkor az első húr alaphangjának a kvintjéhez 10 cm, a másik húr alaphangjának a kvintjéhez pedig 8 cm hosszú húr tartozik. Az egyik kvint arányszáma tehát 10 : 15, a másik húrnál 8 : 12. E két arányt, ezt a két „logosz”-t, mivel ugyanazt a konszonanciát jelölik, a püthagoreusok egyenlőknek vették. Az aránypár görög neve - amint már említettem - „analogia” volt, aminek pontos jelentése: „logoszonkénti (ana logon) egyenlőség”. Ilyen egyenlő arányokból állították össze az

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

„arany aránypárt” is.

Később a püthagoreusok hasonlónak nevezték azt a két téglalapszámot is, amelyeknél a megfelelő „oldalak” aránya megegyezett. Hasonlók például a 3 * 5 = 15 és a 6*10 = 60 téglalapszámok, mert 3 : 5 = 6 : 10. Megállapították azt is, hogy a hasonló téglalapszámoknak mindig van mértani középarányosuk, viszont a nem hasonlóknak nincs. Később a hasonlóság fogalma a hasonló „síkszámok” és a hasonló „térszámok” közvetítésével átterjedt a síkidomokra és a testekre is.

Láthatjuk, hogy a szabályosötszög-szerkesztés feladata szinte összefoglalja mindazon alapvető számelméleti és geometriai ismereteket, amelyekkel a püthagoreusok már rendelkeztek. A szabályos ötszög átlói által alkotott szabályos csillagötszög a püthagoreus szövetség kabalisztikus jelvénye volt. Ezt a jelvényt már Babilonban is ismerték. (Érdekes, hogy merőben más megokolással ez lett az öt világrész kommunistáinak közös jelvénye is.)



33. ábra

A püthagoreusok geometriájához tartozott még a szabályos (tökéletes) testek tulajdonságainak a kutatása is. Maga **Püthagorasz** valószínűleg csupán a tetraédert, a kockát és a dodekaédert ismerte. Az oktaédert és az ikozaédert csak később fedezte fel **Platón** tanítványa: **Theaitetosz** (i. e. 417?—369). A püthagoreusoknál a tetraéder a tűz jelképe volt, az oktaéder a levegőé, az ikozaéder a vízé és a kocka a földé. Később **Arisztotelész** (i. e. 384-322) a dodekaédert az égi szférával azonosította. Megjegyezzük, hogy az ikozaédert valószínűleg már Babilonban ismerték, Pádua mellett pedig találtak egy, az i. e. 500 előtti időkből származó, dodekaéder alakú etruszk emlékművet. A püthagoreusok foglalkoztak először azzal a kérdéssel, hogy milyen szabályos testekkel lehet a teret hézagmentesen kitölteni. Erre alkalmasnak találták az oktaédert és a kockát. A gömböt végtelen sok oldalú szabályos testnek tekintették, szóhasználatukkal a legtökéletesebb testnek, aminthogy a kör is a legtökéletesebb síkidom. **Püthagorasz** bizonyítás nélkül ugyan, de kimondta, hogy az egyenlő kerületű síkidomok közül a kör területe a legnagyobb, és ugyanígy az egyenlő felszínű testek között a gömb térfogata a legnagyobb.

Amint látjuk, **Püthagorasz** neve a matematikának egy egész korszakát fémjelzi, főleg az i. e. VI-IV. századot. Ennek a korszaknak volt az érdeme a matematika alapjainak a lerakása. Ezen belül ki

kell emelnünk a számelméleti megalapozást, az irracionalitás felfedezését és a szabályos sokszögek és testek tanulmányozását, mindig a harmóniaelméletből kiindulva, illetőleg oda visszamutatva.

Amint említettük, a püthagoreusok mesterük halála után egy kimondottan vallási szektára és egy matematikával foglalkozó társaságra bomlottak. Az utóbbiaknak utolsó nagy vezetője **Arkhütasz** (i. e. 428?-365) volt. Róla és a többi püthagoreusról később még lesz alkalmunk külön-külön is megemlékezni.

A KOCKAKETTŐZÉS, KÖRNÉGYSZÖGESÍTÉS ÉS SZÖGHARMADOLÁS

A HÍRES ÓKORI GÖRÖG FELADATOK

Régtől fogva felbukkannak a matematikában olyan problémák, amelyek nem csupán a matematikusok érdeklődését keltik fel, hanem rejtélyes módon izgatják a laikusok fantáziáját is, évszázadokon, évezredeken át. Ilyen a három híres ógörög szerkesztési feladat: a körnégyszögesítés, a kockakettőzés és a szögharmadolás. Talán a feladatok látszólagos egyszerűsége és ugyanakkor az euklideszi szerkesztéssel való megoldhatatlansága kelt olyan feszültséget, amely fellobbantja és ébren tartja az érdeklődést. A feladatok eredete az őshomályba vész. Lehetséges például, hogy a kockakettőzés babiloni származású, és az $x^3=2a$ alakú egyenlettel kapcsolatos köbgyökvonás geometriai értelmezéséhez fűződik. Az egyik legenda szerint - és a kockakettőzést ezért nevezik déloszi problémának is - Délosz szigetén pestisjárvány dühöngött. Az istenek azt kívánták, hogy a kocka alakú oltárkövet kettőzzék meg, és akkor elmúlik a járvány. A kívánság teljesítésére törekedve azonban kitűnt, hogy a kőfaragók nem tudják megmondani, mekkora a kétszer nagyobb térfogatú kocka éle, hiszen ehhez kellett volna az $x^3=2$ egyenlet megoldása, illetve a $\sqrt[3]{2}$ hosszúság megszerkesztése. Az építészek Eratoszthenész szerint Platónhoz fordultak tanácsért, aki felvilágosította a tanácstalanokat, hogy az isteneknek voltaképpen nincs szükségük kétakkora oltárra, és kívánságukkal csak azt akarták elérni, hogy az emberek ne hanyagolják el a matematika művelését. Platón válaszában még jól felismerhető az a püthagoreusi felfogás, amely a matematikával való foglalkozást isteni ügynek tekinti. ERATOSZTHENÉSZnek ez az elbeszélése a Platónikosz című dialógusában már csak azért sem valószínű, mert tudjuk, hogy Platón előtt már például Püthagorasz is foglalkozott a szóban forgó problémával. Egy másik legenda a feladat eredetét Minósz király idejére viszi vissza, aki a Glaukosz tengeri isten számára emelt kocka alakú emlékmű megkétszerezését kívánta.

HIPPOKRATÉSZ (i. e. 450 körül)

34. ábra

35. ábra

A körnégyszögesítés és a kockakettőzés megoldásában a kezdeti sikereket a khioszi **Hippokratész** érte el. (Nem tévesztendő össze kortársával a koszi **Hippokratésszel,** korának híres

orvosával.) A Khiosz szigetén született **Hippokratész** kereskedő volt, aki szerencsétlen ügyletei miatt Bizáncban teljesen tönkrement. Azt is mondják, hogy kalózok rabolták ki. Úgy látszik azonban, maradt még annyi vagyona, hogy Athénba költözve geometriával foglalkozzék.

Proklosz tudott róla, hogy volt egy *Sztoikheia (Elemek)* című, kitűnő, összefoglaló jellegű geometriakönyve. Ebben a sajnos elveszett műben a korabeli geometriai ismeretek egymásra épülő tárgyalása lehetett, egy teljes évszázaddal megelőzve **Eukleidész** hasonló című művét.

Hippokratész önálló eredményei a körnégyszögesítés és a kockakettőzés sikeres előkészítésének tekinthetők. Ha nem is tudott egy adott körhöz azzal egyenlő területű négyzetet szerkeszteni, de elsőként alakított át körívekkel határolt síkidomokat (holdacskákat) azokkal egyenlő területű négyszögekké, ha úgy tetszik, négyzetekké. Bizonyításaihoz felhasználta a hasonlóságot. Tudta, hogy a hasonló síkidomok területei úgy aránylanak, mint megfelelő lineáris méreteik négyzetei. Speciálisan arra épített, hogy hasonló körszeletek területének aránya egyenlő a hozzájuk tartozó alapok négyzeteinek arányával. Az erre alapozott egyik tétele kimondja, hogy a *34. ábra* bevonalkázott *AB* holdacskájának a területe akkora, mint a szintén bevonalkázott egyenlő szárú derékszögű háromszög területe. Az ábra jelöléseit használva a körszeletek hasonlósága miatt területük aránya:

$T : t = 2r^2 : r^2.$

Innen: $T = 2t$, *és* így:

$$h = \frac{r^2\pi}{2} - T = \frac{r^2\pi}{2} - 2t = \tau.$$

A háromszög átalakítása ugyanolyan területű téglalappá már akkor sem okozott nehézséget. Másik hasonló tételét a *35. ábráról* olvashatjuk le. A két bevonalkázott holdacska területének összege akkora, mint a derékszögű háromszög területe, mert:

$$h=\tau_1+\tau_2=t+\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}=$$
$$=t+\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)=t.$$

A harmadik „holdacskatétel” a *36. ábra* segítségével: A bevonalkázott területek összege egyenlő az egyenlő szárú trapéz területével, mert:

$$3t+\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}=T_{ABCD}+4\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{r^2\pi}{2}=T_{ABCD}.$$

A felsorolt három feladatban az a közös, hogy a holdacskák mindegyikének a nagyobb köríve félkör volt. A soron következő igazolásban a holdacska hosszabb köríve a félkörnél nagyobb. Ezt **Hippokratész** a következőképpen érte el: Megszerkesztette az *ABCD* egyenlő szárú trapézt *(37. ábra).* Ennek a kisebbik párhuzamos oldala akkora, mint a trapéz szára, és a nagyobbik párhuzamos oldal négyzete háromszor akkora volt, mint az egyenlő oldalak bármelyikének a négyzete. Megrajzolta a trapéz köré írható kört *(k),* végül a trapéz d alapjára az *AaD* körszelethez hasonló szeletet szerkesztett. Igazolta, hogy a két körívvel határolt *ABCD* holdacska területe akkora, mint a trapéz területe. Előbb azonban azt is kimutatta, hogy a holdacska nagyobb köríve valóban hosszabb a k kör félkerületénél. Ehhez megrajzolta a trapéz BD átlóját is. Mivel a BDC háromszög tompaszögű, ezért $b^2>2a^2$. A szerkesztés szerint:

$d^2=3a^2=2a^2+a^2 < b^2+a^2$,

tehát az *ABD* háromszög a szöge hegyesszög. Emiatt az *ADCB* ív hosszabb a *k* kör félkerületénél.

A bizonyításból kitűnik, hogy **Hippokratész** ismerte nemcsak a Pitagorasz-tételt, hanem annak általánosítását és megfordítását is, azaz tudta, hogy ha az a, b, c oldalú háromszögre igaz, hogy $a^2+b^2=c^2$, akkor a c-vel szembeni szög: $\gamma=90^\circ$, ha pedig $a^2+b^2<c^2$, akkor a c-vel szembeni szög: $\gamma>90^\circ$, és ha $a^2+b^2>c^2$,

akkor a c-vel szembeni szög: $\gamma < 90°$.

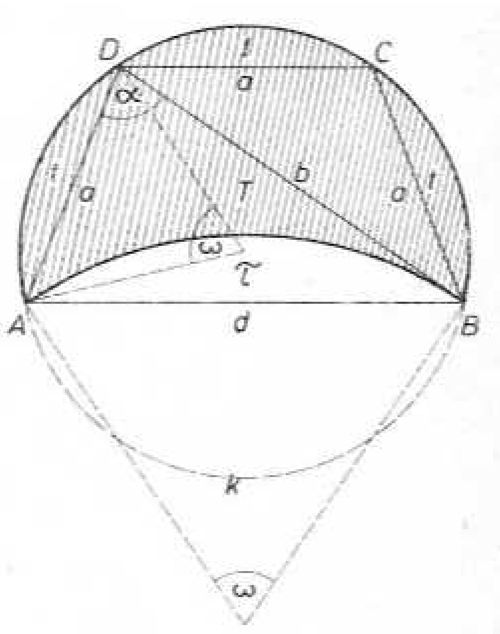
A területekre vonatkozó állítás belátása nem volt nehéz, hiszen a hasonlóság miatt:

$\tau : t = d^2 : a^2 = 3a^2 : a^2$, ahonnan $\tau = 3t$,

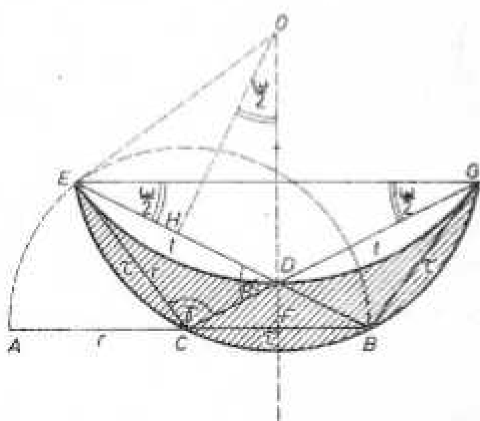
tehát az ABCD holdacska h területe:

$h = T_{ABCD} + 3t — \tau — T_{ABCD}$, ahol T_{ABCD} a trapéz területe.

Érdekes az a gondolatmenet is, amelynél a holdacska nagyobb köríve kisebb a vele egyenlő sugarú félkörnél. Ilyen holdacskát **Hippokratész** a következőképpen állított elő: A *38. ábrán* az $AB = 2r$ átmérő fölött félkör van. Rajzoljuk meg a $CB = r$ sugár felezőmerőlegesét: *FO.* Szerkesszük meg az $ED = a$ hosszúságot úgy, hogy $a^2 = 3/2r^2$ legyen azaz *a* mértani közepe r-nek és 3/2r-nek.



37. ábra



38. ábra

Helyezzük el az így megszerkesztett *ED* szakaszt úgy, hogy egyik végpontja a félköríven, a másik pedig a felezőmerőlegesen legyen, és meghosszabbítása a *B* ponton menjen át (ez nem euklideszi szerkesztési lépés!). Ha egy vonalzóra kijelöljük az $ED=a$ távolságot, akkor elhelyezhetjük a vonalzót, illetve a rajta feltüntetett *ED* szakaszt a kívánt módon. A görögök ezt a szerkesztést neuszisz szerkesztésnek nevezték (neuszisz = hajlás, irány). Húzzunk ezután az *E* ponton át az *AB* átmérővel párhuzamost, és messük ezt el a *CD* egyenessel. A metszéspont: *G.* Az *E, C, B, G* pontok egyenlő szárú trapézt határoznak meg. E trapéz köré kör írható. Ugyancsak kör rajzolható az *EDG* háromszög köré is. Állítjuk, hogy e két kör által határolt *ECBGD* holdacska területe akkora, mint az *EDC,* a *CBD* és a *BDG* háromszögek területösszege.

Az igazoláshoz be kell látnunk, hogy a holdacska nagyobb köríve kisebb, mint a vele egyenlő sugarú félkör, és hogy a τ és a t területű körszeletek hasonlók. Ez az utóbbi bizonyítás hiányzik, az előbbi pedig csak hiányosan olvasható **Szimplikiosz** (VI. század) újplatonista filozófus töredékekben fennmaradt művének egy részletében, amelyet **Eudémosz** elveszett matematikakörténetéből vett át.

Az előbbi feladat mintájára beláthatjuk, hogy az *ECBG* körív valóban kisebb a félkörnél. Az ábra feltételei szerint ugyanis $a^2 = 3/2r^2$, tehát $a^2 > r^2$. Ebből következik, hogy az *ECD* háromszögben

az $EC = r$-rel szembeni szög: $\alpha < 90°$, tehát a *CDB* szög $> 90°$. Ekkor pedig a *CBD* háromszögből: $r^2 > 2b^2$, ahol $b = CD = DB$. Mivel azonban:

$$a^2 = \frac{3}{2} r^2 = r^2 + \frac{1}{2} r^2,$$

azért

$$a^2 > r^2 + b^2,$$

és így az *ECD* háromszögben a γ, amely egyszersmind az *ECBG* kör kerületi szöge is, tompaszög. Ebből következik, hogy az *ECBG* ív kisebb a félkörnél.

A szögek vizsgálatával az említett körszeletek hasonlósága is kiviláglik. Ha ugyanis az *EDG* ív körének középpontja *O* (az *EG* felezőmerőlegesén), akkor az ábra kétköríves szögeinek egyenlősége következik egyrészt abból, hogy a *HOD* szög és a *GED* szög merőleges szárú hegyesszögek, másrészt abból, hogy az *EDG* háromszög egyenlő szárú. Az *EDG* szög az *EC* húrhoz tartozó kerületi szög, tehát a hozzá tartozó középponti szög ω, éppen úgy, mint az *ED* húrhoz tartozó középponti szög. A *t* és a τ területű szeletek tehát hasonlók. Így:

$$t:\tau = a^2:r^2 = 3/2r^2:r^2$$

ahonnan: $2t = 3\tau$. A holdacska *h* területe tehát:

$$h = T_{ECBGD} - 2t + 3\tau = T_{ECBGD}$$

Az *ECBGD* ötszög pedig négyszögesíthető.

Sokat elárul az i. e. V. századi görög geometriai ismeretekből, ha figyelemmel kísérjük, hogyan négyszögesítette **Hippokratész** egy holdacska és egy kör együttesét. A *39. ábrán* a kiindulás két koncentrikus kör. A nagyobbik (*K*) sugarának a négyzete hatszor akkora, mint a kisebbik *k* kör sugaráé: $R^2 = 6r^2$. A belső kis körbe rajzoljunk szabályos hatszöget. Az *OA, OB, OC* sugarak meghosszabbításai kivágják a *K* körből a *D, E* és *F* pontokat. A *DEF* egyenlő szárú háromszög alapjára rajzoljunk olyan körszeletet,

amely hasonló a *t* területű szelethez. Felhasználva az $AB=a$, a $DE=b$ és $DF=c$ közötti összefüggéseket, amelyek szerint:

39. ábra

$b^2=6a^2$ és $c^2=3b^2$, $r=6t_1$, és $\tau=3t=18t_1$,

a *DEF* holdacska *h* területe:

$h=T_{DEF}+2t-\tau=T_{DEF}+12t_1-18t_1=T_{DEF}-6t_1$,

ahol T_{DEF} a DEF háromszög területét jelenti. Átrendezve:

$h+6t_1=T_{DEF}$

Ha most az egyenlőség mindkét oldalához hozzáadjuk a belső kis körbe rajzolt szabályos hatszög területét, akkor a bal oldalon a holdacska és a belső kör területösszege, a jobb oldalon pedig a *DEF* háromszög és a belső szabályos hatszög területösszege áll:

$h+r^2\pi=T_{DEF}+t_{hatszög}$

A háromszög és a hatszög négyzetesíthető, tehát az összegük is.

Nem akarjuk ismét felsorolni mindazokat a tételeket és fogalmakat, amelyeket HIPPOKRATÉSZnak az i. e. V. században már ismernie

kellett a fenti bizonyítások végrehajtásához, csupán rámutatunk néhányra: a hasonlóságra, a kerületi és középponti szögekre, a Pitagorasz-tétel megfordítására és általánosítására, a szabályos hatszög tulajdonságaira, a mértani közép szerkesztésére, valamint a sokszögek négyzetesítésére. Külön kiemelendő HIPPOKRATÉSZnál bizonyításainak szigora, az egyenlőtlenségekkel való ügyes bánásmód és a tételeknek egymásra épülő, tehát axiomatikus alapozást sejtető szerkezete. Mindezek a 2500 évvel ezelőtti geometriának csodálatunkat méltán kivívó fejlettségét mutatják.

Hippokratész érdemeihez tartozik az is, hogy nemcsak a körnégyszögesítés feladatában, hanem a kockakettőzés megoldásában is megtette az alapozó lépéseket, amelyekre utódai számos szellemes szerkesztést építettek. Lényegében a négyzetkettőzés feladatát általánosította.

Ha ugyanis az adott a oldalú négyzethez szerkesztenünk kell $2a^2$ területű négyzetet, akkor az a és a 2a mértani középarányosát kell megszerkesztenünk, vagy ami ugyanaz, keresnünk kell olyan x távolságot, amely kielégíti az

$$a : x = x : 2a$$

aránypárt. Az akkori szóhasználattal élve: az a és a 2a közé egy mértani közepet kell iktatni. Hippokratész úgy okoskodott, hogy a hasonló térbeli feladat esetén nem egy, hanem két mértani középarányost kell az a és a 2a közé beilleszteni, és ezek kisebbike a keresett megoldás, azaz a $2a^3$ térfogatú kocka éle. Ezt úgy kell értenünk, hogy az a-hoz és a 2a-hoz keresünk olyan x és y szakaszt, amelyek kielégítik az

$$a : x = x : y = y : 2a$$

folytonos aránypárláncolatot. Ekkor valóban:

$x^2 = ay$ és $xy = 2a^2$.

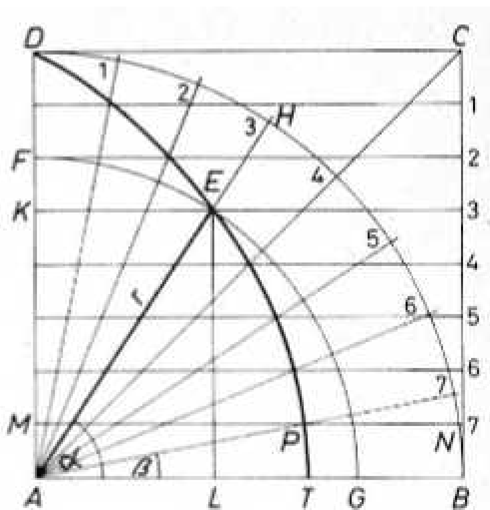
Az első egyenlőségből $y = x^2/a$. Ezt beírva a másodikba: $x^3 = 2a^3$, tehát az x élű kocka térfogata csakugyan kétszerese az a élű kockáénak. Magával a szerkesztéssel azonban Hippokratész már nem boldogult.

HIPPIASZ (i. e. 420 körül)

A szögharmadolás, vagyis adott tetszőleges szögnek szerkesztéssel három egyenlő részre osztása először az éliszi **HIPPIASznak** sikerült. A Peloponnészoszi-félsziget északkeleti partvidékén, Éliszben született i. e. 460 táján. Állítólag igen magas kort ért meg: 99 éves korában hunyt el. Igen okos, rendkívül sokoldalú szofista volt, a szofisták azon csoportjából, amely a jogtörvényeket természetelleneseknek minősítette, és csupán a hatalom elnyomó eszközét látta bennük. Mint hivatásos tanító, oktatott retorikát, politikát, költészetet, zenét, képzőművészeteket, filozófiát, csillagászatot és matematikát. PLATÓNnak két dialógusában is szerepel. Ezekben **Platón** kigúnyolta **Hippiasz** hiúságát, de csodálta sokoldalúságát és hihetetlen memóriáját, amellyel képes volt egyszeri hallás után akár 50 nevet is elismételni. **Hippiasz** azzal dicsekedett, hogy tanításával kétszer annyit keres, mint bármely más szofista.

Matematikai érdeme, hogy feltalálta az általa triszektrixnek nevezett görbét, amelyet - mint az elnevezése is mutatja - a szögharmadolásra használt fel. **Papposz** leírása szerint **Hippiasz** a triszektrix görbét a következőképpen származtatta: A *40. ábrán* az *ABCD* négyzetben a *DC* oldal mozogjon egyenletesen, önmagával párhuzamosan mindaddig, amíg össze nem esik az *AB* oldallal.

Ugyanezen idő alatt a négyzet *AD* oldala végezzen egyenletes forgó mozgást negatív irányban az *A* centrum körül, amíg az is fedésbe nem kerül az *AB* oldallal. Az *AD* forgása és a *DC* eltolódása egyszerre kezdődjék és egyszerre végződjék. A két oldal mozgásuk minden pillanatában metszi egymást. Ezen metszéspontok összessége a triszektrix. Ilyen módon a görbének csak egyetlen pontja marad meghatározatlanul: az ábra szerinti *T* pont. Mivel az *AD* szakasz és a *DAB* derékszög sorozatos, egymás utáni felezésével a görbe tetszőleges, de véges számú pontja megszerkeszthető (körzővel és vonalzóval), azért az elég sűrűn megkapott pontokból a görbe igen jól megrajzolható, és így a *T* pont helye is igen pontosan meglelhető. Azt hiszem, érthető, hogy **Hippiasz** idejében a *T* pont meghatározása még nem okozott gondot.



40. ábra

A görbe származtatásából következik, hogy

$$\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{BH} = \overline{AD} : \overline{EL}.$$

Ha például a *HAB* = α szöget akarjuk *n* egyenlő részre osztani, akkor az aránypár alapján az *EL* = *KA* szakaszt kell *n* egyenlő részre bontani, aztán az *A*-tól számított első osztóponton át megrajzoljuk az *AB-vel* párhuzamos *MN* szakaszt. Ez kimetszi a triszektrixből a *P* pontot. A *PAT* = *β* szög az α szög n-ed része.

Vegyük észre, hogy a

$$\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{BH} = \overline{AD} : \overline{EL}$$

aránypár tökéletesen jellemzi a görbét. A görögök az ilyen összefüggést a görbe „szümptómájá”-nak (jellemzőjének) nevezték. Ez pontosan megfelel annak, amit ma a görbe egyenletének hívunk. Azért, hogy lássuk, mennyire azonos e kettő, alakítsuk át **Hippiasz** aránypárját. Az egyszerűség kedvéért legyen *AD* = 1, és jelöljük a görbe tetszőleges E pontjához tartozó AE-t r-rel. Így BD = π/2, BH = α, AD = 1 és EL = r•sin α. Ekkor az aránypár:

$$\pi/2 : \alpha = 1 : r \cdot \sin \alpha,$$

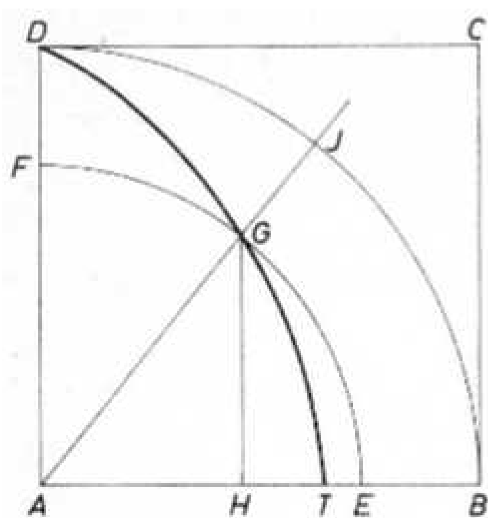
azaz

$\alpha = \pi/2 \ r \sin \alpha$.

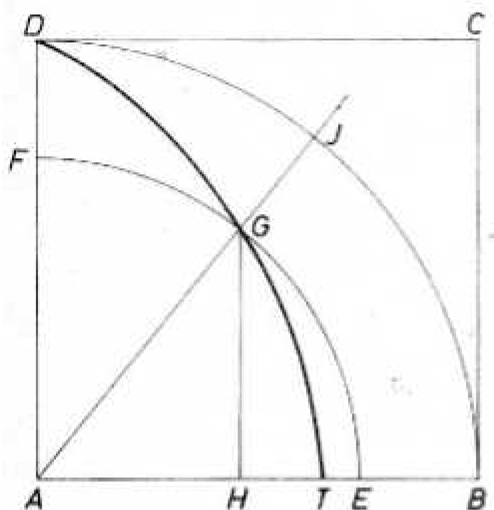
Ebben pedig ráismerhetünk a triszektrix (más nevén a kvadratrix) polárkoordinátás egyenletére.

DEINOSZTRATOSZ ÉS MENAIKHMOSZ (i. e. 350 táján)

E testvérpár mindegyikének mestere a híres matematikus, Eudoxosz (i. e. 400?-347?) volt. Eudoxosz beoltotta tanítványaiba saját mesterének, PLATÓNnak a szellemét. Deinosztratosz a kör négy szögesítésével, Menaikhmosz pedig a kúpszeletek feltalálásával örökítette meg nevét.



41. ábra



42. ábra

Deinosztratosz észrevette, hogy a **Hippiasz** által feltalált triszektrix alkalmas a körnégyszögesítés feladatának a megoldására is. Ehhez azonban az kellett, hogy **Deinosztratosz** észrevegye azt a tételt, amelyet **Papposz** bizonyításával ismerünk. E szerint a *41. ábrán*

$$\widehat{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AT}.$$

Tegyük fel ugyanis, hogy ez az aránypár nem igaz. Ekkor az aránypár negyedik tagja vagy nagyobb, vagy kisebb *az AT* szakasznál.

Tételezzük fel először, hogy nagyobb, azaz *AT* helyett valami $AE > AT$ szakaszt kell írnunk ahhoz, hogy az aránypár helyes legyen. Rajzoljuk meg ekkor az *AE* sugárral az *A* pont körüli *EF* negyedkört. Ez a kvadratrixet elmetszi a *G* pontban. E *G* pontból állítsunk merőlegest az *AB* szakaszra: ez *GH.*

A feltevés értelmében:

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AE} = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{EF}.$$

A

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{EF}$$

aránypárban az első és a harmadik tag egyenlő, tehát

$$\overline{AD} = \overset{\frown}{EF}.$$

A kvadratrix szümptómája szerint viszont:

$$\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{BJ} = \overset{\frown}{EF} : \overset{\frown}{EG} = \overline{AD} : \overline{HG}.$$

Mivel továbbá

$$\overset{\frown}{EF} = \overline{AD},$$

azért

$$\overline{AD} : \overset{\frown}{EG} = \overline{AD} : \overline{HG}.$$

Eszerint azonban

$$\overset{\frown}{EG} = \overline{HG},$$

ami pedig lehetetlen, vagyis a kezdeti aránypárban az *AT* helyett nem írható a nagyobb *AE.*

Tételezzük fel most, hogy az *AT-t* valami kisebb *AE-vel* kell helyettesítenünk ahhoz, hogy a

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AT}$$

aránypár helyessé váljék *(42. ábra).* Állítsunk ekkor az *E* pontban merőlegest az AB-re (*EF),* és rajzoljuk meg az *AE* sugarú negyedkört:

ez $\overset{\frown}{EG}$.

Az *AF* egyenes a két negyedkörből kimetszi a H, illetve a *J* pontot. A feltevés értelmében:

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AE} = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{EG}.$$

A

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{EG}$$

aránypárból

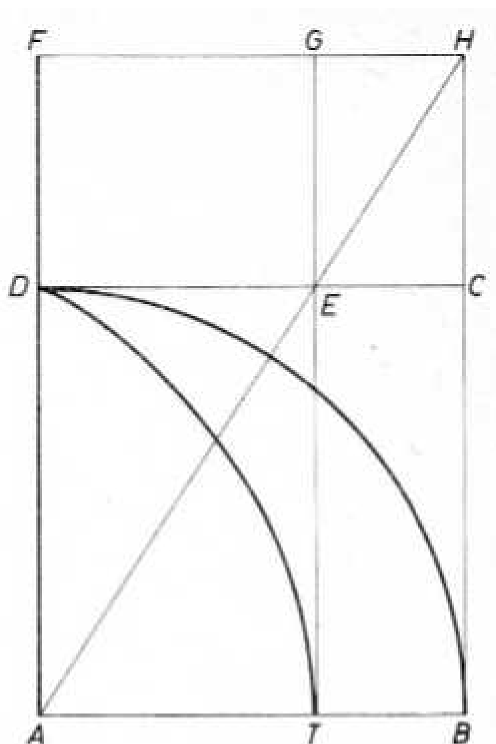
$$AD = \overset{\frown}{EG}.$$

A kvadratrix szümptómája:

$$\overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{BJ} = \overset{\frown}{EG} : \overset{\frown}{EH} = \overline{AD} : \overline{EF}.$$

Mivel

$$\overset{\frown}{EG} = \overline{AD}, \quad \text{azért} \quad \overline{AD} : \overset{\frown}{EH} = \overline{AD} : \overline{EF}.$$



43. ábra

Ebből viszont az következik, hogy

$$\overset{\frown}{EH} = \overline{EF},$$

ami szintén lehetetlen, hiszen az *AEF* háromszög területe nagyobb, mint az *AEH* körcikké, tehát:

$$\overline{AE} \cdot \overline{EF} > \overline{AE} \cdot \overset{\frown}{EH}, \quad \text{illetve:} \quad \overline{EF} > \overset{\frown}{EH}.$$

Ha tehát a

$$\overset{\frown}{BD} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AT}$$

aránypárban a negyedik tag nem lehet sem nagyobb, sem kisebb *AT-nél,* akkor az aránypár helyes.

A tétel alapján a *BD* ív hossza az aránypár többi tagjából megszerkeszthető. Ezt a szerkesztést a görögök területátalakításokkal végezték el. Az aránypár szerint ugyanis

$$\overset{\frown}{BD} \cdot \overline{AT} = \overline{AD}^2,$$

(1)

tehát ha az *AD* oldalú négyzethez szerkesztünk a négyzetével egyenlő területű, *AT* oldalú téglalapot, akkor annak a másik oldala éppen *BD* hosszú lesz. A szerkesztést a *43. ábra* szemlélteti. Ezen

$$\overline{AF} = \overset{\frown}{BD},$$

mert az

$$AHF\triangle \cong ABH\triangle, \quad AED\triangle \cong ATE\triangle \quad \text{és az} \quad EHG\triangle \cong ECH\triangle$$

egybevágóságok miatt:

$t_{AHF} - t_{AED} - t_{EHG} = t_{ABH} - t_{ATE} - t_{ECH}$

azaz

$t_{DEGF} = t_{TBCE}$

Így

$t_{ATED} + t_{DEGF} = t_{ATED} + t_{TBCE}$

vagy

$t_{ATGF} = t_{ABCD}$

tehát

$$\overline{AF} \cdot \overline{AT} = \overline{AD}^2.$$

Visszatekintve az (1) egyenlőségre:

$$\overline{AF} = \widehat{BD}.$$

Végezetül: az *AB* = *r* sugarú körével egyenlő területű négyzet szerkesztéséhez **Deinosztratosz** tudta, hogy az *r* sugarú kör területe akkora, mint annak a háromszögnek a területe, amelynek alapja a kör kerülete

$(4\overline{AF})$

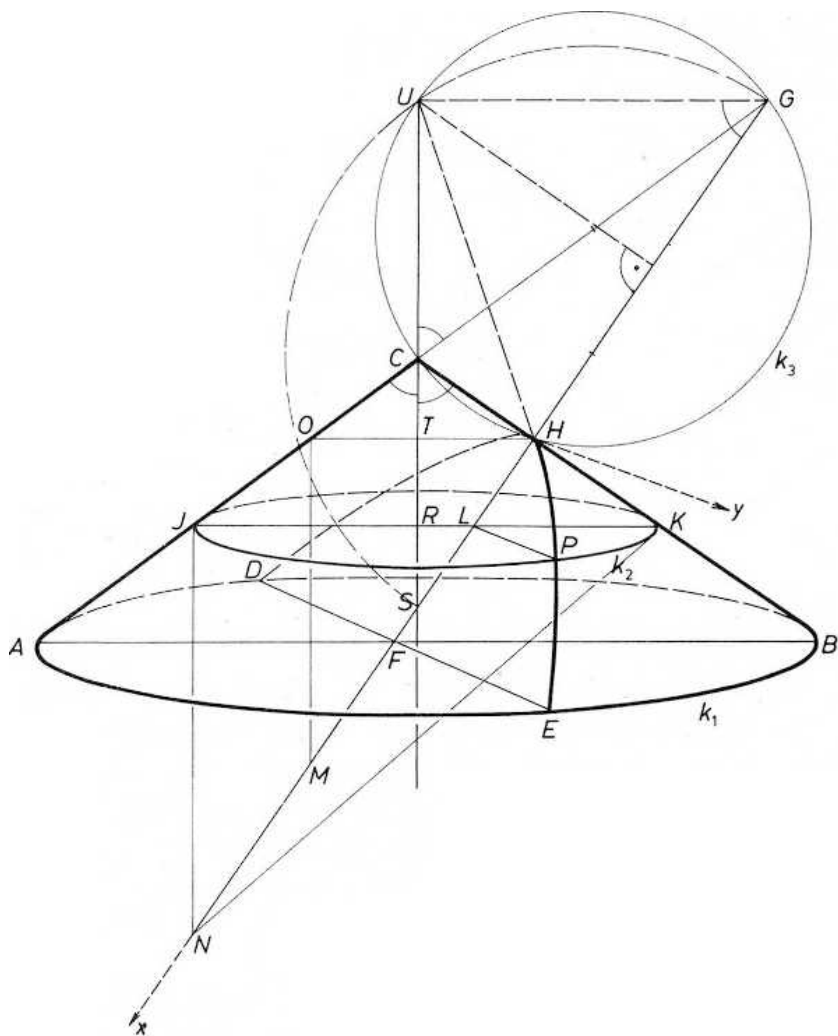
és magassága a kör sugara *(AB)*.

(Ennek a bizonyítását először ARKHIMÉDÉSZnél találjuk meg.) Így az adott sugarú kör a kvadratrix segítségével háromszögesíthető, a háromszög pedig négyzetesíthető. Természetesen a kvadratrix euklideszi módon nem szerkeszthető meg.

Menaikhmosz, Deinosztratosz testvére a kockakettőzésben ért el sikereket. Ő Nagy Sándor egyik nevelője volt. A monda szerint, amikor a későbbi hódító megkérdezte mesterét: Hogyan lehetne a geometriát könnyebben elsajátítani, akkor Menaikhmosz így felelt: „Óh, király, országodban az utazás számára készültek külön királyi utak, és olyanok, amelyeket a közönséges polgárok használnak, de a geometriához mindenki számára csak egyetlen út vezet.” E hagyomány hitelességét erősen lerontja az, hogy hasonló legenda ismeretes EUKLEIDÉSSZEL és neveltjével, Ptolemaiosz királlyal kapcsolatban is. Proklosz azt írta MENAIKHMOSzról, hogy jelentősen továbbfejlesztette a geometriát, munkái azonban nem maradtak fenn, így csak a kúpszeletek felfedezését tudjuk neki tulajdonítani, habár ez sem kevés.

A forgáskúpokat nyílásszögük szerint három csoportra osztotta: tompaszögű, derékszögű és hegyesszögű kúpokra.
Mindegyiket olyan síkkal metszette, amely merőleges valamelyik alkotóra. Így nyerte a tompaszögű kúp síkmetszetét (hiperbolát), a derékszögű kúp síkmetszetét (parabolát) és a hegyesszögű kúp síkmetszetét (ellipszist). Ennek a három kúpszeletnek néhány tulajdonságát, sőt mindegyiknek a szümptómáját is megállapította.

44. ábra



Érdemes figyelemmel kísérni, hogy H. G. **Zeuthen** matematikatörténész szerint hogyan jutott **Menaikhmosz** egy speciális tompaszögű kúp síkmetszetének (a derékszögű hiperbolának) a szümptómájához. A *44. ábrán* felrajzolt *ABC* tompaszögű kúp *BC* alkotójára merőleges síkmetszet az *EHD* hiperbola. Ezen jelöljük ki a tetszőleges *P* pontot. A *P* ponton át fektessünk a k_1 alapkörrel párhuzamos síkot, amely kimetszi a kúpból a k_2 kört. Ennek a síkjában, a *P* pontból állítsunk merőlegest a hiperbola *HF* szimmetriatengelyére: ez *PL*. Rajzoljuk meg a tengely és a (BC-vel ellentett) *AC* alkotó *G* metszéspontját, valamint a *HOM* és *KJN* derékszögű háromszögeket *(HO||KJ)*. Az ábra szerinti *JPK* (meg nem rajzolt) derékszögű háromszögből:

$LP^2 = KL*LJ.$

Az *LKH* és *LNJ* hasonló háromszögekből:

KL : *HL* = *LN* : *LJ,* tehát *KL**LJ* = *HL**LN,*

és így:

$LP^2 = HL*LN.$

Az LNJ és *HMO,* illetve a *JLG* és *OHG* hasonló háromszögpárokból pedig

LN : HM = U:HO = GL : GH,

ezért

$$LN = \frac{HM \cdot GL}{GH}.$$

Végül: a keresett jellemző összefüggés, vagyis a hiperbola szümptómája:

$$LP^2 = HL \cdot \frac{HM \cdot GL}{GH}.$$

A bevezetésben jelzett specializálás abból áll, hogy olyan

tompaszögű kúpot választunk, amelynél *GH* = *HM*. Ekkor a szümptóma egyszerűsödik:

$LP^2 = HL*GL$.

Könnyű belátni, hogy ez azonos a derékszögű hiperbola általunk ma használt egyenletével. Vezessük be ugyanis az $LP = y$, $HL = x$ és $GH = 2a$ jelöléseket, akkor az

$y^2 = x(x + 2a)$

egyenletet nyerjük, ami kis átalakítással:

$$y^2 - (x+a)^2 = -a^2, \quad \text{illetve} \quad \frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

formát ölt. Ebben pedig ráismerünk annak az egyenlő tengelyű, illetve derékszögű hiperbolának az egyenletére, amely a *H* origójú, *HN* abszcisszatengelyű koordináta-rendszerre vonatkozik, ha az ordinátatengely a hiperbola síkjában az LP-vel párhuzamos egyenes - úgy, ahogyan ezt a *44. ábra* mutatja.

Nyitva maradt azonban még az a kérdés, hogyan kell a tompaszögű kúpot úgy megválasztani, hogy a tárgyalt különleges eset következzék be, amelynél a hiperbola derékszögűvé válik, azaz amelynél *GH* = *HM* lesz.

Ezt a szerkesztési feladatot **Menaikhmosz** szintén megoldotta a következőképpen: Egészítsük ki rajzunkat a kúp tengelyével, amely az *OH* szakaszt a *T*, a *JK-t* az *R* és a *HM-el* az *S* pontban metszi. A *TS* szakasza *HOM* háromszög középvonala, tehát *MS* = *SH*, és a szerkesztési feltétel szerint *2HS* = *HG* = *2a*.

A probléma tehát így alakul: Adott a *GH* = *2a* és a *GH* egyenesén a *HS* = *a* szakasz. Szerkesztendő olyan kúp, amelynek tengelye az *S* pontban metszi *; CB* alkotóra merőleges sík által kimetszett egyenlő oldalú hiperbola *GS* tengelyét, azaz a *GHS* egyenes *H* pontján átmenő merőlegesen találni kell egy *C* pontot úgy, hogy a *GCH* szög *OCH* kiegészítő szögét a kúp *CS* tengelye felezze.

Tegyük fel, hogy a *C* pont már megvan. Rajzoljunk a *CHG*

háromszög köré kört *(k3)*. A *CHG* háromszögben a *H* szög derékszög, tehát *CG* a k_3 kör átmérője. Ezt a kört a kúp *CS* tengelye metszi az *U* pontban. Mivel *CG* átmérő, azért a *CUG=SUG* szög derékszög, tehát az *U* pont rajta van az *SG* szakasz Thalész-körén.

Továbbá: Az *UCH* és az *UGH* kerületi szögek kiegészítő szögek, tehát

$$UGH\sphericalangle = SCH\sphericalangle = SCA\sphericalangle = UCG\sphericalangle .$$

Mivel tehát az UGJ szög = UCG szög, és mindkettő ugyanazon körben kerületi szög, azért egyenlők a hozzájuk tartozó húrok is, azaz *UG=UH.* Ez azt jelenti, hogy a *HGU* háromszög egyenlő szárú, tehát *U* rajta van a *HG* szakasz felezőmerőlegesén. Amint ezt láttuk, az *U* pont illeszkedik az *SG* szakasz Thalész-körére is, tehát az adott G, *H, S* pontokhoz az *U* megszerkeszthető. Az *US* egyenes pedig kivágja a *HG*-re merőleges *HB* egyenesből a kívánt C pontot, amely már meghatározza a keresett speciális kúpot.

Eutokiosz (szül. 480 körül) leírta, hogy Menaikhmosz ismerte a derékszögű hiperbola aszimptotáinak azt a meghatározó tulajdonságát is, amelynek bemutatásához mi felhasználjuk a koordinátarendszert, ami lényegében csak jelölésbeli különbséget jelent.

A *45. ábra* derékszögű hiperbolájának egyenlete (szümptómája):

$a^2 = x^2—y^2$.

Ez az ábra jelöléseivel:

$OA^2=OK^2-KP^2 = OK*KD-KP*FK=2(t_{OKD}-t_{FPK}) = 2t_{OFPD}=2t_{OCPB},$

azaz $OA^2=2OB*BP$ vagy $OB*BP=t_{OAE}$.

Mivel az *OAE* háromszög területe állandó ($t_{OAE}=a^2/2$), azért ha a derékszögű hiperbola tetszőleges *P* pontjából párhuzamost húzunk a *P* ponthoz közelebbi aszimptotával, akkor az ábra szerinti *OCPB* téglalap területe minden *P* pontra nézve állandó, éspedig éppen az *OAE* egyenlő szárú derékszögű háromszög területe.

Ennyi tudás mellett - és ezek csak a fennmaradt emlékek - hihető, hogy **Menaikhmosz** észrevette a kockakettőzésnek a kúpszeletekkel való megoldási lehetőségét, amelyet mi szintén mai jelöléseinkkel követünk. Idézzük emlékezetünkbe, hogy **Hippokratész** szerint az a élű kocka kettőzésének megoldását adja az

$$a : x = x : y = y : 2a$$

összetett aránypár x tagja. Az aránypárlánc felbontása két feltételt szolgáltat:

$xy = 2a^2$ és $x^2 = ay$.

Az egyik hiperbola, a másik parabola szümptómája. A kétszeres térfogatú kocka élét adja az az x érték, amely az y-nal együtt kielégíti a fenti két egyenletet, tehát a *46. ábrán* szemléltetett hiperbola és parabola metszéspontjának az x abszcisszája.

Természetesen ugyanígy megoldást szolgáltat a Hippokratész-féle aránypárból származó

$x^2 = ay$ és $y^2 = 2ax$

egyenletű parabolák P metszéspontjának abszcisszája is.

Megjegyezzük, hogy **Menaikhmosz** mint csillagász szintén megörökítette nevét azzal is, hogy a később szóba kerülő **Eudoxosz**-nak, volt mesterének bolygóelméletét tökéletesítette.

45. ábra

46. ábra

ARKHÜTASZ (i. e. 428?-365)

A taraszi **Arkhütasz** a kockakettőzés megoldására adott egy káprázatos térbeli szerkesztést. A dél-itáliai dór gyarmatvárosban Taraszban (Tarentum, ma Taranto) született. Tekintélyes államférfi volt, városának 7 éven át legyőzhetetlen hadvezére, feltaláló,

fizikus és matematikus, a püthagoreusok utolsó nagy képviselője. Amikor Krotónt, a püthagoreusok centrumát Szübarisz feldúlta, akkor a püthagoreusok közül is sokan vesztették életüket. A vérfürdőből megmenekültek néhánya Tarentumban kötött ki. Itt történt, hogy a püthagoreus **Philolaosz, Szókratész** kortársa elsőként írta meg a püthagoreusok tanait és eredményeit, hogy a műért befolyó pénz pótolja a szövetség elveszett vagyonát. Maga **Philolaosz** filozófiával, harmóniaelmélettel és a bolygók elméletével foglalkozott. Ennek a PHILOLAOSZnak volt tanítványa **Arkhütasz. Platón** nemcsak ismerőse volt ARKHÜTASZnak, hanem igen jó barátja is. **Carl B. Boyer** matematikatörténész némi iróniával jegyzi meg, hogy ARKHÜTASZnak legnagyobb matematikai érdeme volt **Platón** életének megmentése. **Platónt** ugyanis i. e. 390 táján fogva tartotta **Dionüsziosz,** Szürakusza türannosza, és ki akarta végeztetni. **Platón** életét **Arkhütasz** közbenjárása mentette meg. Való igaz, hogy bár **Platón** nem volt matematikus, de Athénban a matematika tekintélye főleg neki köszönhető, tehát ilyen módon csakugyan elősegítette a matematika fejlődését. **Platón** matematikai ismereteit, amelyeket az *Állam* című művében a vezetők számára kötelezően írt elő, **Arkhütasztól** nyerte. Ezektől eltekintve, **Arkhütasz** maga is eredményesen művelte a matematikát. Ezt tanúsítja, hogy **Eukleidész** nagy művében: a *Sztoikheiá*ban *(Elemek)* az egész VIII. könyvet **Arkhütasz** munkássága tölti ki, sőt EUKLEIDÉSZnek a *Katatomé Kanónosz (A kanón metszete;* kanón volt a monokhord görög neve) címen ismert művének anyaga is jórészt ARKHÜTASZtól származik.

Az *Elemek* VIII. könyvében főként arról van szó, hogy két adott szám közé hogyan lehet egy, két, több számot iktatni úgy, hogy azok folytonos aránypárláncot (tehát mértani sorozatot) alkossanak. (Például: ha az a és b számok közötti két ilyen szám x és y, akkor: $a : x = x : y = y : b$.) *A Katatomé Kanónosz* tárgya pedig a zeneelméletre alapozott számelmélet. A hangtan révén valószínűleg **Arkhütasz volt** az első, aki a mechanikát matematikai alapon tárgyalta. Sejtette, hogy a húr hangmagassága függ a húr rezgési sebességétől. Az az állítása viszont hamis, hogy a magasabb hangok nagyobb sebességgel terjednek, mint a mélyek.

Általában nehezen és körülményesen fogalmazott. Főként éppen a hibáiból lehet arra következtetni, hogy **Eukleidész** műveiben a fent

jelzett részek tőle valók. Hangsúlyozta a matematika szerepét az oktatásban. Talán neki, vagy igazabban: neki is köszönhető, hogy a matematika ma is nagy szerepet játszik az iskolai tanításban. A matematikát négy tárgykörre bontotta. Matematikai kvadriviuma a következő részekre tagolódik: aritmetika (számok a nyugalom esetén), geometria (kiterjedések a nyugalom esetén), zene (számok a mozgásban) és csillagászat (kiterjedés a mozgásban). Ehhez a négyeshez csatlakozott később az iskolai oktatásban még három tárgykör, a trivium: a grammatika, retorika és dialektika. Ezek együtt képezték az ún. hét szabad mesterséget, amely hosszú időkre rögzítette az iskolai tananyagot. Megemlítjük még, hogy mechanikai találmányai: a kereplő és a repülő fagalamb főleg a gyermekek szórakoztatására születtek.

Ismerjük meg végül a szerkesztésnek azt a gyöngyszemét, amely egyedül is megörökítette volna a nevét. **Hippokratész** nyomán tudta, hogy a kockakettőzéshez az adott *a* szakasz esetén azt az *x* szakaszt kell megtalálnia, amely kielégíti az

$$a : x = x : y = y : 2a$$

folytonos összetett aránypárt. Erre a következő, valóban bámulatos térbeli szerkesztést eszelte ki. Az ismertetést egy cseppnyit általánosabban mutatjuk be. A hippokratészi aránypár helyett vegyük az

$$a : x = x : y = y : b$$

aránypárt, amelyben a $b = 2a$ esetén nyerjük a kockakettőzés feltételét. Így tehát adott a-hoz és b-hez keressük az *x* szakaszt. A szerkesztés menetét követhetjük a *47. ábrán.* A *b* átmérőjű *ACDB* kör fölé építsünk egyenes hengert. Az *A* pontból az alapkörre mérjük fel húrként az *a* távolságot *(AB = a),* és ennek az egyenesét messük el a kör *D* pontbeli érintőjével. Nyerjük az *ADP* derékszögű háromszöget. Rajzoljuk meg ezután az *AD* átmérőjű, az alapkör síkjára merőleges *ADS* félkört. Az eddig elkészült rajzot tekintsük alaphelyzetnek. Képzeljük el most, hogy az *ADP* háromszög forgást végez az *AD* tengely körül. Ekkor az *AP* egyenese súrolja az *A* csúcsú egyenes körkúp palástját. Ezen a paláston a *B* pont leírja a *BMC* félkört, valamint az *AP* egyenes és a körhenger palástjának mozgó metszéspontja leír valamilyen görbét, amely az

ábrán nincs feltüntetve. Képzeljük el még azt a mozgást, amelyet az A*SD* félkör végez, miközben forog az *AR* tengely körül. E félkör íve szintén minden pillanatban metszi a hengerpalástot (csak negyed fordulat kell). Ezen metszéspontok összessége szintén alkot a paláston egy görbét. A mozgó *AP* egyenes által rajzolt görbe és az A*SD* félkör által leírt görbe valahol a hengerpaláston metszik egymást.

47. ábra

48. ábra

Ez a közös pont legyen a hengerpalást *K* pontja. A forgó A*SD* félkört

állítsuk meg abban a pillanatban, amikor éppen a *K* ponton megy át: *AKD'.* A mozgó *ADP* háromszöget is rögzítsük abban a helyzetében, amelyben a forgó *AP* szakasz a *K* ponton halad át: *ADP'.* Bocsássunk merőlegest az alapkör síkjára a *K* pontból. Ez az alapkört a *J* pontban metszi. Az *AJ* szakasz a BC-t a *T* pontban metszi, az *AP'* szakasz pedig a *CMB* félkört az *M* pontban. Rajzoljuk meg végül a *KD',* a *JM* és az *MT* szakaszokat. Mivel a *CMB* és az *AKD'* félkörök síkja merőleges az alapsíkra, azért a két félkörlap közös szakasza *(MT)* is merőleges az alapsíkra, és természetesen az alapsík *CB* szakaszára is. A *CMB* derékszögű háromszögből:

$MT^2 = CT*TB$, mert MT^2, illetve a $CT*TB$ a *T* pontnak az alapkörre vonatkozó hatványa. Viszont, ugyanez okból:

$CT*TB = AT*TJ$,

ezért $MT^2 = AT*TJ$. Mivel *MT* merőleges *AJ*-re, ezért kell, hogy az *AMJ* háromszög is derékszögű legyen. Ebből következik, hogy *MJ* párhuzamos *KD'*-sel. Ekkor azonban az *AJM,* az *AKJ* és az *AD'K* háromszögek páronként hasonlók, tehát:

$AM : AJ = AJ : AK = AK : AD'$.

Vegyük számításba, hogy $AD' = b$, $AM = a$, és jelöljük *AJ-t* x-szel és *AK-t* y-nal, akkor:

$a : x = x : y = y : b$.

Ha tehát az adott kocka éle a hosszúságú, akkor a b/a-szor nagyobb térfogatú kocka éle *x* hosszúságú. Ha $b = 2a$, akkor *x* éppen a kétszeres köbtartalmú kocka éle.

Szépen követhető e szerkesztés koordinátageometriai eljárással is. A *48. ábrán* az *(x;y;z)* derékszögű koordináta-rendszerben az origótól *a* távolságra tüntessük fel az *A(a;* 0; 0) pontot. Ez legyen a középpontja két *a* sugarú körnek. Ezek közül a k_1 síkja az (x; z) sík, a k_2-*é* pedig az (x; *y)* sík. A k_1 körre építsünk egyenes hengert, a k_2 kört pedig forgassuk az origó körül úgy, hogy síkja mindig merőleges maradjon az (x; z) síkra. A k_2 ekkor leír egy tóruszfelületet. A B(a/2; 0; 0) pont legyen a centruma egy olyan

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

sugarú körnek, amelynek síkja párhuzamos az (*y*; z) síkkal. Ehhez a körhöz illesszünk egy origó csúcsú egyenes körkúpot úgy, hogy alkotói az *r* sugarú kör pontjain menjenek át.

Az elképzelt három felület egyenlete:

A hengeré: $x^2+z^2=2ax,$

a kúpé: $y^2+z^2=3x^2,$

a tóruszé: $(x^2+y^2+z^2)^2=4a^2(x^2+z^2).$

E három felületnek van közös pontja, az origót nem számítva négy darab. Számítsuk ki, hogy egy ilyen pont *y* koordinátájának a talppontja milyen messze van az origótól. A közös pont *y* koordinátájának talppontja az origótól

$$t=\sqrt{x^2+z^2}$$

távolságra van. Határozzuk meg tehát ezt a távolságot az

$$\left.\begin{aligned} x^2+z^2&=2ax\\ y^2+z^2&=3x^2\\ x^2+y^2+z^2&=2a\sqrt{x^2+z^2}\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerből. Írjuk be az x^2+z^2 helyébe a t^2 jelölést, így

$$\left.\begin{aligned} t^2&=2ax\\ y^2+t^2&=4x^2\\ y^2+t^2&=2at.\end{aligned}\right\}$$

A második és harmadik egyenlet szerint:

viszont

$$\left.\begin{aligned} 4x^2 &= 2at \\ t^2 &= 2ax, \end{aligned}\right\}$$

tehát

$t^3 = 2a^3$, illetve $t = a(\sqrt[3]{2})$,

ami éppen a szerkesztés szerinti x-szel jelölt éle a $2a^3$ térfogatú kockának.

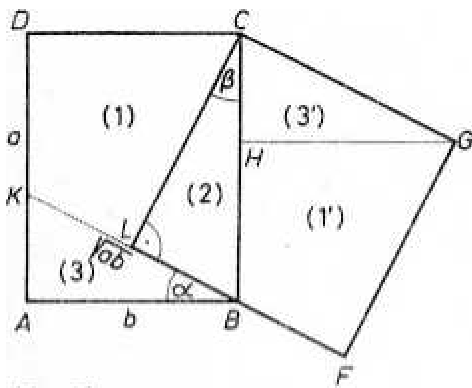
Szebb a koordinátageometriai megoldás, ha a kúpot meghatározó kör centrumának is az $A(a; 0; 0)$ pontot vesszük, és a kör sugarát a-nak. E kör most is párhuzamos az $(y; z)$ síkkal. Az ezzel a körrel definiált, origó csúcsú kúp derékszögű. Így az előbbi henger- és tóruszegyenlethez a kúpnak az

$y^2 + z^2 = x^2$

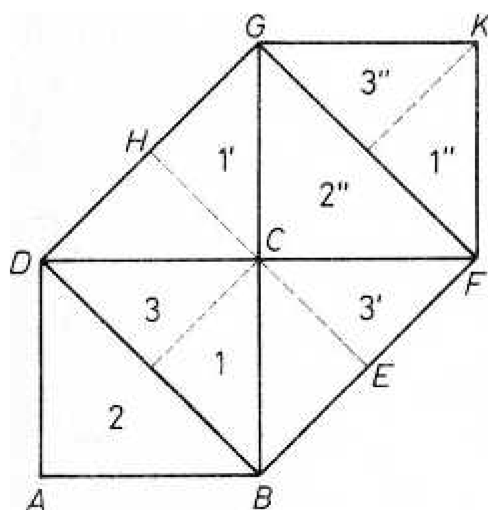
egyenlete társul. Keressük meg az x értékét!

Érdemes megint az $x^2 + z^2$ helyébe például k^2-et írni. Ekkor egyenletrendszerünk:

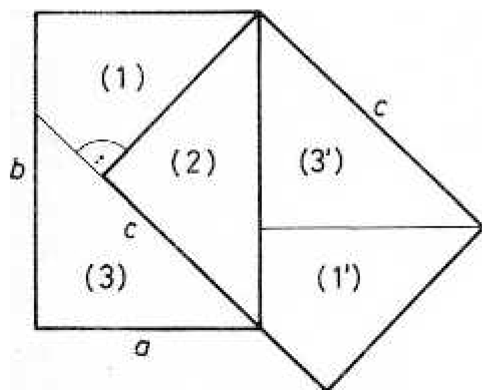
$$\left.\begin{aligned} k^2 &= 2ax \\ y^2 + k^2 &= 2x^2 \\ y^2 + k^2 &= 2ak \end{aligned}\right\}$$



49. ábra



50. ábra



51. ábra

Ebből:

és

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= ak \\ 2ax &= k^2 \end{aligned}\right\}$$

Most tehát az *x* értéke szolgáltatja az $x=a(\sqrt[3]{2})$ értéket (ha $x\neq 0$). Mindkét megoldásban a fennálló szimmetriaviszonyok miatt eredményünket bármely közös pontra vonatkoztathatjuk.

ARKHÜTASSZal kapcsolatban megemlítünk még egy ötletes feladatot : Átdarabolandó egy *a, b* oldalú téglalap négyzetté! **Arkhütasz** megoldása a *49. ábrán* szemlélhető. A keresendő négyzetnek a $\sqrt{ab}$ oldalát meg tudta szerkeszteni. A $\sqrt{ab}$ távolsággal a *B* pontból elmetszette a téglalap szemközti, hosszabbik oldalát. A metszéspont *K.* Ezután a *BK* szakaszra a *C* pontból merőlegest állított: *CL.* Belátható, hogy ha az (1) négyszöget (1')-be toljuk, és a (3) háromszöget a (3')-be, akkor ezek a helyben maradt (2) háromszöggel az *LFGC* négyzetet alkotják. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy az *LC* merőleges hossza is $\sqrt{ab}$. Mivel a *BLC* háromszög hasonló a *KAB* háromszöghöz (α és β merőleges szárú hegyesszögek), azért:

CL : CB = AB : BK, és innen

$$CL=\frac{a\cdot b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}.$$

A megoldás ötletét a négyzetkettőzés ábrája adhatta. (Adott négyzethez szerkesztendő kétszer akkora területű négyzet.) Az *50. ábráról* leolvasható, hogy az *ABCD* négyzet átdarabolásából miként nyerhető az *EFGH* téglalap, és fordítva: az *EFGH* téglalapból az eredetivel egybevágó *CFKG* négyzet.

Arkhütasz átdarabolási eljárásával kaphatunk az *a, b* oldalú téglalapból olyan *c* oldalú téglalapot, amelynél c nagyobb a kisebbik *a* oldalnál, de kisebb a téglalap átlójánál. Egy ilyen átdarabolást szemléltet az *51. ábra.* Ezen a (2) és (3) háromszögek hasonlósága miatt $x : b=a : c$, tehát az új téglalap *x* oldala $x=ab/c$.

Arkhütasz igazolta azt a tételt - amelyet a püthagoreusokról szóló fejezetben ismertettünk -, hogy a kn és a k(n+1) számok közötti mértani középarányos „arrhéton”, ki nem mondható, vagyis nem szám és nem is arány.

ARKHIMÉDÉSZ, ERATOSZTHENÉSZ ÉS APOLLÓNIOSZ

MEGOLDÁSAI

A szürakuszai **Arkhimédész** (i. e. 287?-212) a szögharmadolást és a körnégyszögesítést az általa feltalált arkhimédészi spirálissal oldotta meg. Ezt a görbét két egyenletes mozgás együttesével határozta meg. Miközben az *52. ábrán* az *OX* félegyenes állandó ω szögsebességgel forog az *O* pont körül (a rajzon pozitív irányban), azalatt, a forgó félegyenesen egy, az O-ból induló pont állandó *v* sebességgel távolodjék a forgásponttól. Ez a pont írja le az arkhimédészi spirálist. Ha t idő alatt a félegyenes szögelfordulása φ, és közben a pont a forgó félegyenesen megtett $r = OP$ utat, akkor

$\varphi = \omega t$

és

$r = vt$

a görbe paraméteres egyenletrendszere. Ebből $r/\varphi = v/\omega = a =$ állandó, így a görbe polárkoordinátás egyenlete:

$r = a\varphi.$

Az elforgás szöge tehát arányos az *r* rádiuszvektorral. Eszerint a tetszőleges a szöget a görbe segítségével úgy oszthatjuk *n* egyenlő részre, hogy az α szög *OA* szára által kimetszett *A* ponthoz tartozó $OA = r$ szakaszt *n* egyenlő részre osztjuk *(53. ábra),* azután az *O* centrumból az osztópontokon át köríveket rajzolunk úgy, hogy ezek a spirálist elmetsszék. Az így nyert szomszédos metszéspontok rádiuszvektorai éppen az α szög n-ed részét határolják.

Arkhimédész a spirális érintőjének a vizsgálatával jött rá, hogy a görbe a körnégyszögesítésre is felhasználható. Ez a vizsgálat a mai jelöléseket használva és leegyszerűsítve az *54. ábrán* kísérhető végig. (Lásd az **Arkhimédész** címszónál is!) Legyen a *P* ponthoz tartozó érintő *e.* Az *OP* rádiuszvektorra az *O* pontban rajzoljunk merőlegest. Ez metszi az érintőt a *T* pontban. Határozzuk meg az *OT* távolságot! E célból a *P* ponthoz tartozó φ szöget növeljük meg egy kicsiny Δφ-vel, eközben az *r* rádiusz is megnő *Δr-rel,* amelyet az új

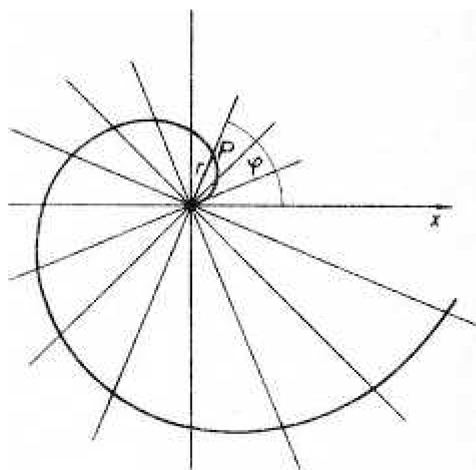
OQ rádiuszvektorból vág ki az *O* középpontú és *OP* sugarú kör. Így keletkezett a *QRP* háromszög, amelynek

oldalai Δr, *QP* és *RP*. Ez a derékszögű háromszög annál inkább tekinthető egyenes szakaszokkal határolt és az *OPT*-hez hasonló háromszögnek, minél kisebb a $\Delta\varphi$ szög. Igen kis $\Delta\varphi$ esetén tehát:

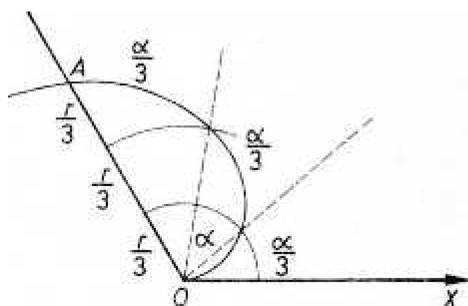
$$\Delta r : \widehat{PR} = r : OT$$

vagy mivel $PR = r\Delta\varphi$, azért

$$OT = \frac{r^2 \Delta\varphi}{\Delta r}\,.$$



52. ábra



53. ábra

54. ábra

55. ábra

56. ábra

Viszont a görbe egyenlete szerint:

$$r = a\varphi$$

$$r + \Delta r = a(\varphi + \Delta\varphi)$$

$\Delta r = a\Delta\varphi$

Így

$OT = r^2/a = r\varphi$.

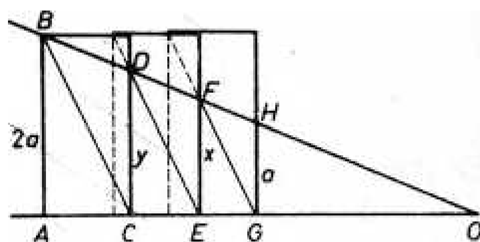
Eredményünk szerint az *OT* szakasz éppen a *PV* körív hossza. (Az eredeti gondolatmenetet lásd a ... oldalon!)

Ha tehát az $r = a\varphi$ spirális a rendelkezésünkre áll, akkor kiválaszthatjuk a görbének a $\varphi = \pi/2$-höz tartozó *P* pontját és a *P* pontbeli érintőt. Ez az érintő az *OX* (a rádiuszvektorra merőleges) egyenesből éppen az *r* sugarú körvonal negyedrészét, vagyis az $(r*\pi)/2$ darabot vágja ki (55. ábra). Ebből már π, tehát az $r^2\pi$ területű háromszög, illetve négyszög megszerkeszthető.

ARKHIMÉDÉSZnél bukkan fel először az *56. ábrán* látható szögharmadoló szerkesztés is. A harmadolandó α szög *O* csúcsából mint centrumból rajzoljuk meg a tetszőleges *r* sugarú *ABC* félkört. Ezután jelöljünk ki egy vonalzón *r* távolságot, és helyezzük el a vonalzót úgy, hogy a rajta kijelölt *r* távolság a félkörív és az *OA* szögszár meghosszabbítása közé kerüljön, tehát $ED = r$ legyen és az *ED* egyenese menjen át a *B* ponton. Ekkor az ábráról leolvasható, hogy az *EOB* háromszögnek a *BOA* külső szöge: $\alpha = 3\beta$. A leírt szerkesztési módot, a kijelölt szakasszal ellátott vonalzó ily módon való használatát, vagyis a neuszisz szerkesztést már láttuk HIPPOKRATÉSZnál is, a 104. oldalon.

Igen érdekes, mechanikus megoldást adott a kockakettőzésre **Eratoszthenész** (i. e. 276?-196?), az alexandriai könyvtár igazgatója, **Arkhimédész** kortársa és barátja. Megoldását olyan nagyra becsülte, hogy Alexandriában a Ptolemaiosz-templomban márványtáblán örökítette meg versben és prózában. A verset magyar fordításban közöljük úgy, ahogy az **Van der Waerden :** *Egy tudomány ébredése* című könyvében is fellelhető:

Hogyha, barátom, kis kockát kettőzni akarnál,
Vagy testet szabni más alakúra kívánsz,
Megteheted: kunyhód palotává nő, a medence
több vizet őrizhet, több gabonát a verem.
Itt e vonalzópár; eközé a középvonalaknak
kell beszorulniok, ám érjenek össze felül.
Nem kell Arkhütasz bonyolult félhengere néked,
hagyj te Menaikhmosznak metszeni kúpokat el;
Nincs jó Eudoxosz hajlott görbéire szükség:
mást szemed itt nem lát, mint egyenes vonalat.
Mert a középvonalat táblácskám ezrivel ontja,
állítsd csak be előbb a rövidebb egyenest.
Most, Ptolemaiosz, örülj: te fiadnak ajándokot adsz, mely
kedves a Múzsáknak és a királyok előtt.
Add, oh Zeusz, a fiú hogy majdan atyja kezéből
kormánypálcáját egykoron így vegye át.
S hogyha talán kérded, hogy e táblát fel ki ajánlá:
Én, ki Kürénéből jöttem: Eratoszthenész.



57. ábra

(A versből kiderül, hogy EUDOXOSZnak is volt a kockakettőzésre megoldása, ez azonban elveszett.) A márványtábla fölött állt **Eratoszthenész** készülékének bronzmodellje, amelynek vázlatát az 57. *ábrán* látjuk. Az *OA* rögzített vonalzóhoz az *O* pontban csuklósan csatlakozik az *OB* forgatható vonalzó. A rögzített vonalzón három, egybevágó téglalap alakú vékony lap tologatható (egymás mögé is). Az *a* élű kocka kettőzéséhez a forgó *OB* vonalzót és a lapocskákat úgy kell beállítanunk, ahogyan azt rajzunk mutatja, tehát legyen $AB=2a$ és $GH=a$, valamint a lapokon megrajzolt átlóknak az előző lap élével való metszéspontjai *(F* és *D)* essenek a *B* és *H* pontokkal egyazon egyenesbe. Ekkor a hasonlóháromszög-sorozatok miatt:

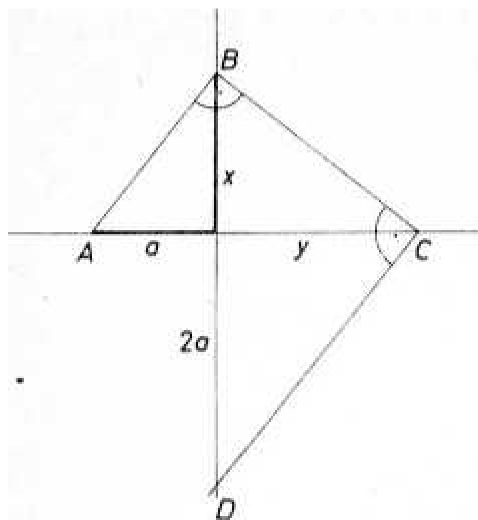
$$2a : y = BC : DE = y : x = DE : FG = x : a,$$

azaz

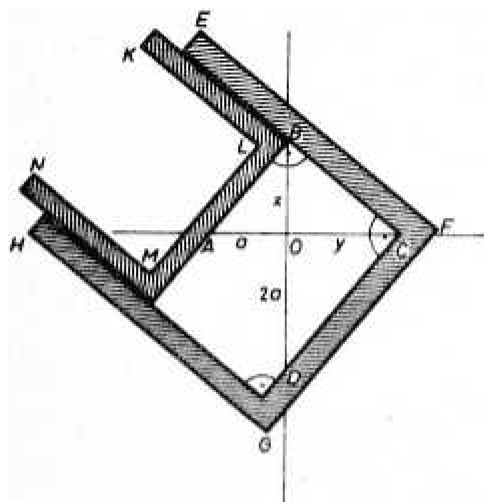
$$2a : y = y : x = x : a,$$

ami pedig a HIPPOKRATÉSZ-féle összetett aránypár, és így - amint ezt már többször láttuk - a $2a^3$ térfogatú kocka éle éppen x. A készülék tehát valóban alkalmas arra, hogy az a és 2a szakaszok közé beiktasson „két mértani középarányost folytonos arányban”. Könnyen belátható azonban, hogy ennél többet is „tud”. A csúsztatható lapocskák számának növelésével két adott a és b szakasz közé tetszőleges számú mértani közép illeszthető folytonos arányban, vagy amint ma mondanánk, az a és a b számok közé tetszőleges számú elemet iktathatunk be úgy, hogy azok a megadott a-val és b-vel mértani sorozat egymás utáni elemeit alkossák. Mint Eratoszthenész írja: a mértani „középvonalat táblácskám ezrivel ontja”!

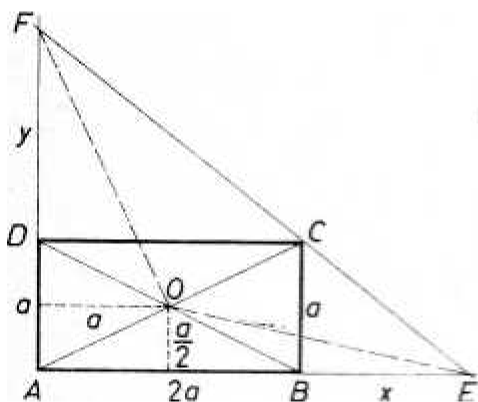
A szmürnai Theón (i. sz. 125 körül) tudósít bennünket Eratoszthenész Platónikosz című dialógusáról, amelyben Platón szintén ismertet egy kockakettőző készüléket. Ennek feltalálását Eutokiosz tévesen magának PLATÓNnak tulajdonította, pedig a dialógusban



58. ábra



59. ábra



60. ábra

Platón éppen azt fejtette ki, hogy akik a problémát mechanikai szerkezetekkel akarják megoldani, azok a geometriát lealacsonyítják az érzéki világhoz, és ezzel megfosztják értékétől. Eközben mintegy példaképpen hozza fel, hogy ilyen készüléket nem is nehéz gyártani, hiszen ő, aki nem matematikus, szintén képes ilyet szerkeszteni. A Platónikosz PLATÓNjának készülékét az 58. ábra vázlata alapján az 59. ábra mutatja. Az ABC derékszögű háromszög magassága x, és a BCD derékszögű háromszögé y. Így:

$a : x = x : y = y : 2a$,

tehát $x^3 = 2a^3$. Magát a szerkezetet az *59. ábrán* láthatjuk. Az *EFGH* derékszögű keretben be lehet állítani a *KLMN* keretet csúsztatással és elforgatással úgy, hogy az előre megrajzolt, egymásra merőleges tengelyekhez képest az ábra mutatta helyzet jöjjön létre. Ekkor a megoldásul szolgáló *x* érték leolvasható, illetve lemérhető.

Maga **Platón** egy ilyen készülék elkészítését - mint minden kézművesmunkát is - roppant lealacsonyítónak találta volna. Még a *Platónikosz* Platón-alakja is csak elrettentő példának szánta azok számára, akik a geometriai feladatokat nem logikai, hanem mechanikai úton akarták megoldani. Persze, ha szigorúan vesszük, akkor akár **Hippiasz,** akár **Arkhütasz** vagy **Arkhimédész** megoldásában felfedezhető a mozgás, ha máshol nem, akkor a segítségül hívott új görbék definiálásában. A geometriai szerkesztéstől a mozgás nem választható el.

A Platónikoszban leírt kockaduplázó szerkesztést PLATÓNnak tulajdonítani valóban nem fér össze a nagy filozófusnak a mechanikai megoldásról vallott nézeteivel. Ellentmondásnak látszik azonban az is, hogy a Platónikosz PLATÓNjának Eratoszthenész adta a szájába - mégpedig helyeslően - a kézműves eljárás elítélését, és mégis ő, a dialógus szerzője, annyira büszke volt a „középvonalakat ezrével ontó lapocskáira", hogy templomi emlékműben örökítette meg találmányát. Ehhez még hozzátartozik az is, hogy végeredményben a Platónikosz PLATÓNjának a keretvonalzóit is Eratoszthenész találta fel - persze elvei fenntartásával.

A pergéi Apollóniosz (i. e. 260?-190?) a kockakettőzésre adott egy tetszetős szerkesztést, amit a 60. ábra mutat. Az a és 2a oldalú ABCD téglalap két átlójának a metszéspontja O. Hosszabbítsuk meg az AB és AD oldalakat a B, illetve a D csúcsokon túl. Ezeken jelöljük ki az E, illetve az F pontokat úgy, hogy egyenlő távol legyenek az O-tól, és az EF egyenes menjen át a C ponton is. Jelöljük a BE szakaszt x, az FD-t y betűvel. Ekkor a megfelelő hasonlóháromszög-párokból két aránypár írható fel:

Mivel az *EBC* háromszög hasonló a *CDF* háromszöghöz, azért $a : x = y : 2a$.

Az *EBC* és *EAF* hasonló háromszögekből pedig $(y+a) : (x+2a) = a : x$.

Az $OE=OF$ egyenlőség miatt

$$(x+a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+a^2,$$

vagyis

$x^2+2ax=y^2+ay,$

azaz

$x(x+2a) = y(y+a),$

tehát

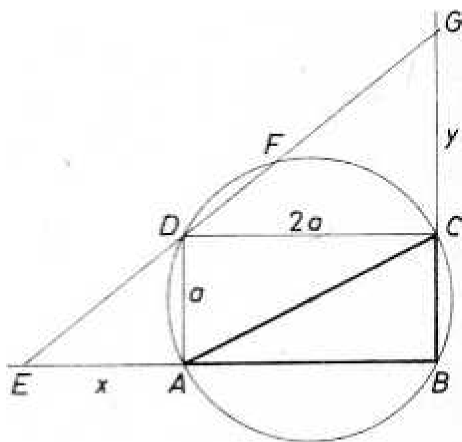
$(y+a) : (x+2a) = x : y.$

A három aránypár szerint: $a : x = x : y = y : 2a.$

A kétszeres térfogatú kocka éle tehát az $x = BE$ szakasz.

A BIZÁNCI PHILÓN (i. e. III. század)

Inkább fizikus, mechanikus és feltaláló volt, mintsem matematikus. Az alexandriai **Hérón (I.** század) említi az automata színházról szóló könyvét. **Eutokiosz** tud egy, a kockakettőzést tárgyaló tanulmányáról. Lehetséges, hogy ő találta fel a bronz hajítógépet, bár némelyek ezt az érdemet Ktészibiosznak (i. e. III. század) tulajdonítják. **Philón** kilencrészes nagy művéből**:** a *Szüntaxisz tész mekhanikészből* (Mechanikai gyűjtemény) megmaradt a negyedik, ötödik, hetedik és nyolcadik könyv. Az első kísérletező fizikusok közé tartozik. Felfedezte, hogy a levegő hő hatására kiterjed. Ezen az alapon kezdetleges léghőmérőt is készített - **Galilei** előtt 1300 évvel. Tapasztalta, hogy zárt térben az égés elhasználja a levegőt - **Lavoisier-t** 1500 évvel megelőzve. Töredékesen fennmaradt munkájában szerepel magyarázat nélkül a kockakettőzés szerkesztéses megoldása, amelyet az athéni **Eutokiosz** beszámolója alapján ismertetünk.



61. ábra

Rajzoljunk a és $2a$ befogókkal derékszögű háromszöget *(61. ábra), és* egészítsük ki téglalappá: *ABCD.* Az *AB* oldalt hosszabbítsuk meg *A* felé, a *BC* oldalt pedig a *C* ponton túl. Ezután tüntessük fel az *AC* oldal Thalész-körét. Ez átmegy a *D* ponton is. Vonalzónkat a *D* ponthoz illesztve forgassuk abba a helyzetbe, amelyben $ED = FG$.

Ekkor:

$EF*ED = GD*GF$

és

$EF*ED = EB * EA = (x+2a)x,$

valamint

$GD * GF = GB * GC = (y+a)y.$

így

$(x+2a)x = (y+a)y$

vagy

$(y+a) : (x+2a) = x : y.$

A megfelelő hasonló háromszögekből viszont

$(y+a) : (x+2a) = a : x$

és

$(y+a) : (x+2a) = y : 2a.$

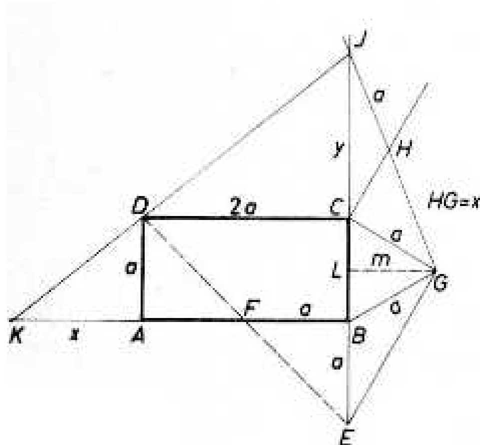
A három utolsó aránypárból következik a jól ismert Hippokratész-féle összetett folytonos arány:

$a : x = x : y = y : 2a.$

Tehát az a élű kocka térfogatánál kétszer nagyobb térfogatú az x élű kocka.

NIKOMÉDÉSZ (i. e. III. század)

NIKOMÉDÉSZt a kockakettőzés új görbe felfedezésére ösztönözte. Ez az új görbe, a konhoisz, a későbbi matematikusoknak is kedvelt kutatási tárgya volt (Viéte, Descartes, Fermat, Roberval, Huygens, Newton). Nikomédész valószínűleg alexandriai matematikus volt.



62. ábra

Kockakettőzési szerkesztésének kiindulása hasonlít Philónéra. Ő is az a és 2a oldalú téglalapból indult ki, a 62. ábra szerint. Az ABCD téglalap BC oldalát mindkét irányban meghosszabbította, az AB oldalt pedig csak az A pont felé. A BC oldal egyenesére a B oldalán rámérte az a szakaszt: BE. Az ED szakasz az AB oldalt felezi az F pontban. Ezután a BC oldal fölé szabályos háromszöget szerkesztett: ez a BCG háromszög. Ennek a BC oldalhoz tartozó magassága m. Most az EG szakasszal párhuzamost húzott a C pontból: CH. Ekkor következett a szerkesztés nemeuklideszi mozzanata: egy olyan vonalzóval, amely kijelölte az a távolságot, a G ponton átmenő egyenest rajzolta meg úgy, hogy annak a CH és BC egyenesek közötti darabja éppen a legyen (neuszisz szerkesztés). Így nyerte a J pontot. Végül a JD szakasz egyenese kimetszette az AB egyenesből a K pontot.

A *KAD* és *KBJ,* valamint a *DCJ* és *KBJ* hasonlóháromszög-párokból leolvasható, hogy

$(y+a) : (x+2a) = a : x \quad (1)$

és

$(y+a) : (x+2a) = y : 2a.$ (2)

Vegyük most tekintetbe, hogy a GJE szög párhuzamos szelői miatt:

a : HG = y : 2a.

Ezt összehasonlítva az a : x = y : 2a aránypárra], ami pedig az (1) és (2) alapján felírható, következik, hogy HG = x. Továbbá: az LGJ és az LGC derékszögű háromszögekből:

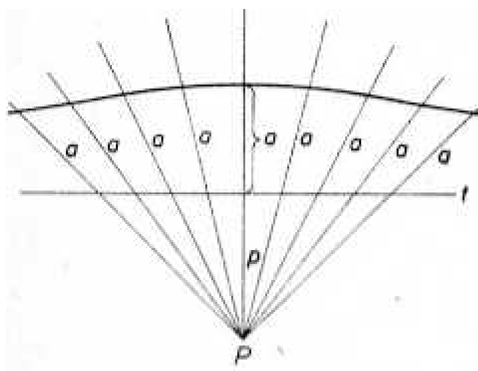
$m^2 = a^2 — (a/2)^2$

és

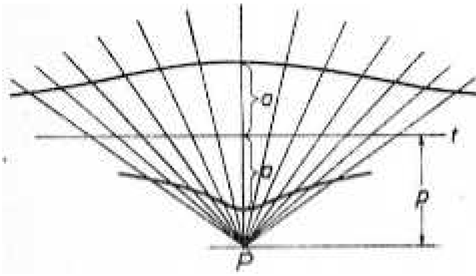
$m^2 = (a+x)^2 - (y+a/2)^2$,

tehát

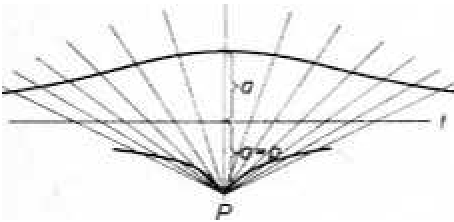
$(a+x)^2 - (y+a/2)^2 = a^2 - (a/2)^2$



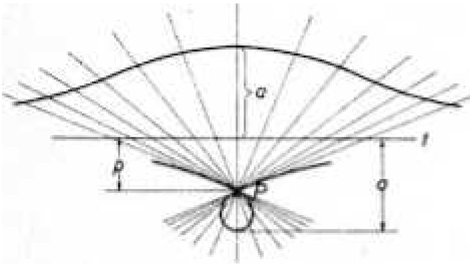
63. ábra



64. ábra



65. ábra



66. ábra

A kijelölt műveletek elvégzése után:

$2ax+x^2-(y^2+ay)=0,$

és ebből

$x(x+2a)=y(y+a),$

vagyis

$(y+a) : (x+2a) = x : y.$ (3)

Az (1), (2) és (3) egyenlőségek szerint: $a : x = x : y = y : 2a$.

Eljutottunk tehát a hippokratészi aránypárban a megoldást jelentő x szakaszhoz. Természetesen a szerkesztés a felesleges mozzanatok elhagyásával egyszerűsíthető.

Eddig ez nem több, mint **Philón** megoldása, sőt az övé egyszerűbb. **Nikomédész** azonban megtetézte mindezt azzal, hogy feltalálta a megoldásban szereplő neuszisz szerkesztést lehetővé tevő konhoiszgörbét (kagylógörbét). Ezt a következőképpen definiálta: Legyen adott tengelyként a t egyenes és tőle p távolságra a P pólus. Rajzoljuk meg a P pont sugársorának azon egyeneseit, amelyek a t tengelyt metszik. Ezekre az egyenesekre mérjük fel az adott a távolságot a tengelytől, a pólussal ellenkező irányban. Az így nyert pontok összessége a konhoisz vagy konhoid *(63. ábra)*.

Nem nehéz észrevenni, hogy a *62. ábra* szerkesztési vázlatán a G pont a konhoisz pólusának, a CH egyenes a konhoisz tengelyének, és végül az a szakasz a görbe állandójának felel meg. Az így meghatározott konhoisz az CB egyenesnek éppen a megfelelő J pontját metszi ki, ami egyszersmind a $GH = x$ szakaszt is meghatározza.

(Zárójelben jegyzem meg, hogy a konhoisz meghatározását kiterjeszthetjük azokra a pontokra is, amelyek a P sugársorának egyenesein a pólus felé eső oldalon vannak, a tengelytől mérve az a távolságot. Ekkor három eset lehetséges. Azt az esetet, amelynél $a<p$, mutatja a *64. ábra.* A következő ábrán $a=p$. Ha pedig $a>p$, akkor a görbe „alsó” ágán hurok képződik a *66. ábrán* szemlélhető módon. A szerkesztéshez persze csak **Nikomédész** „egyágú” konhoisza kell.)

Nikomédész észrevette még azt is, hogy görbéje a szögharmadolásra is felhasználható. Tekintsük meg ugyanis a *67. ábrát.* Ezen a harmadolandó szöget jelöltük α-val. E szög c szárára a szög csúcsától mérjünk fel egy tetszőleges a távolságot. Az így nyert P pontból állítsunk merőlegest a b szárra: PB, valamint húzzunk párhuzamost a b-vel. Egy vonalzóval, amelyen kijelöltünk $2a$ távolságot, rajzoljuk meg az O pontból kiinduló félegyenest úgy, hogy annak QR szakasza éppen $2a$ legyen. Ha a PQR derékszögű háromszög átfogóját az S pont felezi, akkor

$QS = SR = SP = OP$.

A *b* száron levő β szögből elindulva az ábráról leolvashatjuk, hogy $\alpha = 3\beta$. Ha a konhoisz pólusául az α szög *O* csúcsát, tengelyéül a *PB* egyenest és állandójául a 2a szakaszt választjuk, akkor a konhoisz a *b* szárral párhuzamos *PR* félegyenesből kimetszi a kívánt *R* pontot, amely meghatározza a $\beta = \alpha/3$ szöget.

Nikomédész gyakorlati érzékére vall, hogy még eszközt is készített a konhoisz megrajzolásához, ami pedig a kézművességet lebecsülő korban a tudósoknál nagy ritkaság. Ez a konhoiszkörző két részből állt. A *68. ábra* T alakú *ABC* vonalzójának mindkét szárában rést vágott, amelyben a *P* és a *Q* csavarok mozoghattak: a *P* „függőlegesen”, a *Q* „vízszintesen”. A T vonalzóra feküdt a *GH* egyenes vonalzó, az előbbihez hasonló réssel ellátva. Válasszuk a megrajzolandó konhoisz pólusának a *P* pontot és tengelyének a szaggatott *AB* egyenest, állandója pedig legyen a *QH* szakasz, ahol a *H* pontban íróhegy van. A *P* csavart a T vonalzóhoz lehet rögzíteni úgy, hogy a *GH* vonalzó csúszkálhat. A *Q* csavart viszont csak a *GH* egyenes vonalzóhoz lehet rögzíteni, tehát ez a csavar az *AB* tengely mentén „vízszintesen” elcsúszhat. A T vonalzórészt a mondott módon rögzítve, az egyenes vonalzónak a két csavarral megszabott mozgásakor a *H* íróhegy lerajzolja a *P* pólusú, *t* tengelyű, *a* állandójú konhoiszt.

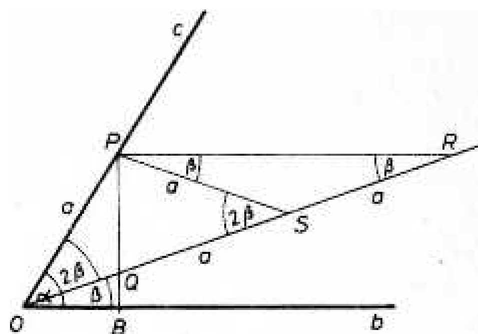
DIOKLÉSZ (i. e. II. század)

A már emlegetett athéni **Eutokiosz** adott hírt arról, hogy a fizikus **Dioklész** is feltalált egy új görbét, amellyel a déloszi problémát megoldhatta. A gyújtótükrökről írt, nem nagyon színvonalas művében tett tanúságot arról, hogy ügyes matematikus lehetett. Az általa feltalált cisszoidgörbét a következőképpen származtatta: A *69. ábrán* látható *d* átmérőjű körben megrajzolt két, egymásra merőleges átmérőt: *AB-t* és *CD-t*. Ezután a körvonalon kijelölte a C ponttól egyenlő távoli *G* és *H* pontokat. Ezekből merőlegest állított az *AB* átmérőre: *GF* és *HE*. Az *AH* szakasz egyenese kimetszi a *GF* egyeneséből a *P* pontot. Ez a cisszoid egy pontja. Ha most a *G* és *H* pontok a *C* ponttól indulva bejárják a kör kerületét úgy, hogy a *GC* ív mindig akkora legyen, mint a *CH* ív, akkor a velük együtt mozgó *P* pont leírja **Dioklész** görbéjét. **Dioklész** úgy találta, hogy a cisszoidra legjellemzőbb összefüggés,

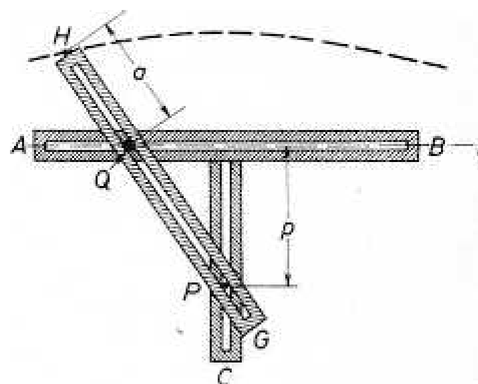
vagyis a cisszoid szümptómája az AEH és AFP hasonló háromszögekből az

$AE : EH = AF : FP$

aránypár.



67. ábra



68. ábra



69. ábra

Ha az elmondottakat az *x; y* derékszögű koordináta-rendszerben képzeljük el, és felhasználjuk az AB = d, AF = x, FP = y jelöléseket, akkor Dioklész görbéjének szümptómája szerint:

$(d—x) : EH = x : y$, ahol $0 \leq x < d$

Vegyük számításba, hogy

$$EH = \pm\sqrt{AE \cdot EB} = \pm\sqrt{(d-x)x}.$$

Ekkor

$$(d-x)y = \pm x\sqrt{(d-x)x}.$$

A négyzetre emelés és egyszerűsítés után:

$y^2(d—x) = x^3$, ahol $0 \leq x < d$,

ami a cisszoid ma szokásos egyenlete.

Dioklész is észrevette, hogy EH mértani közepe AE-nek és EBnek, azaz

AE : EH = EH : EB = EH : AF.

Ebből és a szümptómául szolgáló aránypárból következik, hogy AE :

EH = EH : AF = AF : FP.

Ez azt jelenti, hogy az AE és FP közé sikerült beiktatni „két középarányost folytonos arányban”. Ha tehát kiválasztjuk a cisszoidnak azt a pontját, amelyre nézve teljesülnek az

FP = a és AE = 2a

feltételek, akkor az AF = x jelöléssel: $x^3 = 2a^3$.

A feltételek fenti teljesítése nem is olyan egyszerű, hiszen ekkor AE = d—x = 2a és FP = y = a, ami pedig a görbe egyenlete szerint nem minden d-nél lehetséges, mert teljesülnie kell az

$a^2 2a = (d—2a)^3$

egyenletnek, ahonnan $d = 2a + a(\sqrt[3]{2})$.

Ha pedig d-t, azaz a $\sqrt[3]{2}$-t meg tudjuk szerkeszteni, akkor felesleges a cisszoid!

MUHJIADDÍN AL-MAGRIBI (1260 KÖRÜL) KOCKAKETTŐZÉSE ÉS BOLYAI JÁNOS (1802-1860) SZÖGHARMADOLÁSA

Azért, hogy a híres ókori szerkesztések csokra színesebb legyen, és hogy az ezek iránti érdeklődés maradandó voltát érzékeltessem, leírom a középkori al-Magribi és a már újabb kori Bolyai János egy-egy szerkesztését.

Al-Magribi arab matematikus és csillagász, Hispánia szülötte, Szíriában, majd Maragában működött. Csillagászati munkáin kívül főleg trigonometriai eredményei említésre méltók. Kommentálta EUKLEIDÉSZt, APOLLÓNIOSZt, MENELAOSZt és THEODOSZIOSZt. A kockaduplázásra a következő szerkesztést találta ki:

Rajzolt egy 2a és a befogójú derékszögű háromszöget a körülírható körével együtt *(70. ábra)*. Az $AB = 2a$ oldalt meghosszabbította a derékszög felőli oldalán, és úgy húzta meg a *C* csúcson keresztül a *DF* egyenest, hogy *EF* = *AB* legyen. Ekkor:

EF : DE = AB : DE.

Az *EFD* és *BFC* hasonló háromszögekből:

$EF : ED = BF : BC = AE : BC.$

Végül az *ADF* derékszögű háromszögből:

$EF : ED = ED : AE.$

A három aránypárból összeállítható az

$AB : DE = DE : AE = AE : BC$

folytonos, összetett arány. Ha $AB=2a$, $DE=y$, $AE=x$ és $BC=a$, akkor alak szerint is nyertük a

$2a : y = y : x = x : a$

hippokratészi aránypárláncot. Így az *a* élű kockáéhoz képest kétszeres köbtartalmú kocka éle: $x=AE$.

A nagy matematikus kis játékaként értékelendő **Bolyai János** ragyogó elmeélű szögharmadolása az $xy=c$ egyenletű, derékszögű hiperbola segítségével. A *71. ábrán* a derékszögű koordináta-rendszerben α a harmadolandó szög. Ennek az egyik szára metszi a hiperbolát a $P(a; b)$ pontban. A *P* pontból mint centrumból rajzoljunk kört $20P=2r$ sugárral. Ez az α szögtartományában metszi a hiperbolát az $R(x_1 ; y_1)$ pontban. A rajzot az ábra szerint kiegészítve nyerjük a β szöget. Teremtsünk összefüggést az α és a β szögek között. A hiperbola egyenlete szerint: $x_1y_1=ab$, azonban

$x_1 = a+2r*\cos\beta$ és

$y_1 = b — 2r*\sin\beta$,

ezért

$(a+2r*\cos\beta)(b — 2r*\sin\beta)=ab$,

vagy:

$2r(b*\cos\beta - a*\sin\beta) = 4r^2 \sin\beta * \cos\beta$.

Az *OAP* derékszögű háromszögből viszont:

b = r sin α és *a*=*r* cos α.

Ezeket behelyettesítve és $2r^2$-tel osztva:

sin α * cos β — cos α * sin β = *2* sin β * cos β,

azaz

sin (α—β) = sin *2*β.

Ekkor a hegyesszögek tartományában: α—β = *2*β, illetve α = 3β. A β szög tehát éppen az α szög harmada.

70. ábra

71. ábra

AZ EUKLIDESZI SZERKESZTÉSSEL VALÓ MEGOLDHATÓSÁG

Az ismertetett három ókori probléma szerkesztéssel való megoldásaiban kivétel nélkül mindegyikben szerepelt nemeuklideszi lépés: vagy „neuszisz” szerkesztés, vagy euklideszi módon nem szerkeszthető görbe. Korán felvetődött az a kérdés, hogy a tárgyalt feladatok egyáltalán megoldhatók-e euklideszi szerkesztéssel? Éppen ennek a kutatása indított el a matematikában sokirányú fejlődést, és éppen ez adja meg a három feladat jelentőségét.

Mielőtt a szerkeszthetőség kérdésére felelnénk, fogalmazzuk meg pontosan, hogy mit értünk euklideszi szerkesztésen, milyen adatokat és milyen eljárásokat szabad használnunk. A szerkesztés adatai: ugyanazon síkban adott pontok, egyenesek és körök. Ezekből kell újakat származtatni körzővel és egyélű vonalzóval, ha csupán az alábbi lépéseket engedjük meg:

1. Két egyenes metszéspontjának a kijelölése.

2. Két kör metszéspontjának a kijelölése.

3. Egyenes és kör metszéspontjának a kijelölése.

4. Két ponton át egyenes rajzolása.

5. Két pont távolságának körzőnyílásba vétele és ezzel adott vagy már megszerkesztett pontból mint centrumból kör rajzolása.

Nem szabad tetszőleges nyílású körzővel kört rajzolni; a kör sugara mindig adott vagy az adatokból megszerkeszthető távolság kell hogy legyen.

A szerkesztési feladatot akkor tekintjük megoldottnak, ha megadtunk egy, a keresendő alakzatot előállító, véges számú lépésből álló általános eljárást, amely tehát valamely szerkesztési feladat bármilyen konkrét adatainál alkalmazható, és természetesen csak a felsorolt, megengedett mozzanatokból tevődik össze.

A derékszögű koordináta-rendszerben a fenti adatok, tehát a pont, az egyenes és a kör, számokkal jellemezhetők: a pont két koordinátájával, az egyenes tengelymetszeteivel, a kör középpontjának koordinátáival és sugarának hosszával. Ezek a

számok meghatároznak (generálnak) egy számtestet. (A számtest a számok olyan halmaza, amelyen értelmezve van az összeadás és a szorzás, mindkettő asszociatív és kommutatív, valamint elvégezhető a test elemei közt a kivonás és a 0-tól különböző osztóval való osztás is.) Ezt a legszűkebb számtestet, amely a szerkesztés adatait jellemző számokat tartalmazza, szokás alapszámtestnek nevezni. Jelöljük ezt K-val. Tegyük fel, hogy ez éppen a racionális számok halmaza, vagyis a racionális számtest, és kísérjük végig a szerkesztést az egyes lépéseknek megfelelő koordinátageometriai számításokkal. Két egyenes metszéspontjának vagy két pont közös egyenesének a meghatározásához elegendő elsőfokú egyenletet megoldanunk, amihez csak a négy alapművelet szükséges.

Ezek az alaptestben elvégezhetők, tehát annak kibővítésére nincsen szükség. Az egyenes és a kör metszéspontjának, vagy két kör metszéspontjának, valamint egy kör adatainak a meghatározásához már esetleg másodfokú egyenlet megoldása is szükséges. Az eredmény lehet irracionális szám is és komplex szám is. Ilyenkor a példának választott racionális számtestet ki kell bővítenünk, legalább a megoldott másodfokú egyenlet gyökeivel. Ha például az egyik gyök $\sqrt{2}$ volna, akkor a racionális számtesthez csatoljuk (adjungáljuk) a $\sqrt{2}$ irracionális számot. Azt mondjuk, hogy az eredeti racionális számtest és a $\sqrt{2}$ generál egy olyan számtestet, amelynek a racionális számtest résztestе. Ezt a bővebb K_1 testet a K alaptest bővítésének nevezzük, és $K_1 \mid K$-val jelöljük (K_1 a K bővítése). K_1 tartalmazza tehát a racionális számtestet, valamint az összes $a+b\sqrt{2}$ alakú irracionális számot, ahol is a és b a K alaptest elemei. Ha pedig a másodfokú egyenlet megoldása komplex szám, akkor a megelőző számtesthez kell adjungálni a komplex gyököket. Ezek együtt most generálnak egy $g+hi$ alakú komplex számokból álló olyan számtestet, amelynél a g és h a megelőző számtest elemei. Példaképpen induljunk ki a valós számtestből. A valós számok az egydimenziós számegyenesen ábrázolhatók. Bővítsük ki a valós számtestet a komplex számok testévé. Ennek elemei, az $a+bi$ alakú komplex számok már csak a komplex számsíkon az $a; b$ koordinátájú vektoroknak feleltethetők meg. Az a és b valós számok és a komplex számsík természetesen kétdimenziós. Ilyen értelemben mondhatjuk, hogy a komplex számok a valós számtest fölötti kétdimenziós vektorokat jelentik, illetve a komplex számtest a valós számtest fölött értelmezett vektortér. A vektortér dimenzióját a neki

megfelelő számtest fokának (rangjának) nevezzük. Ha a valós számtest résztestét valós számok adjungálásával bővítjük, akkor a bővítést elsőfokúnak, ha pedig a valós számtestet komplex szám adjungálásával bővítjük, akkor a bővítést másodfokúnak mondjuk. Mivel a szerkesztési eljárásunkat kísérő koordinátageometriai számításaink közben kettőnél magasabb fokú egyenletet nem kell megoldanunk, azért az egyenletmegoldást megelőző számtestet vagy nem szükséges bővítenünk, vagy elsőfokú, vagy pedig másodfokú bővítést kell végrehajtanunk. Megjegyezzük, hogy a bővítés mindig egyenlet gyökeinek az adjungálásával történik, azaz olyan számmal, amely valamelyik algebrai egyenletnek gyöke lehet, röviden: mindig algebrai bővítést végzünk. Ilyen bővítések során nyerjük az alaptestből a

$$K \subseteqq K_1 \subseteqq K_2 \subseteqq K_3 \subseteqq \ldots \subseteqq K_n = L$$

bővítéssorozatot, ahol minden K_i az előtte levő K_{i-1}-nek legfeljebb másodfokú bővítése, és az utolsó *L* bővítés már tartalmazza a megszerkesztendő alakzat minden jellemző számadatát.

Tekintve, hogy az egymás utáni bővítések során a fokszámok összeszorzódnak, azért a *K L*-re való bővítésének a fokszáma 2-nek nemnegatív, egész kitevős hatványa. Ez a szerkeszthetőség elegendő feltétele. Igazolható azonban a tétel megfordítása, azaz szükséges volta is.

A most vázolt szerkeszthetőségi tételből következik többek közt az is, hogy ha a

$P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

racionális együtthatós harmadfokú egyenlet polinomja irreducibilis az 1, a_0, a_1, a_2 együtthatókkal generált racionális számtest fölött [azaz ebben a számtestben a *P(x)* polinom nem bontható csupa elsőfokú tényező szorzatára, más szóval a P(x) = 0 nem írható fel gyöktényezős alakban], akkor a $P(x) = 0$ egyenlet gyökei euklideszi módon nem szerkeszthetők meg a 0, 0, a_0, a_1, a_2 számokkal jellemzett K_0 számtest segítségével.

Tegyük fel ugyanis állításunk ellenkezőjét, azaz legyen a *P(x)*

polinomnak x_1 egy olyan zérushelye, amely a K_0 halmaz segítségével megszerkeszthető. Ekkor kell, hogy a K_0 halmaz első- és másodfokú algebrai bővítései során eljussunk egy olyan K_n számtesthez, amely már tartalmazza a megszerkesztendő x_1 gyököt is. Legyen ez a K_n olyan számtest, hogy K_{n-1} még nem tartalmazza x_1-et, de K_n már igen [azaz a $P(x)$ polinom a K_{n-1} fölött még irreducibilis, de a K_n fölött már reducibilis]. Ekkor a $K_n \mid K_{n-1}$ másodfokú bővítésben x_1 felírható az $x_1 = a+bi$ alakban, ahol tehát x_1 nem eleme K_{n-1}-nek, de K_n-nek eleme, és a, b a K_{n-1} elemei. Mivel feltevésünk szerint az x_1 gyöke a $P(x) = 0$ egyenletnek, azért

$$P(x_1) = x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0=0$$

vagy

$$(a + bi)^3+a_2(a +bi)^2+a_1(a +bi)+a_0=0.$$

A műveletek elvégzése és a rendezés után:

$$a^3 - 3ab^2 + a_2(a^2 - b^2) + a_1a + a_0 + (3a^2b - b^3 + 2a_2ab + a_1b)i = 0.$$

Egy komplex szám csak akkor nulla, ha mind a két koordinátája nulla, tehát:

$$a^3 - 3ab^2 + a_2(a^2-b^2) + a_1a+a_0 = 0$$

és

$$3a^2b-b^3 + 2a_2ab + a_1b = 0.$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$P(a - bi) = (a-bi)^3 + a_2(a - bi)^2+a_1(a-bi) + a_0 = a^3 - 3ab^2 + a_2(a^2-b^2)+a_1a+a_0-(3a^2b -b^3+2a_2ab + a_1b)i= 0,$$

azaz az $x_2=a-bi$ *is* gyöke a $P(x) = 0$ egyenletnek. A gyökök és az együtthatók összefüggése alapján:

$$x_1 + x_2+ x_3 = -a_2$$

tehát

$x_3 = —a_2—x_1 - x_2 = — a_2—a—bi— a+bi = —a_2—2a,$

vagyis x_3 is eleme a K_{n-1} -nek. Eszerint a $P(x)$ polinom egyik zérushelye a K_{n-1}-ben van. Ez pedig ellentmondásban van a kezdeti feltételünkkel. Az ellentmondás eredeti állításunkat igazolja, tehát a

$$P(x) = x^3 + a_2x^2+a_1x+a_0= 0$$

racionális együtthatójú algebrai egyenlet gyökei euklideszi módon általánosságban nem szerkeszthetők meg.

A kockakettőzés esetében (az egyszerűség kedvéért) az egységnyi élű kockához olyan x élűt kellene szerkeszteni, amelyre nézve igaz, hogy:

$x^3=2$, illetve $x^3—2 = 0$.

Mivel azonban az $x^3—2$ polinom a racionális számtest fölött irreducibilis, azért az egyenlet gyökei euklideszi módon nem szerkeszthetők meg, tehát az $x= \sqrt[3]{2}$ sem.

(Másként: A racionális számtestnek a $\sqrt[3]{2}$-vel való bővítése harmadfokú bővítés, és a 3 a 2-nek nem lehet egész kitevős hatványa.)

A szögharmadolás szerkesztési feladatát a trigonometriából ismert

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

képlettel írhatjuk át algebraivá, ha adottnak tekintjük az $a = \cos\alpha$-t, és keressük az $x = \cos(\alpha/3)$-at. Megoldandó tehát a

$$4x^3—3x—a=0$$

egyenlet, ahol a [— 1, +1] intervallumban a minden értéket felvehet. Az egyenlet polinomja általánosságban irreducibilis a racionális számtest fölött, azaz nem minden megengedett a-ra nézve reducibilis (bár ha például $a= 1$, akkor igen), azért az egyenlet gyökei euklideszi módon nem szerkeszthetők meg.

A körnégyszögesítés feladata azt kívánja, hogy szerkesszünk egy

adott *r* sugarú kör területével egyenlő területű négyzetet. Legyen e négyzet oldala: *x,* és az egyszerűség kedvéért $r= 1$, ekkor megoldandó az

$x^2=\pi$, illetve az $x^2—\pi=0$

egyenlet. Itt a szerkeszthetőség a π szám természetén múlik. Csak a XVIII. században sikerült kimutatnia **Heinrich Lambert (1728 — 1777)** svájci származású matematikusnak és tőle függetlenül **Adrien Marie Legendre** (1752-1833) francia matematikusnak, hogy a π irracionális szám. Ekkor még megvolt a szerkeszthetőség reménye, de 1882-ben **Ferdinand Lindemann** (1852-1939) kimutatta, hogy π transzcendens szám, azaz olyan szám, amely semmiféle racionális együtthatójú algebrai egyenletnek nem lehet gyöke. Ezért a racionális számtestnek nincsen olyan véges számú algebrai bővítése, amely a π-t tartalmazná, és persze akkor a √π-*t* sem. Így az euklideszi szerkesztés itt sem járható út.

A NAGY GÖRÖG MATEMATIKUSOK

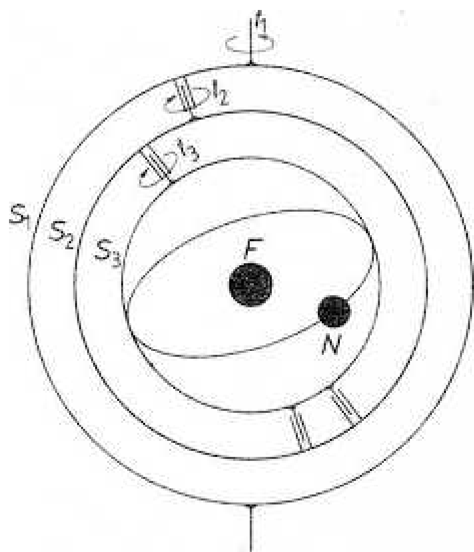
A KNIDOSZI EUDOXOSZ (i. e. 400?-347?)

A görög matematika, amelynek megalapozását az i. e. VI. században **Thalész** és **Püthagorasz** megkezdte, i. e. 300 táján már annyi eredménnyel gazdagodott, hogy időszerűvé vált az elemeknek egy átfogó, rendszerező összefoglalása. E fejlődési szakasz bizonyos értelmű lezárását meg is tette **Eukleidész** híres művében, a *Sztoikheiá*ban. Mivel **Eukleidész** forrásmunkák alapján dolgozott, sőt könyvében az alapul vett nagy matematikai művek sokszor szerzőik szerint is elkülöníthetők, azért neki köszönhetjük, hogy véleményt alkothatunk néhány olyan matematikusról is, akiknek írásai nem maradtak fenn. Ilyen, **Eukleidész** előtti, nagy matematikus **Eudoxosz** is. Nagy valószínűséggel állíthatjuk, hogy a *Sztoikheia* V., VI. és XII. könyve nélküle nem született volna meg.

Eudoxosz nemcsak matematikus, hanem korának híres orvosa, jelentős csillagásza is volt, akit a filozófia szintén érdekelt. Szülőföldjén, a Rodosz melletti kis Knidosz szigetén, nyomorúságos körülmények között kezdte életét. Állandóan küzdve a létfenntartás gondjaival, kitűnő **tanítványa** lett a **taraszi ARKHÜTASZnak,** majd később a szicíliai **PHILISZTIONtól** nyerte

orvosi ismereteit. 23 éves korában Athénba költözött, illetve Athén kikötővárosába, Pireuszba. Itt halászatból tartotta el magát, de munkája végeztével naponta begyalogolt Athénba, hogy **Platón** filozófiai előadásait hallgathassa. Ekkor már széles körű tudását annyira megbecsülték, hogy barátai anyagi támogatásával Egyiptomba utazhatott, zsebében Spárta akkori királyának, **AGESZILAOSZnak** ajánlólevelével. Így vált lehetővé, hogy Heliopoliszban az egyiptomi papoktól csillagászatot tanuljon, sőt csillagászati megfigyeléseket is végezzen. Erről a tanulmányútról megtérve, a görög gyarmatvilág legkeletibb részén, a Márvány-tenger partján épült Küszikoszban telepedett le, ahol iskolát alapított. Már 40 éves is elmúlt, amikor tanítványaitól övezve visszatért Athénba, immáron köztiszteletben álló tudósként.
Itt felelevenítette a **Platónhoz** fűződő barátságát, bár volt mesterének filozófiai elveivel nem mindenben értett egyet. A köztük kialakult vita abból a különbségből eredt, hogy **Platón** szerint az ideák a valóságos dolgok elvont, nem érzékelhető, „ideális" mintaképei, **Eudoxosz** pedig úgy vélte, hogy az ideák jelen vannak a valóságos dolgokban, tehát érzékelhetők. Éppen az ideáknak a megtapasztalható létezőkhöz való keveredése adja meg a dolgok minőségbeli különbségét: valami azért szép, mert hordozza a „szépség ideáját" ; egy tárgyat a hozzákeveredő „piros szín ideája" tesz pirossá.

Nézeteltéréseik ellenére a köztük levő jó viszonyt példázza, hogy **Eudoxosz** oldott meg egy **Platón** által felvetett csillagászati problémát. Az ókori görög „ideológia" szerint az isteni eredetű égitestek csak a hozzájuk egyedül méltó mozgással, a legtökéletesebb egyenletes körmozgással róhatják az idők végezetéig kijelölt pályájukat. A megfigyelés azonban - amely alatt a Földet állónak képzeljük - más, sokkal bonyolultabb pályákat mutatott. Hogyan lehetne az elmélet és a gyakorlat közötti ellentmondást feloldani? Hogyan lehetne az (akkor ismert) 5 bolygó, a Nap és a Hold mozgását csupán egyenletes körmozgással leírni? - vetette fel **Platón** a kérdést. Az első feleletet **Eudoxosz** adta meg. Megoldása matematikai szempontból is érdekes és tovább tökéletesíthetőnek bizonyult.

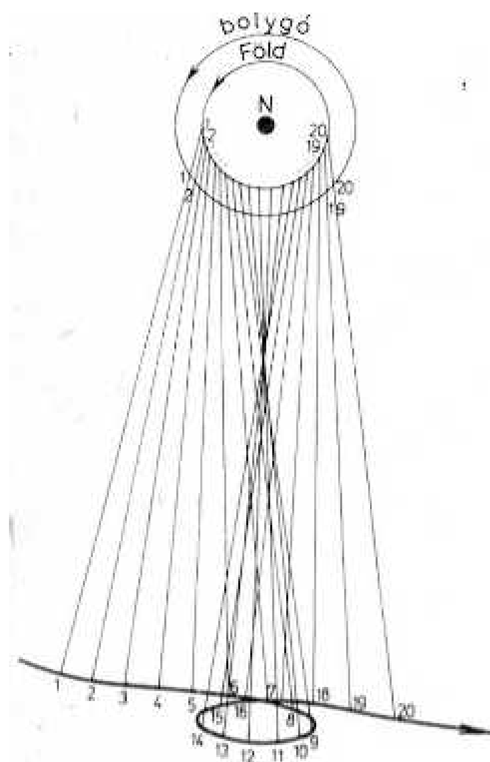


72. ábra

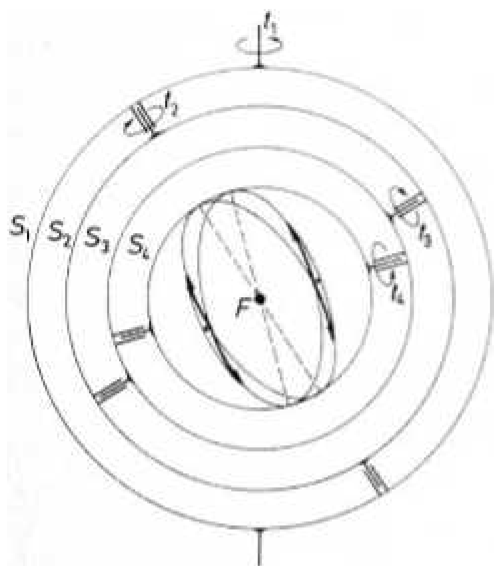
A Nap, a Hold és az akkor ismert 5 bolygó mozgásának magyarázatára **Eudoxosz** feltette, hogy 27 koncentrikus kristálygömb forog különböző forgástengelyekkel és más-más sebességgel. Mindegyik középpontja a Föld, amelyen tehát mindegyik kristálygömb forgástengelye átmegy. Ezek a gömbhéjak, az ún. szférák ragadják magukkal az égitesteket, és kényszerítik azokat pályájukra. Nézzük meg vázlatosan, hogyan működik a szférák e rendszere, milyen mozgásra késztetik az egyes szférákba illesztett bolygókat? Legkívül van az állócsillagok szférája. Ebbe rögzítődnek azok az égitestek, amelyek egymáshoz képest nem változtatják helyzetüket. Az állócsillagok szférája naponta egyszer fordul meg a Föld középpontján is átmenő, az északi sarkcsillag felé mutató világtengely körül.

A Nap és a Hold mozgását **Eudoxosz** ugyanúgy magyarázta. Nézzük például a Nap esetét. A Napot három szférából álló rendszer mozgatja. Ezek közül a legkülső (a *72. ábrán* S_1) ugyanolyan tengely (t_1) körül forog, és ugyanolyan sebességgel, mint az állócsillagok szférája. Ehhez a gömbhöz van rögzítve a következő, S_2 szféra t_2 tengelye, amely merőleges az ekliptika síkjára. Ezen belül helyezkedik el a harmadik, S_3 gömb, amely a Napot hordozza. Ennek az S_2 szférához illeszkedő t_3 tengelye szöget zár be a t_2

tengellyel. E két utóbbi gömb forgása az S_1 forgásával „ellentétes” irányú. Válasszuk külön az egyes gömbhéjak okozta mozgásokat. A külső S_1 héj biztosítja, hogy a Nap a Földet egy nap alatt körüljárja.



73. ábra



74. ábra

Az S_2 „visszafelé” forgó szféra azt a mozgást hozza létre, amellyel a Nap az ekliptika síkjában egy év alatt visszafelé halad az állatöv 12 csillagképén. Ez tehát egy év alatt tesz meg egy fordulatot. A legbelső, S_3 szférával valósítható meg az a tény, hogy a Nap felkelésének és lenyugvásának az iránya a földi horizonton eltolódik a nyári és téli napfordulók között.

Teljesen hasonló módon három szféra magyarázza a Holdnak az állócsillagokkal való együttes mozgását, a csomópont visszafelé vándorlását, és azt, hogy a Hold keringési síkja szöget zár be az ekliptika síkjával.

Eudoxosz a bolygók látszólagos mozgásának magyarázatára négy-négy szférát tételezett fel. A nehézséget az okozta, hogy mivel a bolygók a Nap körül nem ugyanakkora szögsebességgel keringenek, mint a Föld, sőt nem is pontosan ugyanabban a síkban, azért a Földről szemlélt mozgásukban olykor sietnek, olykor késnek, és így pályájukon látszólag hurkok képződnek. Ezeknek a hurkoknak a keletkezését szemlélteti a *73. ábra.* A Földről a *B* bolygó felé húzott látósugarak kivetítik a bolygó képét az állócsillagok szférájára, mint egy képernyőre. A leegyszerűsített vázlat feltételezi, hogy a Föld és a Földnél lassúbb bolygó (például a Jupiter) egyazon

síkban keringenek. A megszámozott látósugarak mutatják, hogy az állócsillagok szféráján a bolygó látszólag nemcsak előrehalad, hanem hátrafelé is mozog, és ha a bolygó és a Föld keringési síkja szöget zár be, akkor ez az ingaszerű mozgás a térben hurkolt pályát jelent.

E hurkok magyarázatára vette fel **Eudoxosz** a két belső szférát. Ezek tengelyei szöget zárnak be, és irányuk közel esik az ekliptika (nappálya) síkjához *(74. ábra).* A harmadik és negyedik szféra egymással ellentétes irányú, egyenletes mozgást végez. A bolygó a negyedik szférában van. E két forgásból eredő mozgás hol hozzáadódik az ekliptika menti mozgáshoz, hol levonódik abból, és így kialakulnak a fentebb leírt hurkok. Egy bolygóhoz tehát négy kristálygömb tartozik. Az első egy fordulatot 24 óra alatt tesz meg, mint az állócsillagok ege. A második a bolygó mozgását idézi elő az állócsillagokhoz képest, a harmadik és a negyedik pedig a sebességeket alkalmasan megválasztva a hurokmozgást állítja elő megfelelő periodicitással. **Eudoxosz** naprendszere csak első megközelítésben írja le a bolygók, a Nap és a Hold mozgását. Az alapelvet azonban új szférák bevezetésével alkalmazni lehet további pontosításra. Ezt meg is tette **Kallipposz** (i. e. 370 táján), majd **Arisztotelész** is, azonban még a tökéletesített eudoxoszi elmélet sem tudott számot adni többek között a bolygók fényességváltozásairól, és ezért kiszorította azt a később ptolemaioszi rendszernek nevezett, szintén geocentrikus Naprendszer-modell.

Vitruvius, az i. e. I. században működő római építész, a római vízművek felügyelője úgy tudta, hogy Eudoxosz találta fel az asztrolábium nevű csillagászati műszert, amelyet alakja miatt görögül „arakhnénak”, „póknak” is neveztek. **Vitruvius** állítása azonban bizonytalan, mert ő maga is lehetségesnek tartotta, hogy a felfedező **Apollóniosz** volt. Ugyanilyen valószínűséggel más források **Hipparkhosz** vagy **Ptolemaiosz Klaudiosz** szerzőségét erősítik (lásd a 387. oldalt).

Eudoxosz korának legnagyobb matematikusa volt. A görög matematika fejlődésére különösen az arányelmélet megalapozásával és az ún. „kimerítés” módszerének feltalálásával hatott.

Amint említettük, a görög matematikusok filozófiai okokból (lásd: a

püthagoreusok számelmélete, a 85. oldalon) csak a természetes számokat tekintették számoknak. A törtszám fogalmát ellentmondásosnak találták, azért kezdetben nem is foglalkoztak vele. Ez a filozófiai következetesség azonban aritmetikai nehézségeket okozott, amit az arány fogalmával hidaltak át. Két szám arányáról azonban már szabad volt beszélni. Amint a püthagoreusok zeneelméletében láttuk : a hangközöket a megfelelő húrhosszaknak, azaz számoknak az arányával jellemezték. A hangközök összetevésének aritmetikai vetülete az arányok összetevése volt. Az $a : b$ és a $b : c$ arányokkal jellemzett hangközök összetevéséből eredő új hangközt az $a : c$ arány jellemezte, tehát a hangközök „összeadásának" a megfelelő arányok „szorzása" felelt meg: $a : c = (a:b)*(b : c)$. Ekkor már ismeretes volt az arányok bővítése és annak fordított művelete is, tehát $a : b = ac : bc$, illetve $ac : bc = a : b$. Ennek a segítségével már két tetszőleges arányt is össze tudtak szorozni:

$$(a : b)*(c : d) = (ac : bc)*(bc : bd) = ac : bd.$$

Ugyancsak a püthagoreusoknál találkoztunk az „epimoriosz" aránnyal. Ilyen az $a : b$ arány, ha $(a—b)$ osztója b-nek:

$(a—b)n = b$, ahol n egy „szám",

vagy

$na = (n+ 1)b$,

illetve

$a:b = (n+1) : n$.

Ha a-nak b osztója, akkor az $a : b$ arányt többszörös aránynak nevezték. A mértani középarányos tárgyalásánál találkoztunk már a folytonos arány elnevezéssel is: $a:b = b : c$. Ez már két arány egyenlőségét állítja. Az arányok egyenlőségét **Hipparkhosz** is alkalmazta, amikor két „körcikk arányát" másik két „körcikk arányával" egyenlőnek mondta, ha a körcikkek saját köreiknek ugyanannyiad részei. Eszerint abban az időben az $a : b$ arányt egyenlőnek mondták a $c : d$ aránnyal, ha a ugyanannyiszorosa b-nek, mint c a d-nek. Ekkor felírható az $a : b =$

c : d aránypár. Az *a* ugyanannyiszorosa b-nek, mint *c* a d-nek azokra az esetekre értendő, amikor *b* osztója a-nak (ugyanakkor *d* osztója c-nek), vagy *a* osztója b-nek (akkor *c* is osztója d-nek), vagy a-nak és b-nek, illetve c-nek és d-nek van közös osztója. Az aránypárnak ez a régi püthagoreusi definíciója tehát csak *a* és *b,* illetve *c* és *d* racionális viszonyára értelmezhető.

Érdekes továbbfejlesztése található az arányosság fogalmának **Arisztotelész** egyik művében, a *Topiká*ban. E szerint *a* és *b* arányát a legnagyobb közös osztó kiszámítására szolgáló euklideszi algoritmus jellemzi. (Ha *a* nagyobb, mint *b,* akkor vonjuk ki a-ból *b-t,* ahányszor csak lehet. Ezt megtehetjük valahányszor, és még marad r_1. Ezután vonjuk ki r_1-et b-ből, ahányszor csak lehet stb., lásd 98. oldal). Az *a* és *b* aránya akkor egyenlő c és *d* arányával, ha az euklideszi algoritmus mind a kettőnél pontosan ugyanúgy folyik le. (Ha például $a>b$ esetén a-ban *b* n-szer van meg és marad r_1 akkor c-ben *d* is *n*-szer van meg és marad q_1. Ugyanígy ha b-ben r_1 megvan m-szer és marad r_2, akkor d-ben q_1 szintén *m*-szer van meg és marad q_2 stb.) Ezzel az aránydefinícióval minden helyes aránypár-átalakítás igazolható, de a két beltag felcserélésének jogossága nem. Ezen a nehézségen segített EUDOXOSZnak korát valóban megelőző aránydefiníciója, amely lehetővé teszi, hogy az arányelméletet teljesen általános alapokra helyezze. Úgy határozta meg az arány fogalmát, hogy megadta az arány helyzetét az azt közrefogó racionális arányok között. Eszerint az *a : b* arány akkor és csak akkor egyenlő a *c : d* aránnyal, ha teljesül, hogy amikor

$$am \gtreqless bn,$$

ugyanakkor

$$cm \gtreqless dn.$$

Eukleidész *Sztoikheiájának* V. könyvében az arányok egyenlőségének ez a meghatározása geometriai jellegű, és nem korlátozódik csupán az összemérhető szakaszok arányára, ami meggyőzően mutatja, hogy **Eudoxosz** definíciója alkalmazható az irracionális arányok esetére is.

Azért, hogy jobban értékeljük **Eudoxosz** zseniális aránydefinícióját, ugorjunk előre az időben mintegy 2200 évet, és vázoljuk **Richard Dedekind** (1831-1916) német matematikus halmazelméleti

módszerét, amellyel a valós számokat definiálta. **Dedekind** maga sem tagadta, hogy ötlete **Eudoxosz** hatására született. A valós számokat meghatározó Dedekind-szeleteket nyerjük, ha a racionális számok halmazát két olyan *A* és *B* részhalmazra bontjuk, amelyekre igaz, hogy egyik sem üres halmaz, de a metszetük üres, továbbá, hogy az *A* halmaz bármely *a* eleme nagyobb a *B* halmaznak minden *b* eleménél. Az így alkotott *A* és *B* részhalmazok (szeletek) a következő tulajdonságok valamelyikével rendelkeznek:

1. B-ben van legnagyobb elem, és *A*-ban nincs legkisebb. Erre példa: *B* legyen az olyan racionális számok halmaza, amelyek nem nagyobbak 2-nél. Ekkor nyilván *A* azon racionális számok halmaza, amelyek nagyobbak 2-nél.

2. *A-ban* van legkisebb elem, és B-ben nincs legnagyobb. Például *A* legyen azon racionális számok halmaza, amelyek nem kisebbek 2-nél. Ekkor B azon racionális számok halmaza, amelyek kisebbek 2-nél.

3. Lehet végül, hogy A-ban nincs legkisebb elem, és B-ben nincs legnagyobb elem. Például: *A* a √2-nél nagyobb, B pedig a √2-nél kisebb racionális számok halmaza.

Az 1. és a 3. esetben létezik olyan valós szám, és csak egy, amely az *A* felső szelet minden eleménél kisebb, de a B alsó szelet egyetlen eleménél sem kisebb. (Példáinkban a 2, illetve a √2.) Ugyanígy a 2. és 3. esetben létezik pontosan egy olyan valós szám, amely nem nagyobb *A* egyetlen eleménél sem, de B minden eleménél nagyobb. (Példáinkban a 2, illetve a √2.) A Dedekind-szeletek tehát alkalmasak a valós számok definiálására, és fordítva: minden valós számhoz egyértelműen tartozik két Dedekind-szelet.

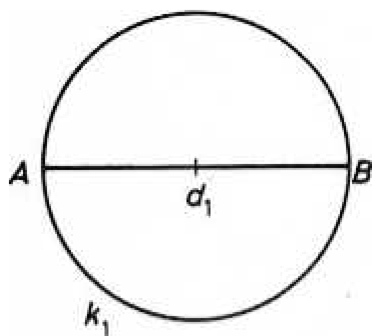
Dedekind előtt 2200 évvel lényegében hasonló módszert talált ki (a halmazelméleti fogalmak ismerete nélkül) **Eudoxosz** az *a : b* arány meghatározására. A természetes számok m, *n* számpárjait osztályokba sorolta. Alkossák az egyik osztályt azon *m, n* számpárok, amelyekre nézve $am > bn$. Álljon a másik osztály azokból az *m, n* párokból, amelyekre teljesül, hogy $am < bn$. Azokat az m, *n* számpárokat pedig, amelyeknél $am = bn$, számítsuk az előbbi két osztály egyikéhez. Az *a : b* arány akkor egyenlő a *c : d* aránnyal, ha „Eudoxosz-szeleteik” azonosak.

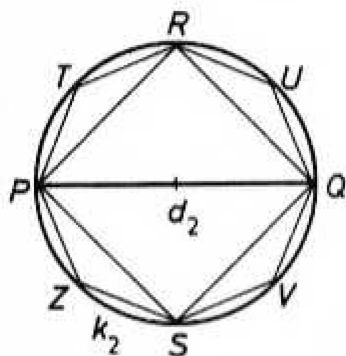
Csak kissé kell átfogalmaznunk az Eudoxosz-féle osztályba sorolást, hogy kitűnjék az azonosság **Eudoxosz** és **Dedekind** eljárása között. Írjuk ugyanis az $am > bn$, az $am < bn$ és az $am = bn$ helyett, hogy

$$\frac{m}{n} > \frac{b}{a}, \quad \frac{m}{n} < \frac{b}{a} \quad \text{és} \quad \frac{m}{n} = \frac{b}{a}.$$

Ekkor látszik, hogy az *m, n* számpárok osztályokba sorolása helyett az — alakú számok, vagyis a racionális számok halmazának két osztályba való sorolásáról beszélhetünk. Nem kell csodálkoznunk azon, hogy 2200 évvel később, a matematika akkori fejlettségi fokának megfelelően Dedekind EUDOXOSZnál jóval precízebben járt el. Az ókori matematikus ötlete így is magán viseli a lángész jeleit, és évezredekkel később is termékenyítően hatott a matematikai gondolkozásra.

Állításunk még nyilvánvalóbbá válik, ha szemügyre vesszük másik nagy felfedezését, az ún. „kimerítés” módszerét. Az eljárás cseppet sem szerencsés nevét valamikor a középkorban kapta, mert hasonlatos ahhoz a művelethez, amellyel egy edényből egy kisebb merítőedénnyel a folyadékot apránként kimeregetjük. A „kimerítés” módszerének lényege az indirekt bizonyítás, annak egy olyan fajtája, amellyel rendszerint területet vagy térfogatot határozunk meg.





75. ábra

A módszert Eudoxosz találta fel, bár a gondolat csíráját már megtaláljuk az i. e. 450 táján élt ANTIPHÓNnál is. Ez a görög szofista a körnégyszögesítés feladatát vélte megoldani oly módon, hogy az adott körbe valamilyen szabályos húrsokszöget rajzolt, és annak oldalszámát rendre megduplázta. Úgy gondolta, hogy így eljut egy olyan sokszöghöz, amelynek területe már akkora, mint a köré. Sokszöget pedig már lehet négyszögesíteni - mondta. Az ötlet, hogy a kört növekvő oldalszámú, beírt szabályos sokszögek sorozatával közelítse meg, életrevaló gondolat, de hogy az így nyert sokszögek valamelyike is a körrel azonosítható, az a matematikusok számára elfogadhatatlan állítás. Hogyan tökéletesítette Antiphón gondolatszikráját Eudoxosz? Mutassuk ezt be egy példán, amelyben bebizonyította, hogy két kör területe úgy aránylik, mint átmérőik négyzete (75. ábra).

A k_1 kör területe legyen t_1 és átmérője d_1. Ugyanígy a kisebb k_2 kör

területe t_2, átmérője pedig d_2. Ekkor az állítás:

$$d_1^2 : d_2^2 = t_1 : t_2.$$

Eudoxosz így gondolkozott: Tegyük fel, hogy ez az állítás nem igaz. Így az aránypár biztosan akkor helyes, amikor például t_2 helyére valamilyen *t* területet írunk, amely lehet, hogy kisebb, lehet, hogy nagyobb t_2-nél, tehát

$$d_1^2 : d_2^2 = t_1 : t.$$

Tételezzük fel először, hogy $t < t_2$. Rajzoljuk ekkor a k_2-be a *PSQR* négyzetet. Ennek területe nagyobb, mint a kör területének a fele, hiszen a körülírt négyzet területe, ami a körterületnél nagyobb, éppen kétszerese a beírt négyzet területének. Ennek a megállapítása azért lényeges, mert **Eudoxosz** arra a később **Arkhimédész** által is használt (de már a *Sztoikheiában* is olvasható) axiómára alapozott, amely szerint, ha egy mennyiségből elvesszük a felénél nagyobbat, majd a maradékból ismét annak a felénél nagyobbat, és ezt a műveletet elég sokáig folytatjuk, akkor eljutunk egy olyan maradékhoz, amely már kisebb, mint valamely előre megadott, tetszőleges kicsiny szám.

Eudoxosz első maradéka (a t_2 területből kimerítjük a négyzet területét) az ábra négy körszeletének területösszege. Ha most ebből elvesszük a *PTR* háromszög területének a négyszeresét, amely nagyobb a kisebbítendő felénél, akkor a maradék a körterület és a körbe írható szabályos nyolcszög területének a különbsége. Az eljárást folytatva, az idézett axióma szerint eljutunk egy olyan n-oldalú sokszöghöz, amelynek t_n területe már kevesebbel különbözik a kör területétől, mint a $(t_2 — t)$ terület, tehát:

$t_2 — t_n < t_2 — t$, azaz $t_n > -t$ (1)

Rajzoljunk ezután a k_1, körbe is n-oldalú szabályos sokszöget, amely természetesen hasonló a k_2 körbe rajzolt n-oldalú szabályos sokszöghöz. Így területeik aránya egyenlő megfelelő lineáris méretük négyzetének arányával, tehát a két területet T_n-nel

és t_n-nel jelölve:

$$d_1^2 : d_2^2 = T_n : t_n,$$

de feltevésünk szerint:

$$d_1^2 : d_2^2 = t_1 : t.$$

A két aránypárból:

$t_1 : t = T_n : n$ vagy $t_1 : T_n = t : t_n$

Mivel az utolsó aránypárban $t_1 > T_n$, azért kell, hogy $t > t_n$ legyen. Ez viszont ellentmond az (1) alatti megállapításnak. Kezdeti feltevésünk tehát ellentmondáshoz vezetett, ezért nem lehet helyes, azaz t nem kisebb t_2-nél.

76. ábra

Lehetséges azonban, hogy $t > t_2$. Ekkor a k_1 és k_2 körök szerepét felcserélve az előbbi gondolatmenettel szintén ellentmondáshoz érkezünk. Így mivel t a t_2-nél sem kisebb, sem nagyobb, azért

azzal csak egyenlő lehet, azaz:

$$d_1^2 : d_2^2 = t_1 : t_2.$$

Meglepően érdekes, ahogyan e módszert **Eudoxosz** a háromszög alapú gúla térfogatának kiszámításánál alkalmazta. Először azt mutatta meg, hogy minden háromszög alapú gúla felbontható az eredetihez hasonló két egybevágó gúla és két, egymással egyenlő térfogatú háromszög alapú hasáb összegére *(76. ábra)*. Rajzoljuk meg ugyanis a gúla mind a négy lapjának a középvonalait. Az ábráról könnyű belátni, hogy az *EFGD* tetraéder egybevágó az *AKHE* tetraéderrel, és mindkettő térfogata a teljes gúla térfogatának a nyolcadrésze. Az is látszik, hogy az *EHJFG* téglalap alapú gúla egybevágó az *EHJFK* gúlával. Végül vegyük észre, hogy a *HJCG* és a *KBJF* tetraéderek egybevágók egymással is meg a két résztetraéderrel is. Ezért ha például a *HJCG* gúla térfogatát V_{HJCG}-*vel* jelöljük és a többi térfogatot is ugyanilyen módon, akkor:

$$V_{EHJFG} + V_{HJCG} = V_{EHJFK} + V_{KBJF}$$

azaz a *HJCEFG* hasáb térfogata egyenlő az *EHKFJB* hasáb köbtartalmával.

Az *ABCD* gúla csakugyan felbontható két egybevágó gúlára *(AKHE* és *EFGD),* valamint két egyenlő térfogatú, háromszög alapú hasábra *(HJCEFG* és *EHKFJB).* A két utóbbi prizma térfogatösszege (V_h) az eredeti gúla *V* térfogatának 3/4-része, tehát nagyobb, mint az alapgúla térfogatának a fele:

$$V_h = \frac{3}{4}V > \frac{V}{2}.$$

Ezt követőleg lássuk be, hogy két egyenlő magasságú, de különböző alapú tetraéder esetén az előbb leírt felbontásokban szereplő prizmapárok térfogatai úgy aránylanak, ahogyan a tetraéderek alapterületei. Ez rögtön látszik, ha mindkét gúlánál az előbbi ábra *HJCEFG* hasábjának megfelelő prizmáit hasonlítjuk össze. Ennek a prizmapárnak mindkét gúlánál azonos a magassága (az eredeti gúla magasságának a féle), és alaplapjuk területe

négyszer kisebb, mint gúláik alaplapjának a területe. Ha tehát az egyik gúla alapterülete T_1 a másiké T_2 és közös magasságuk h, akkor a megfelelő prizmák V_1, illetve V_2 térfogata:

$$V_1 = \frac{T_1}{4} \cdot \frac{h}{2} \quad \text{és} \quad V_2 = \frac{T_2}{4} \cdot \frac{h}{2}.$$

A térfogatok aránya: $V_1 : V_2 = T_1 : T_2$.

A kétszeres térfogatok aránya ugyanennyi: $2V_1 : 2V_2 = T_1 : T_2$.

Egyenlő magasságú gúlák esetén tehát a felbontásból eredő megfelelő prizmapárok térfogataránya megegyezik a gúlák alapterületarányával.

Ezen előkészítő tételek után alkalmazta **Eudoxosz** a „kimerítés” módszerét annak a bizonyítására, hogy két, egyenlő magasságú, háromszög alapú gúla köbtartalmának (K_1 és K_2) aránya egyenlő alapterületük (T_1 és T_2) arányával; jelöléseinkkel:

$K_1 : K_2 = T_1 : T_2$, ahol legyen $K_1 > K_2$ és $T_1 > T_2$.

Tegyük fel ugyanis az állítás ellenkezőjét, azaz azt, hogy a $T_1 : T_2 = K_1 : K_2$ aránypár nem helyes, vagyis ha az első három tagját megtartjuk, akkor K_2 helyett valami K-t kell írnunk, amely kisebb vagy nagyobb K_2-nél. Tételezzük fel tehát, hogy

$T_1 : T_2 = K_1 : K$, ahol legyen először $K < K_2$.

Végezzük el ekkor a kisebbik K_2 gúlán az első segédtétel szerinti felbontást, és vegyük el a gúlából a prizmapárt, tehát a gúla térfogatának felénél nagyobb térfogatot. Marad a két egybevágó gúla, azaz az eredeti gúla térfogatának a negyede: $K_2/4$.

A maradék két gúlán ismételjük meg az előbbi eljárást: a felbontást és a prizmapárok kivonását. Az új maradék már csak $K_2/4^2$. Így folytatva tovább, nyerjük a maradékok

$$\frac{K_2}{4}, \frac{K_2}{4^2}, \ldots, \frac{K_2}{4^n}$$

sorozatát, amelyben egyszer csak elérkezünk egy olyan $m=K_2/4^n$ maradékhoz, amely már kisebb, mint $K_2—K$. Ez a maradék úgy keletkezett, hogy a K_2-ből rendre kivontuk a megfelelő prizmapárokat. Ezek összegét jelöljük S_2-vel. Így:

$m=K_2-S_2<K_2-K$, tehát $S_2>K$ (2)

Végezzük el a sorozatos felbontást és a prizmapárok kivonását most a K_1 térfogatú, T_1 alapterületű gúlán is, ugyancsak n-szer. Itt a kivont prizmák térfogatösszege legyen S_1. A második előkészítő tétel szerint a két gúla kivont prizmapárjainak térfogatösszege arányos a megfelelő alapterületekkel, azaz:

$T_1 : T_2=S_1 : S_2$.

Feltevésünk szerint azonban: $T_1 : T_2=K_1 : K$.

A két aránypárból: $S_1 : S_2 = K_1 : K$ vagy $S_1 : K_1=S_2 : K$.

Mivel azonban $S_1<K_1$ azért $S_2<K$. Ez viszont ellentmond a (2) alatti megállapításunknak. Feltevésünk tehát nem volt jogos.

Lehet azonban, hogy $T_1 : T_2=K_1 : K$, ahol $K>K_2$. Ha most a K_1 és K_2 térfogatú gúlák szerepét felcseréljük, és az előbbi gondolatmenetet így alkalmazzuk, akkor újra ellentmondáshoz jutunk. Az aránypár negyedik tagja, *K* tehát sem kisebb, sem nagyobb nem lehet K_2-nél, azaz azzal egyenlő. Így

$T_1 : T_2= K_1 : K_2$, illetve: $K_1 : K_2 = T_1 : T_2$.

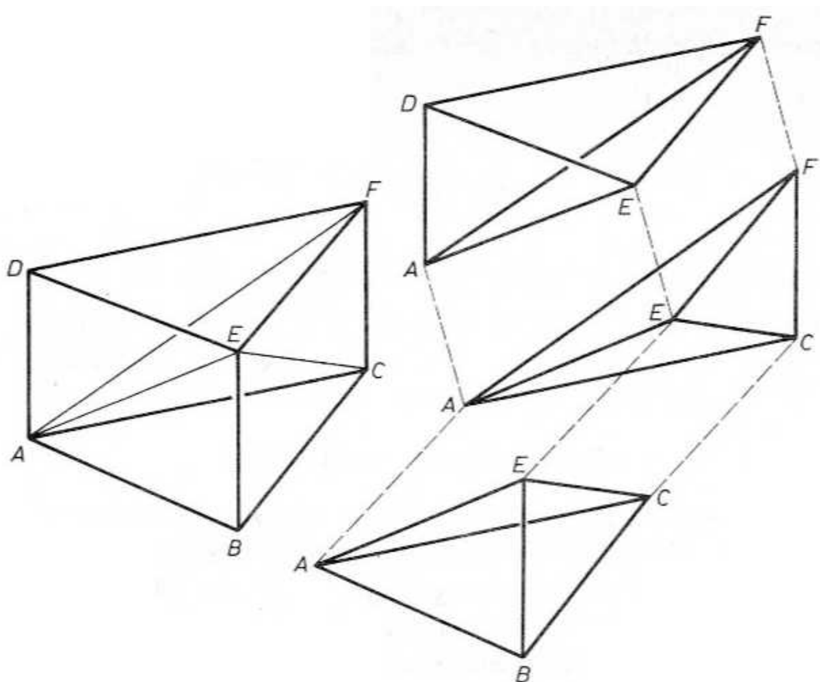
E tételből következik, hogy az egyenlő magasságú és egyenlő alapterületű háromszög alapú gúlák térfogata megegyezik.

Befejezésül **Eudoxosz** megmutatta még, hogy minden háromszög alapú hasáb három egyenlő térfogatú, háromszög alapú gúlára bontható. A 77. *ábra* szerint ugyanis:

$V_{ABCDEF}=V_{ABCE}+V_{CEFA}+V_{EFDA}$

de $V_{ABCE} = V_{EFDA}$, mert magasságuk (BE és DA) egyenlő és T_{ABC}, T_{DEF} alapterületük is. Ugyanígy $V_{CEFA} = V_{ABCE}$, mert alapterületük ($T_{BCE} = T_{CEF}$) egyenlő, és ezen alapokhoz tartozó magasságuk is megegyezik. Ezek alapján valamely háromszög alapú gúla térfogata harmada annak a háromszög alapú hasáb térfogatának, amelynek alapterülete és magassága egyenlő a gúla hasonló adataival.

77. ábra



A gúlának Eudoxosz szerinti térfogat-meghatározását főleg azért volt érdemes figyelemmel kísérni, mert szemlélteti a nagy matematikusnak azt a szintén korszakalkotó törekvését is, hogy valamely tétel szorosan illeszkedjék egy másikra, és közös alapjuk néhány elfogadott, nem bizonyított állítás legyen. Eudoxosz tehát már elég fejlett fokon úttörője volt a geometria axiomatikus felépítésének.

Befejezésül megemlítjük, hogy Eudoxosz korának nemcsak neves csillagásza, kiváló matematikusa, geográfusa, hanem kitűnő

szónoka is volt. Élete utolsó éveiben visszatért szülővárosába, Knidoszba. Itt halt meg i. e. 347 körül köztiszteletben álló tudósként, aki megbecsülést vívott ki városának törvényhozó testületében is.

AZ ALEXANDRIAI EUKLEIDÉSZ (i. e. 365?-300?)

Az Athén és Spárta egymás elleni harcában kimerült görög városok hatalmát II. **Fülöp** makedón király az i. e. 338-ban lezajlott khaironeiai csatában végképpen megtörte. Amit az egymással hadakozó görög poliszok önmaguktól elérni nem tudtak, azt megvalósította a hódító II. **Fülöp** : uralma megteremtette az egységes Görögországot. Elég bölcs volt ahhoz, hogy a görög kultúrát ne semmisítse meg, sőt a hellén szellem további kibontakozását segítse. Fiát is görög szellemben neveltette, **Nagy Sándor** egyik nevelője a matematikus **Menaikhmosz** volt, a másik pedig nem kisebb tudós, mint **Arisztotelész.** II. **Fülöp** világuralmi terveit fia, **Nagy Sándor** káprázatosan rövid idő alatt teljesítette. A nagy hódító Perzsia legyőzése után megteremtette az ókor legnagyobb birodalmát, amely Makedóniától Görögországon, Perzsián keresztül az Indiai-óceánig terjedt. Abban azonban, hogy e hatalmas birodalmat megszervezze, megakadályozta egy maláriás roham. Korai, hirtelen halála után birodalmát hadvezérei felosztották maguk között.

Hadvezéreinek egyike, **I. Ptolemaiosz** vagy **Ptolemaiosz Szótér** (szótér = megmentő, fenntartó) néven lett Egyiptom ura. A művészeteket és tudományokat pártoló király és utódai, a Ptolemaidák Egyiptom új fővárosában, Alexandriában hatalmas kultúrközpontot építettek ki. Ebben a Muszeion nevű intézetben, amelynek óriási könyvtára mintegy 700 000 irodalmi és tudományos kéziratot őrzött, összegyűltek az akkori világ legnagyobb művészei és tudósai. Ezek az első „államilag” fizetett művészek és tudósok Alexandriában a görög tudomány és művészet addig soha nem látott virágzását bontakoztatták ki. Amíg csak az alexandriai iskola fennállott, képviselte a görög kultúrát, azt a hellenizmusnak nevezett korszakot, amelyet **Nagy** SÁNDORtól szokás számítani.

Nagy jelentősége van annak, hogy a hellenizmus korában a görög kultúra már nem szorítkozott csupán Görögországra, hanem

egyetemessé vált. Ettől kezdve az emberiség kultúrájának nemcsak része, hanem mindmáig egyik lényeges, szilárd tartóoszlopa lett. A görög kultúrszálak át- meg átszövik mai tudományos és művészeti életünket is, azzal elválaszthatatlanul összeforrtak. Hogy ez így van, abban jelentős része van az alexandriai kulturális központnak, ahol több száz éven át megőrizték és alakították a régi értékeket, és ahonnan szétszóródtak az új eredmények az akkori kultúrvilág minden részébe.

Itt született meg az irodalomtudomány. Nemcsak összegyűjtötték, hanem tanulmányozták, értékelték, jegyzetekkel látták el, tehát tudományos és kritikai módon feldolgozták a régi görög irodalmat. Ehhez egységes elméleti szempontokra, irodalomelméleti megalapozásra volt szükség. Az i. e. III. század elején született meg **Neoptolemosz** *Költői művészet* című irodalomelméleti munkája. Neves Homérosz-kutató volt az epheszoszi **Zénodótosz** (i. e. 325?-260). A görög költészetet a kiseposz műfajjal bővítette **Kallimakhosz** (kb. i. e. 310-240), **Arkhimédész** barátja. Az alexandriai költészeti iskola megalapítója a kószi **Philétasz** (kb. i. e. 340-285) volt, számos epigramma, eposz és elégia költője. **Kallimakhosz** kortársa, a szürakuszai **Theokritosz** (kb. i. e. 302-206) is új költői műfajt teremtett bukolikus költészetével. A költői művek színvonalának azonban nem kedvezett igazán az alexandriai, illetőleg az uralkodói udvar légköre. Számos költő csak azért előzte meg a többit, mert műveiben jobban dicsőítette a királyt. Ugyanebben az időben írta népi jellegű komédiáit Szürakuszaiban **Rhintón** (i. **e.** IV—III. század), és „újkomédiáit” Athénban **Menandrosz** (kb. i. e. 342-294). Nem hagyhatjuk ki e néhány irodalmi nagyság felsorolásából az alexandriai Nagykönyvtár néhai igazgatóját, **Eratoszthenészt** sem, aki nemcsak költőnek, hanem képzőművésznek, geográfusnak, csillagásznak és matematikusnak is kiváló volt.

A hellenisztikus kor képzőművészete szintén csodálatos alkotásokat hozott létre, habár ezeket a klasszikus kor műremekei mögé szokták sorolni. A kor szobrászai között dolgozott **Lüszipposz** (i. e. 370-?), **Nagy Sándor** udvari szobrásza, és testvére, **Lüszandrosz.** A kor legnagyobb szobrásziskolája azonban Pergamonban volt. A pergamoni Zeusz-oltár (ma a berlini Pergamon Múzeumban látható)

frízén száznál is több életnagyságú szoboralak lenyűgözően ábrázolja a gigászok és az istenek harcát. Ekkor született a világ hét csodája közé sorolt Rhodoszi Kolosszus is: Héliosz isten 30-40 m magas bronzszobra, a lindoszi **Kharész** műve.

A hellenizmus festményei nem maradtak fenn. Utalásokból azonban mégis sejthetjük, hogy Nagy Sándor festőjétől, Apellész-től kezdve a rhodoszi PRÓTOGENÉSZen, a nükioni PAUSZANIASZon, a zsánerképeket festő DIOSZKORIDÉSZen keresztül az i. e. II. századi TIMOMAKHOSZig számos festő volt, aki versenyre kelhetett korának szobrászaival.

A kor építészete sem vallott szégyent a szobrászat mellett. Olyan alkotások születtek ekkor, mint például az alexandriai kikötő bejáratánál épült Pharosz-szigeti, több mint 100 m magas világítótorony, a knidoszi Szósztratosz műve, a világ hetedik csodája.

A művészetek mellett a tudományok is addig még nem tapasztalt ütemben fejlődtek. A Muszeionban a beteges II. **Ptolemaiosz Philadelphosz** idején keletkezett az alexandriai orvosi iskola. Tagjai királyi engedéllyel még boncolhatták is a gonosztevők tetemeit. Itt dolgozott a khalkédóni **Hérophilosz** (kb. i. e. 335-265), az anatómia megalapozója, az idegrendszer felfedezője. Ekkor működött Antiokheiában a Szeleukidák orvosaként a keószi **Eraszisztratosz,** aki a szív anatómiáját írta le, és felfedezte, hogy a szellemi fogékonyság az agytekervények számától függ. Az alexandriai iskola kitűnősége volt a tanagrai **Bakkhiosz, Hippokratész** egyik kommentátora.

Az alexandriai fizikusok és mechanikusok közt említhetjük a lampszakoszi **Sztratónt** (i. e. 340-268?), II. **Ptolemaiosz Philadelphosz** nevelőjét. Művei sajnos elvesztek. A mai értelemben is kísérletező fizikus és feltaláló volt az alexandriai **Ktészibiosz** (kb. i. e. 285-222), megalapítója az alexandriai mechanikai iskolának, amely az i. e. I. századi HÉRÓNig működött.

Az alexandrai csillagászok közül kiemelkedett a szamoszi Arisztarkhosz (i. e. 310?-230?), az ókor KOPERNIKUSZA, a heliocentrikus világkép első képviselője. Az ő csillagászati munkáját egészítette ki a már említett kürénéi Eratoszthenész. Itt működött a

nikaiai Hipparkhosz, a pergéi Apollóniosz és Ptolemaiosz Klaudiosz, az első, gyakorlatban is használható világkép megteremtői.

A csillagászokkal elérkeztünk a hellenizmus matematikusaihoz, hiszen a csillagászok egyszersmind matematikusok is voltak. A hellenisztikus kor matematikájának egyik fellegvára - Athén mellett -szintén Alexandria lett. A matematikatörténetben kiemelkedő szerepét jól érzékelteti néhány nagy név: az alexandriai **Eukleidész,** a szürakuszai **Arkhimédész,** a pergéi **Apollóniosz, Ptolemaiosz Klaudiosz,** az alexandriai **Diophantosz,** hogy valóban csak a legnagyobbakat említsük. Róluk majd részletesebben is szeretnék szólni.

Időrendben az első alexandriai matematikus **Eukleidész.** Életéről - azon kívül, hogy Alexandriában dolgozott - szinte semmit sem tudunk. Kezdetben még össze is tévesztették a megarai **Eukleidéssz**el, **Szókratész** tanítványával. Ezért egy időben szokás volt a matematikus **Eukleidészt** latinosan EUKLIDESnek is nevezni. Talán két anekdota az, amit róla elmondhatunk. **Proklosz** írta le, hogy **I. Ptolemaiosz** királynak arra a kérdésére: miként lehetne a geometriát könnyen elsajátítani, **Eukleidész,** azt felelte: „A geometriához nem vezet királyi út”, és ezt még egy gondolattal meg is toldotta: „Munka nélkül nincs kenyér, sem geometria.” Láttuk, hogy lényegében hasonló mondás forog közszájon **Menaikhmosz-**ról, **Nagy Sándor** egyik nevelőjéről is. A másik elbeszélés szerint, amikor egyik tanítványa megkérdezte az alexandriai mestertől, hogy mi haszna van a geometria tanulásának, **Eukleidész** odaszólt egyik rabszolgájának, mondván: „Adj ennek az embernek három oboloszt, mert hasznot akar húzni tanulmányaiból.” **Papposz** szelíd, béketűrő, segítőkész embernek jellemezte **Eukleidészt.** Mindössze ennyi, amit életéről tudunk.

Szerencsére lényegesen többet tudunk műveiről. Fő munkája, amely mindmáig világhírt biztosít számára, a *Sztoikheia.* A sztoikheia magyarul elemeket jelent. A cím elárulja, hogy összefoglaló írásműről van szó. THALÉSZtől EUKLEIDÉSZig valóban annyit fejlődött a görög matematika, hogy időszerűvé vált egy, az elemi ismereteket átfogó tárgyalás. Nem szabad azonban azt hinnünk, hogy a *Sztoikheia* az akkori görög matematika minden

eredményére kitér. Csak a geometria és az aritmetika elemeit tartalmazza. Mint a legtöbb összefoglaló könyv, jól érzékelhetően ez is forrásmunkák alapján íródott. Úgy sejtjük, hogy **Eukleidész** nem volt nagy alkotó matematikus. Ha a *Sztoikheia* tartalmaz is önálló gondolatokat, ezeket **Eukleidész** nem különítette el. A tizenhárom könyvből álló mű a felhasznált forrásmunkák szerint is részekre tagolódik. Így például az V. és VI. könyvben Eudoxoszra ismerünk, a VIII. könyv ARKHÜTASZról árulkodik, és így tovább. Színvonalasabb az a rész, amely kiváló kútfő alapján készült, és gyengébb az, amelynél a felhasznált anyag is alacsonyabb szintű. A részletes elemi összefoglalás a hibáival együtt is érték, mert jellemzi korát. Ez önmagában mégsem tenné a *Sztoikheiá*t a *Biblia* után a legtöbb kiadást megért könyvvé. Ilyen rendszerező művet **Hippokratész** is írt, ugyancsak *Sztoikheia* címen. Ez azonban sajnálatosan elveszett. Igazán kár, mert a szerző más, töredékesen megmaradt munkáiból ítélve biztosan értékes mű lehetett, amely már rendelkezhetett az akkori *Sztoikheia* című könyveket jellemző módszertani előnyökkel.

Az előzőleg többször is szóba hozott eleai filozófia nyomán egy tételt igazoltnak tekinthetünk, ha az más, elfogadott állításokból következik. Elfogadott állításokra, axiómákra és definíciókra alapozott bizonyításra, vagyis az ún. deduktív módszerre az első szép példa a püthagoreusok elmélete a páros és páratlan számokról, amelyben a kiindulástól eltekintve minden tétel az előzőekre támaszkodik. Bizonyára ilyen, a deduktív módszert használó könyv volt **Hippokratész** *Sztoikheiája* is. **Proklosz** még két *Sztoikheiáról* értesít bennünket. Az egyiket **León,** a másikat **Theudiosz** írta, akikről és említett műveikről csak annyit tudunk, hogy léteztek. Valószínűleg úgy történt, hogy amikor megszületett **Eukleidész** keze nyomán a *Sztoikheiák* legtökéletesebbje, akkor feledésbe ment minden addigi tökéletlenebb kísérlet. Az axiomatikus tárgyalásban ugyanakkor **Eukleidész** *Sztoikheiáját* évezredekig nem sikerült felülmúlni. A művet tehát nem az eredetiség, nem a matematikai alkotás tette halhatatlanná, hanem a korát meghaladóan kifinomult deduktív módszer, a geometria axiomatikus feldolgozása.

Mai szemmel persze az *Elemek* számos alkalmat adnak a tökéletesítésre, javításra. Helyes, hogy a mű az alapozással, azaz a bizonyítás nélkül elfogadott állítások felsorolásával kezdődik, a

geometriai alapfogalmak definíciói azonban nem kielégítőek. Egy fogalmat a definíció más, egyszerűbb fogalmakkal ír körül. **Eukleidész** még nem volt tudatában annak, hogy a geometriában is szükségképpen lenniük kell legegyszerűbb alapfogalmaknak, amelyek nem definiálhatók. Ilyen a pont, az egyenes és a sík. Amikor **Eukleidész** megkísérli ezek meghatározását („Pont az, aminek nincs része.” „Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.” „Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.” stb.), akkor egyszerűbb fogalmakat bonyolultabbakkal definiál.

A kilenc axióma (ezek olyan igazságok, amelyeket a logikus gondolkozás érdekében kényszerülünk elfogadni, tehát kényszerítő erejűek):

„1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.

2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.

3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.

4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.

5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.

6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.

7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.

8. Az egész nagyobb a résznél.

9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.”

Az öt posztulátum (ezek olyan állítások, amelyek nem a gondolkozásunk alappillérei, tehát elfogadásuk nem kötelező):

„1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.

2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak."

Ez az az axiómarendszer, amelynél tökéletesebbet a XIX. század végéig nem sikerült összeállítani. Gondolunk most azokra az axiómákra is, amelyeket **Eukleidész** egy-egy új tárgykör tárgyalása előtt, művének belsejében fektetett le. **Eukleidész** axiómarendszerének fő hibája a hiányosság. Az ő korában még nem volt szükség például a rendezési axiómákra, amelyekkel **David Hilbert** (1862-1943) egészítette ki az Eukleidész-féléket. Ezért a *Sztoikheia* szerzőjét nem ítélhetjük meg szigorúan, bár **Hilbert** - helyesen - leszögezte, hogy egy axiómarendszernek három követelményt kell kielégítenie:

1. Legyen teljes, azaz tartalmazza mindazon axiómákat, amelyek szükségesek az általa megalapozott tudomány bármely tételéhez.

2. Legyen ellentmondásmentes, azaz ne forduljon elő olyan tétel, amelynek helyessége is, hamissága is egyidejűleg igazolható lenne.

3. Legyenek az axiómák egymástól függetlenek, azaz egyiket se lehessen igazolni a többi alapján.

A XX. században azonban **Kurt Gödel** (1906-1978), osztrák matematikus meggondolásai azt eredményezték, hogy az axiómarendszerek ellentmondásmentességének bizonyítása elvi nehézségekbe ütközik, és hogy valamely axiómarendszer nem változtathatatlanul örök, hanem új problémák felbukkanása esetleg új axiómák bevezetését követeli vagy a régiek módosítását. Egy axiómarendszer tehát nem egyszer s mindenkorra tökéletes, hanem fejlődik a tudományterület fejlődésével.

Ezen megállapítások tükrében valóban nem róhatjuk fel Eukleidésznek, hogy az i. e. 300. év táján alkotott axiómarendszere nem tartalmaz olyan axiómákat, amelyek szükségessége csak a XIX. század végén merült fel.

Tartalmát tekintve a Sztoikheia első hat könyve síkgeometriai tételeket tárgyal. Az első négy könyvben olyan ismeretek találhatók, amelyeknél az arány fogalma nélkülözhető, tehát: az alapszerkesztések; a távolságokkal és a szögekkel végezhető műveletek; a háromszögek, négyszögek tulajdonságai és területe; a Pitagorasz-tétel és annak megfordítása; olyan, különböző négyszögek területe közötti összefüggések, amelyek alkalmasak egyszerű algebrai azonosságok szemléltetésére, vagy lehetővé teszik az első- és a másodfokú egyenletek megoldását (az ún. geometriai algebra alapjai); a kör tulajdonságai; a középponti és kerületi szögek kapcsolatai; a szabályos sokszögek tulajdonságai; a szabályos három-, négy-, öt-, hat- és tizenkétszögszerkesztése. Ezekben a könyvekben Eukleidész főképpen a szintetikus bizonyítási módszert alkalmazza. A körzővel és a vonalzóval való mérést nem engedi meg.

Azért, hogy a *Sztoikheiáról* valamivel részletesebb képet alkothassunk, emeljünk ki néhány részletet! Az egymásra épülő tételek közül hasznos megfigyelnünk mindjárt az első hármat. Ezekből voltaképpen a 3. posztulátum (Szabad tetszőleges sugárral, tetszőleges középpont körül kört rajzolni.) szigorú értelmezése tűnik elő. Ezt a posztulátumot sokszor - különösen a szerkesztési gyakorlatban - felületesen úgy magyarázzák, hogy a szerkesztésnél minden további nélkül szabad körzőt használni. Az első három tétel éppen azt mutatja meg, hogy a körző használata is korlátozott: Nem szabad körzővel egy adott távolságot egy másikra „rámérni”. Ilyen szempontból figyeljük meg a *Sztoikheia* első három tételét!

1. tétel: Az adott *AB* szakasz fölé lehet egyenlő oldalú háromszöget szerkeszteni *(78. ábra)*.

Rajzoljunk ugyanis az *A* középpont körül *B-n* átmenő kört, azután a *B* körül egy *A*-n áthaladó kört. A két kör *C* metszéspontja a kívánt háromszög harmadik csúcsa, mert $AC = AB = BC$.

2. tétel: Az adott *A* ponthoz mint az *AD* szakasz

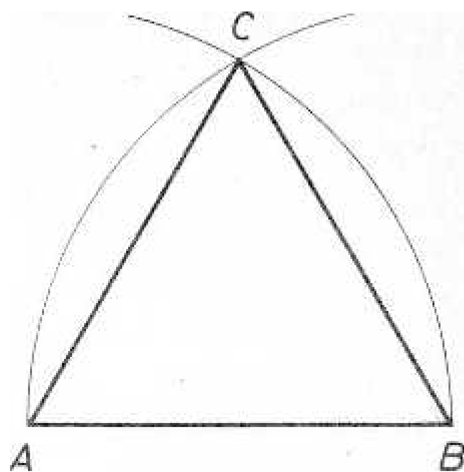
végpontjához, illeszthető az adott *BC* szakasszal egyenlő hosszú szakasz *(79. ábra)*.

Az 1. tétel szerint szerkeszthető az *ABD* egyenlő oldalú háromszög. Hosszabbítsuk meg a *DA* és *DB* oldalt *A,* illetve *B* felől. Ezután rajzoljunk a *B* középpont körül a *C* ponton átmenő kört. Ez kimetszi a *DB* egyeneséből az *E* pontot. Rajzoljuk meg végül a *D* középpont körül az *E* ponton átmenő kört. Ez kimetszi az *AD* egyeneséből az *F* pontot. Az így nyert *AF* = *BE* = *BC.*

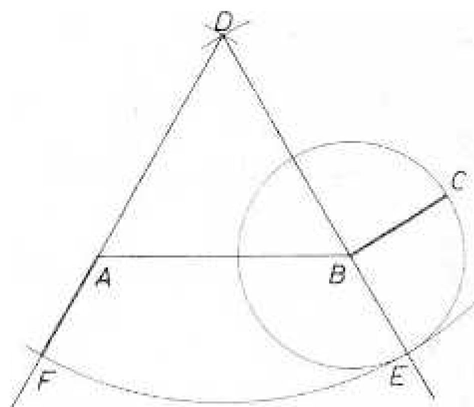
3. tétel: A nagyobb *AB* távolságra az *A* kezdőpontból ráfektethető a kisebb *CD* szakasz *(80. ábra)*.

A második tétel alapján az *A* ponthoz hozzáilleszthető a *CD-vel* egyenlő hosszú *AF* szakasz. Végül az *A* pont körül rajzolt, *F* ponton átmenő kör kimetszi az *AB* szakasz *H* pontját, amikor is: *AH* = *AF* = *CE* = *CD.*

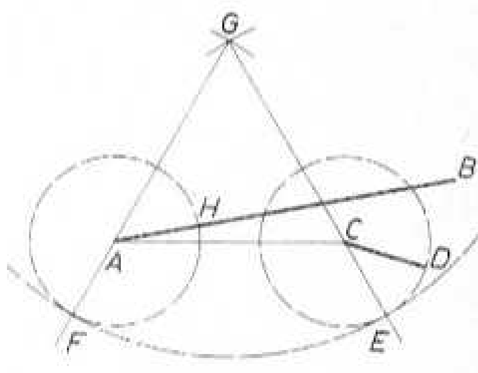
Eukleidész tehát nem engedte meg, hogy az adott *CD* távolságot körzőnyílásba vegyük, és azt rámérjük az *AB* szakaszra.
Szabad azonban az adott *A* pontba beszúrt körzőt kinyitni az A-val nem egybeeső, végesben levő *B* pontig. Gondolom azonban, hogy a gyakorlatban, különösen a középiskolai szerkesztéseknél, nyugodtan elnézhető, ha egy adott vagy már megszerkesztett távolságot „körzőnyílásba veszünk”, hiszen elég nehéz belátni, hogy különbség van az adott *AB* szakasz körzőnyílásba vétele és az *A* pontba szúrt körzőnek a *B* pontig való kinyitása között. Mai szemmel inkább azt róhatnánk fel EUKLEIDÉSZnek, hogy például az első tételben természetesnek veszi, hogy az *A* középpontú, *AB* sugarú kör metszi a *B* középpontú, *A* ponton átmenő kört. Ezt ma biztosan nem tennénk.



78. ábra

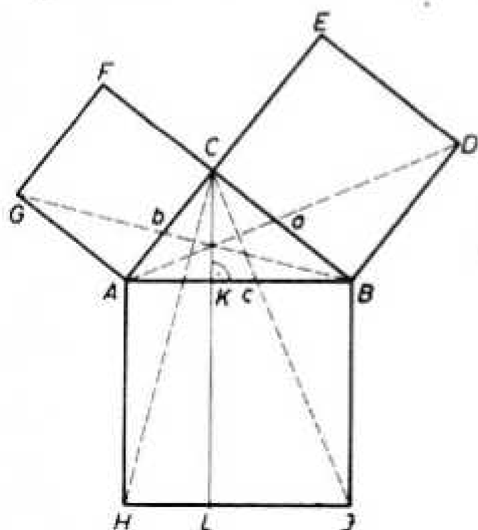


79. ábra



80. ábra

Joggal kifogásolhatnánk azt is, hogy az első posztulátum, amely szerint minden pontból minden pontba húzható egyenes, nem azt jelenti, hogy „két, nem egybeeső ponton át csak egyetlen egyenes fektethető", bár **Eukleidész** az utóbbi értelemben használta. Szögezzük azonban még egyszer le, hogy egy több mint 2000 éves olyan műnek az értékét, amelynek szelleme töretlenül él, nem ronthatják le a részletekben fellelhető, de az alkotás hatását nem befolyásoló hiányosságok, amelyeket csak a több évezredes fejlődés hozott felszínre.



81. ábra

A *Sztoikheia* bevezető részéhez tartozik a Pitagorasz-tétel és megfordítása (I. könyv 47. és 48. tétel). A tétel igazolása azon kevesek közé tartozik, amelyről úgy sejtjük, hogy **Eukleidész** alkotása. Ezért és szépsége miatt is érdemes megismerni. A *81. ábráról* leolvasható, hogy az *ABC* derékszögű háromszög oldalai fölé rajzolt négyzetekre nézve igaz, hogy: $a^2+b^2=c^2$.

Az igazoláshoz szükséges (már előzőleg belátott) tételek:

Két háromszög egybevágó, ha két oldalban és a közbezárt szögben megegyeznek.

A háromszög területét úgy is kiszámíthatjuk, hogy az egyik oldalának mérőszámát megszorozzuk az oldalhoz tartozó magasság mérőszámának a felével.

Két egybevágó háromszög területe egyenlő.

A téglalap (négyzet) területét úgy is kiszámíthatjuk, hogy két szomszédos oldalának mérőszámát összeszorozzuk.

A Pitagorasz-tétel igazolásához a rövidség kedvéért vezessük be a következő jelölést: például az *ABC* háromszög területét jelöljük t_{abc}-vel. A részletes indoklást elhagyva:

$a^2=t_{BDEC}=2t_{ABD}=2t_{BJC}=t_{LJBK}$

$b^2=t_{ACFG}=2t_{AGB}=2t_{ACH}=t_{AHLK}$

A kettő összege: $a^2+b^2=t_{LJBK}+t_{AHLK}=t_{ABJH}=c^2$.

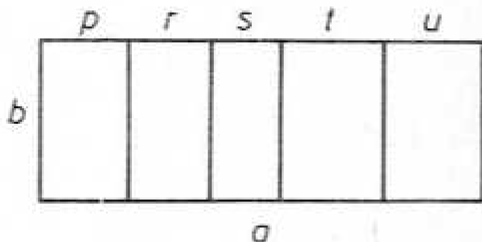
Érdemes felfigyelnünk arra, hogy Eukleidész idejében már természetes volt, hogy egy tételből nem következik a tétel megfordítása, tehát a megfordítás igazolása külön meggondolást igényel.

A Sztoikheia II. könyve rövid, 14 tételes rész. Kissé részletesebb tárgyalása azért indokolt, mert kitűnően jellemzi az elgeometriásodott görög algebrát. Biztosra vehetjük, hogy már a püthagoreusok ismerték a babiloni algebra főbb eredményeit. Ez a

„szóba fűzött” algebra már eljutott a másodfokú egyenletrendszerek megoldásáig, sőt az algebrai szimbólumok kifejlődésének a lehetőségét is tartalmazta, hiszen a babiloni ékírásban az ismeretlent egyetlen jellel írták le, mintha csak ma azt mondanánk, hogy jelöljük az ismeretlent az x betűvel. Ugyanígy rövid jele volt a műveleti utasításoknak is.

Mondták ugyan, például az *a*b* szorzat helyett, hogy *ab* téglalap, vagy az *a * a* helyett, hogy *a* négyzet, viszont a görög matematikában már csak a geometriai értelmezés maradt meg. Mi lehet az oka ennek a „beszűkülésnek”? Minden valószínűség szerint közrejátszott ebben a görög gondolkozásmód, amely feltétlen pontosságot igényelt. A babiloni számoló, ha a négyzetgyökvonásnál nem kapott pontos eredményt, akkor megelégedett a gyakorlatban jól használható közelítéssel is. Az elméleti beállítottságú görög matematikusokat az eleai filozófiára épített számfogalmuk és a pontosságra való törekvésük mellett nem elégítette ki az, hogy például a négyzet oldalhosszából az átló hosszát nem tudták sem számmal (egész számmal), sem aránnyal kifejezni, amikor ugyanennek a feladatnak a geometriai megoldására a szerkesztés elvileg teljesen pontos eredményt szolgáltatott. Az irracionális számok felfedezése után, mivel azokat szakaszokkal való ábrázolhatóságuk ellenére sem lehetett „számokkal” kifejezni, minden algebrai jellegű feladatot átfogalmaztak geometriaivá. Így a számok közötti műveleteket, a négyzetgyökvonásig bezárólag, a számoknak megfeleltetett szakaszok segítségével mindig el tudták végezni: a számok összeadását, illetve kivonását a szakaszok összeadásával, illetve kivonásával helyettesítették; a szorzást és az osztást a párhuzamos szelők tételével hajtották végre, a négyzetgyökvonást pedig mértaniközép-szerkesztéssel. Ennek az ún. geometriai algebrának a nyelve ilyen módon bizony nehézkessé vált, és - amint látni fogjuk - végső fokon a görög matematika fejlődésének is határt szabott, viszont nagyon jól megfelelt a görögök pontossági igényének.

A *Sztoikheia* idézett II. könyve éppen e püthagoreusi hagyományokon alapuló görög geometriai algebra módszereibe ad betekintést. Nézzük mindjárt a könyv 1. tételét:



82. ábra

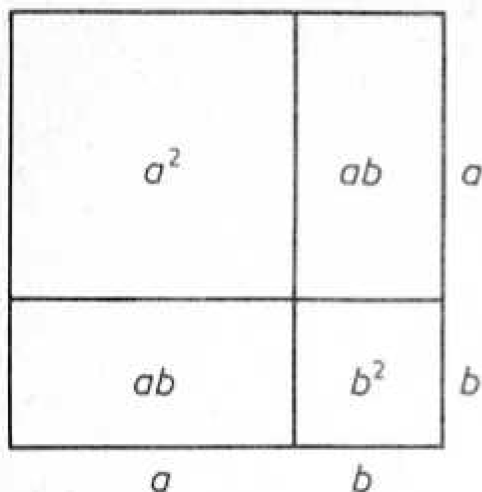
Ha két szakasz közül az egyiket szétdaraboltuk akárhány részre, akkor a két szakasz által alkotott téglalap egyenlő azoknak a téglalapoknak az összegével, amelyeket a felosztatlan szakasz alkot az egyes részszakaszokkal. Ezt a meglehetősen bonyolult fogalmazású állítást rögtön áttekinthetővé teszi a *82. ábra*. Ezt szemlélve, mai jelöléseinket használva, a tétel tartalma:

$$b(p+r+s+t+u)=bp+br+bs+bt+bu,$$

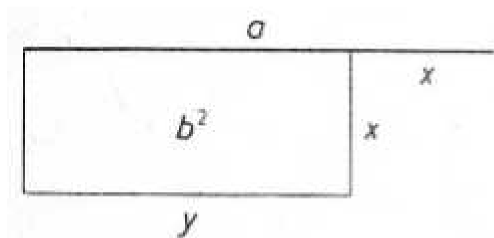
amelyben ráismerünk az összeadás-szorzás disztributív törvényére.

A 4. tétel ugyanígy geometriai ruhába öltözteti a két tag négyzetre emelési szabályát:

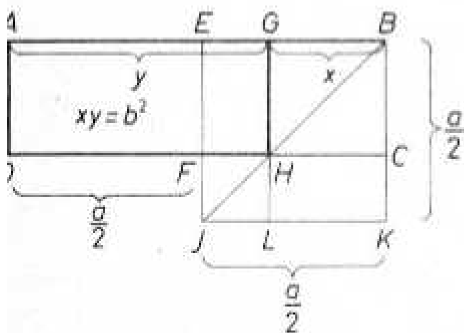
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$



83. ábra



84. ábra



85. ábra

Ugyanez a 4. tétel szerint: Ha egy szakaszt tetszőlegesen két részre osztunk, akkor a teljes szakasszal alkotott négyzet egyenlő a részszakaszok négyzetének és a részek által meghatározott két téglalapnak az összegével *(83. ábra)*. Talán nem szükséges megjegyeznünk, hogy négyzeten a négyzet területének mérőszámát, téglalapon a téglalap területének a mérőszámát értjük.

A II/7. tétel hasonló módon fejezi ki az $(a-b)^2 = a^2-2ab + b^2$ azonosságot.

Meggyőző módon mutatja a babiloni algebrának a görög algebrában való továbbélését és geometriaivá válását a II/5. és II/7. tétel. E történeti folytonosság illusztrálására kis kitérőt teszünk. Lényegében két régi babiloni feladatról lesz szó. Az egyik így szól: Adott két szám összege és ugyanennek a két számnak a szorzata. Melyik ez a két szám? Mai jelöléseinkkel a megoldásra váró egyenletrendszer :

$x+y=a$

$xy=b^2$.

Ha az x, y ismeretleneket és az adott a, b számokat szakaszoknak tekintjük, akkor a 84. ábra szerint az a szakasz két: x és y szakasz összegére bontandó úgy, hogy az xy téglalap területe b^2 legyen. A görög fogalmazás szerint: illesszünk az a szakaszhoz olyan $xy=b^2$ területű téglalapot, hogy az a szakasz kimaradt részéhez még egy x oldalú négyzetet lehessen toldani. Röviden: illesszünk az a szakaszhoz b^2 téglalapot egy négyzet hiánnyal. A feladat megoldása a következő (ez a II/5. tétel tartalma):

Tekintsük a feladatot megoldottnak *(85. ábra).* Felezzük meg az $AB=a$ szakaszt *(E).* Az *E* felezőpontban állítsunk merőlegest az *AB* szakaszra *(EF).* Ezt messük el az *x* oldalú négyzet *BH* átlójának egyenesével (J). Az *EJ* szakasszal rajzoljuk meg a *JKBE* négyzetet. Végül hosszabbítsuk meg a *GH* szakaszt, hogy elmetssze *JK-t* az *L* pontban. A területekről belátható, hogy

$t_{EFHG}=t_{HLKC}$

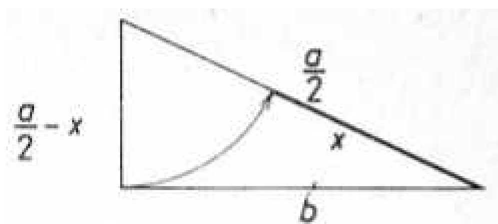
tehát az *EFHLKB* gnómón területe megegyezik az *AGHD* téglalap területével, azaz

$t_{EFHLKB}=t_{ADHG}$

vagyis

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=b^2.$$

Ha most ezt a megállapítást egy olyan derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételnek tekintjük, amelynél a két befogó *b* és (a/2-x),az átfogó pedig a/2, akkor ez a háromszög az átfogóból és a *b* befogóból megszerkeszthető, ha $a/2 > b$ *(86. ábra).* Az a/2 átfogónak és az (a/2-x) befogónak a különbsége pedig éppen *x,* és $a-x=y$.



86. ábra

Ennek a b^2 területű téglalapnak az *a* szakaszhoz „hiánnyal” való hozzáillesztése tehát az

$x + y = a$

$xy = b^2$

másodfokú egyenletrendszer megoldására szolgál. A hiány neve görögül „elleipszisz”, azért ezt a szerkesztési feladatot hiánnyal való illesztésnek vagy elliptikus illesztésnek nevezik. A megoldhatóság feltétele, hogy $a/2 > b$ legyen.

Az egyenletrendszerből következik, hogy $y = a — x$ lévén $x(a— x) = b^2$. Mivel a görögök a negatív számokat nem ismerték, azért a rendezés után az

$x^2 + b^2 = ax$

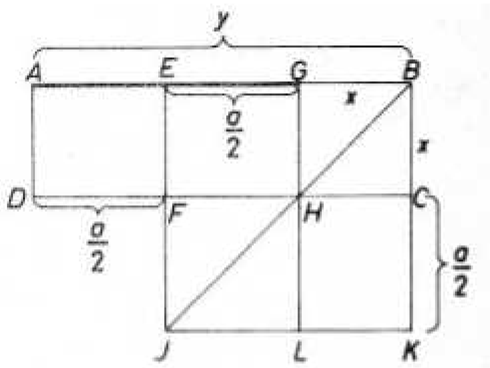
típusú másodfokú egyenlethez jutunk, amely tehát szintén a b^2 területű téglalapnak az *a* szakaszhoz való elliptikus illesztésével oldható meg.

Egészen hasonló tartalmú a II/6. tétel. Ehhez az az óbabiloni feladat fűződik, amely szerint adott két szám különbsége és ugyanazon két szám szorzata. Keresendő a két szám, azaz megoldandó az

$y — x = a$

$xy = b^2$

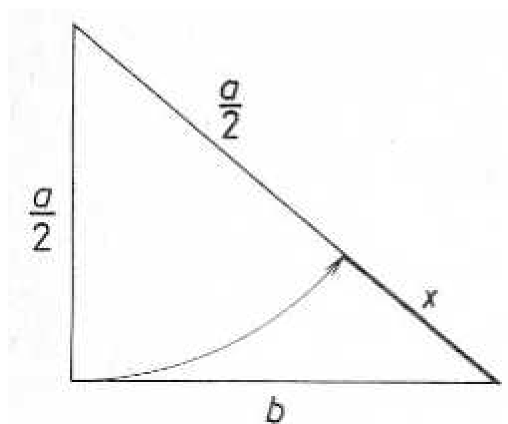
egyenletrendszer!



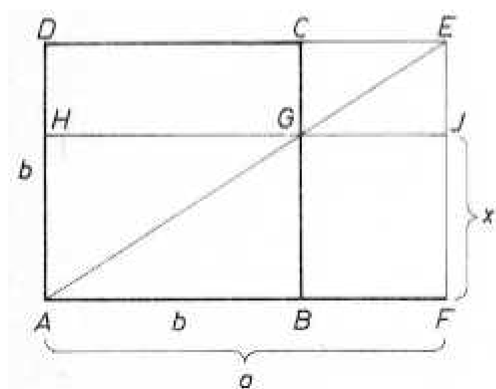
87. ábra

Most *a* a két ismeretlen különbsége, tehát szakaszokkal elképzelve és az $xy = b^2$ területű téglalapot is feltüntetve, nyerjük a *87. ábra ABCD* részét. Most tehát az *a* szakaszhoz úgy kell a b^2 területű *xy* téglalapot illeszteni, hogy a téglalapból az *a* szakasz alól még „kilógjon" (az *a* szakaszon túlnyúljék) egy *x* oldalú négyzet. Ezt a szerkesztést többlettel való illesztésnek nevezték. A többletnek, a feleslegnek a görög neve hüperbolé, azért ez az ún. hiperbolikus illesztés. A megoldás (amely a II/6. tétel tartalma) az előbbihez hasonló. Tételezzük fel most is, hogy már megoldottuk a feladatot, és állítsunk az *a* szakasz *E* felezőpontjában a szakaszra merőlegest (*EF)*. Ezt messük el az x oldalú négyzet *BH* átlójának egyenesével (*J*). A *JBE* egyenlő szárú derékszögű háromszöget egészítsük ki az *EBKJ* négyzetre, és hosszabbítsuk meg a *GH* szakaszt úgy, hogy elmetssze a JK szakaszt az *L* pontban. Rajzunkról leolvasható, hogy

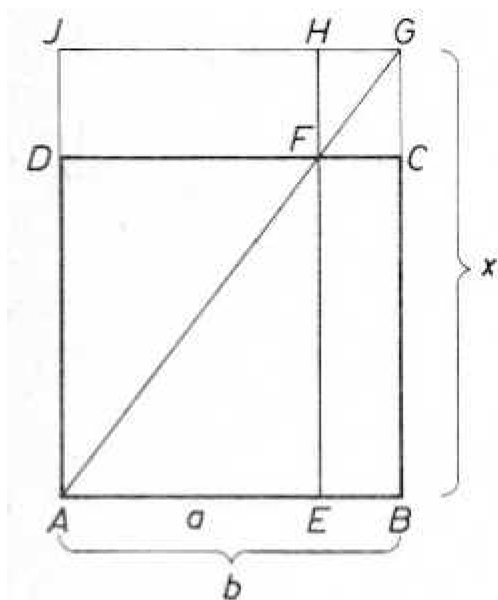
$t_{AEFD} = t_{HCKL}$ és ezért $t_{EBKLHF} = t_{ABCD}$



88. ábra



89. ábra



90. ábra

vagy

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2.$$

Ez az összefüggés megint felfogható egy a/2 és *b* befogójú, (a/2 + x) átfogójú derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tételként, amely háromszög a két befogó segítségével megszerkeszthető *(88. ábra)*. Ha végül az átfogóból a/2-t kivonjuk, akkor nyerjük az *x*

szakaszt, amellyel a kívánt hiperbolikus illesztés már elvégezhető, és adódik az *y* ismeretlen is.

Mivel most az

$y—x = a$

$xy = b^2$

egyenletrendszerből az $y = x + a$, és így $x*(x + a) = b^2$, azért az $x^2 + ax = b^2$ alakú másodfokú „babiloni” egyenlet megoldásához

is eljutunk a vázolt hiperbolikus illesztéssel.

Az illesztések neveiből sejthető, hogy a püthagoreusok gyakorlatában létezett az ún. parabolikus illesztés is. A görög „parabolé" szó illeszkedést jelent, tehát a nem egészen helyes, de elterjedt parabolikus illesztés elnevezés tulajdonképpen illeszkedő illesztést jelent. Ez a feladat azt kívánja, hogy az adott *a* távolsághoz illesszünk adott b^2-tel egyenlő területű téglalapot, azaz oldjuk meg a $b^2 = ax$ egyenletet.

A megoldásnál vegyük először azt az esetet, amelyben $a > b$. A *89. ábrán* először megrajzoltuk a b^2 területű *ABCD* négyzetet. Ennek az *AB* oldalát meghosszabbítottuk az *F* pontig úgy, hogy $AF = a$ legyen. Ezután rajzoltuk meg az *AFED* téglalapot az *AE* átlóval együtt. Ez az átló kimetszi a négyzet *BC* oldalából a *G* pontot. Végül ezen a *G* ponton át párhuzamost húztunk az *AF* szakasszal: *HJ. Az* ábráról leolvashatók a következő területi összefüggések:

$t_{HGCD} = t_{BFJG}$ (mert $t_{AED} = t_{AEF}$, $t_{AGH} = t_{ABG}$ és $t_{GRB} = t_{GJE}$)

Ezért $b^2 = t_{ABCD} = t_{AFJH} = a \cdot FJ = ax$, tehát a megoldás az *AFJH* téglalap, illetve $x = FJ$.

A *90. ábrán* látható a megoldás, ha $a < b$. Itt a b^2 területű *ABCD* négyzet *AB* oldalára ráfektettük az $AE = a$ szakaszt. Ennek *E* végpontján merőlegest állítottunk az *AB* oldalra. Ez metszi a *DC* szakaszt az *F* pontban. Az *AF* egyenese kimetszi a *BC* meghosszabbításából a *G* pontot. Ezután rajzoltuk meg az *ABGJ* téglalapot, amelynek *GJ* oldalából az *EF* merőleges kimetszi a *H* pontot. Teljesen az előbbi indokolás szerint: $t = {}_{EBCF} = t_{DFHJ}$, tehát $b^2 = t_{ABCD} = t_{AEHJ} = a{*}AJ = ax$, és így $x = AJ$. Az *a* szakaszra illeszkedő b^2 területű téglalap tehát az *AEHJ* téglalap.

A most ismertetett háromféle illesztési feladat a többi területátalakítási szerkesztéssel együtt a görög geometriai algebrában számos érdekes alkalmazásra talált, igen sokszor helyettesítve a mai formális egyenletrendezési lépéseinket.

A II. könyv 11. tétele már a II/6. tétel egy speciális alkalmazását mutatja. E feladat lényege egy adott *a* szakasz aranymetszetének a megszerkesztése. Ez a görög ősidőkbe visszanyúló feladat,

amely lehetséges, hogy a képzőművészetből ered, azt tűzi ki célul, hogy az adott *a* távolságot osszuk két olyan x és *a—x* szakaszra, amelyekre nézve igaz a következő aránypár:

$a : x = x : (a—x).$

Egyenletté alakítva: $x^2 = a^2—ax,$ illetve $x^2 + ax = a^2.$ Ez pedig speciális esete a II/6. tétel egyenletének, amennyiben $b^2 = a^2.$ A feladat tehát hiperbolikus illesztéssel oldható meg. A szerkesztés végső lépése az, hogy a *b* és a/2 befogójú derékszögű háromszög átfogójából kivonjuk az a/2-t. A maradék a keresendő x távolság. Most

$b = a,$ tehát a megoldást szolgáltató háromszög egyik befogója a/2, a másik pedig *a.* (Lásd a 88. ábrát!)

Eukleidész a II/11. tételben rejlő aranymetszési feladatot a következő szerkesztéssel oldotta meg *(92. ábra):* Az a^2 területű *ABCD* négyzet *DC* oldalát megfelezte (*E*) és meghosszabbította úgy, hogy $EF = EB$ legyen. Az elmondottak szerint *CF* az $x^2 + ax = a^2$ egyenlet egyik megoldása. **Eukleidész** feltüntette még a *CFGH* négyzetet is, amelynek *GH* oldalegyenese kimetszi az $AD = a$ szakaszból a *J* pontot.

A *Sztoikheiá*nak ebből az ábrájából fejlődött ki a hasonló téglalapok azon sorozata, amelynek segítségével jó közelítéssel meg lehet rajzolni a logaritmikus spirálist. Egészítsük ki **Eukleidész** rajzát a *BKGH* téglalappal az *AKFD* téglalappá *(93. ábra).* Belátható, hogy

BKFC~AKFD, hiszen $a{:}x = x{:}(a—x),$

amiből következik, hogy $(a + x) : a = a : x.$

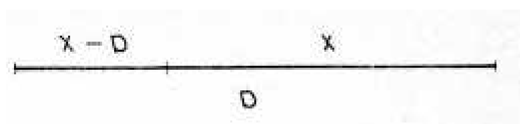
Ugyanígy a *BKFC~BKGH,* mert $a : x = x : (a—x).$

Ha most a *BKGH* téglalapból levágjuk az *LKGM* négyzetet, akkor a maradék *BLMH* téglalap hasonló lesz a *BKGH* téglalaphoz. Az eljárás vég nélkül folytatható, és nyerjük az

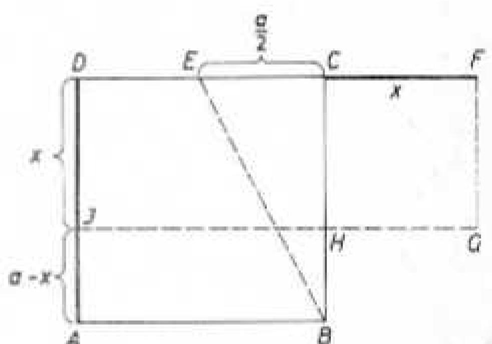
AKFD~KFCB~BKGH~LMHB~...

hasonlótéglalap-sorozatban rendre az *ABCD, HGFC, LKGM, BLNP, ...*

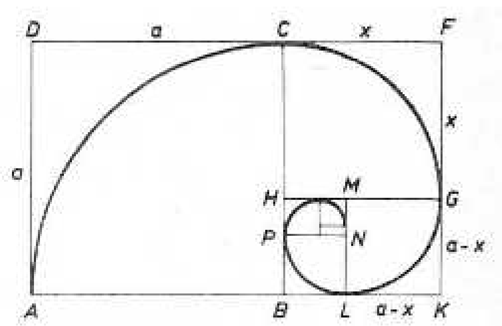
négyzeteket.



91. ábra



92. ábra



93. ábra

E négyzetek segítségével elég jól megrajzolhatjuk a logaritmikus spirálist, amelynek érintői az *A, C, G, L, P,* ... pontokban, sorrendben az *AD, DF, FK, KB, BH,* ... egyenesek. A rajzolás e módjából sejthető, hogy a logaritmikus spirális többféleképpen magán hordja az aranymetszés törvényét.

A *Sztoikheia* II. könyvében a területillesztési feladatok legegyszerűbb eseteit írta le a szerző. Művének VI. könyvében gondolt azonban az

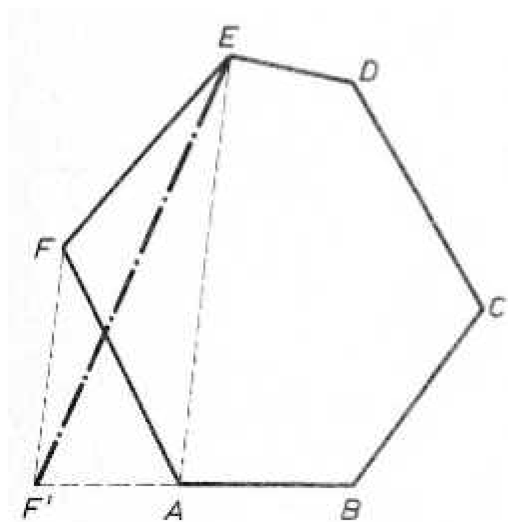
általánosításra is, miután az olvasó már megismerte az arány, illetőleg a hasonló síkidomok fogalmát. A VI. könyv 28. tétele a következő feladatot foglalja magában:

Adott *2a* szakaszhoz illesszünk egy adott egyenes vonalú síkidommal egyenlő területű paralelogrammát úgy, hogy a hiány hasonló legyen egy adott paralelogrammához.

A megoldást készítsük elő néhány, már ismertnek gondolt segédtétellel. Ezek:

1. A téglalap, mértaniközép-szerkesztéssel, a területét megtartó négyzetté alakítható.

2. Minden háromszög ugyanakkora területű téglalappá alakítható.



94. ábra

3. Minden *n* oldalú sokszög vele egyenlő területű (n—1) oldalú sokszöggé alakítható. Ezt gondoljuk át egy példán kissé részletesebben *(94. ábra).* Az *ABCDEF* hatszög vele egyenlő területű ötszöggé a következőképpen alakítható át: Vágjunk le az egyik átlóval a hatszögről egy háromszöget, például: az *AE* átlóval az *AEF* háromszöget. E háromszögnek az átlóval szembeni *F* csúcsát toljuk el az *AE* átlóval párhuzamosan addig, míg rá nem kerül az *AB*

(vagy az *ED)* oldal egyenesére. Az így nyert *AEF'* háromszög területe egyenlő az eredeti *AEF* háromszög területével, ha tehát ezt adjuk az *AEF* háromszög helyett az *ABCDE* ötszöghöz, akkor a kezdeti hatszöggel egyenlő területű *F'BCDE* ötszöghöz jutunk.

4. A harmadik segédtétel szerint minden sokszöget több lépésben háromszöggé, azt pedig a 2. tétel értelmében téglalappá, végül a téglalapot az 1. tétel miatt négyzetté alakíthatjuk, a terület megváltozása nélkül.

A VI/28. tételben megadott egyenes vonalú síkidom *t* területe tehát mindig előállítható egy *b* oldalú négyzet területeként, ahol $b^2 = t$.

A következő segédtételt a görög matematikusok rutinszerűen alkalmazták.

5. Algebrai alakban:

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Ha bevezetjük az $(x+y)/2 = a$ és az $(x-y)/2 = b$ jelölést, akkor a tétel az

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

alakban már a *95. ábra* egyszerű rajzáról leolvasható. Ugyanis, mivel az *EBHF* téglalap egybevágó a *CHJK* téglalappal, azért

$a^2-b^2 = t_{EBCDGF} = t_{GJKD} = (a+b)(a—b)$.

Ezután fogjunk hozzá a VI/28. „feladat” megoldásához. Képzeljük el az adatokat és a megoldást a *96. ábrán.* Az adott szakasz: *AB = 2a,* az adott paralelogramma: *E'B'C'F',* és az adott terület b^2.

Az első lépésben az adott b^2 területű sokszöget négyzetté alakítjuk a 4. segédtétel szerint. Így rendelkezésünkre áll a b hosszúságú szakasz. A feladat egyik követelménye szerint $xm = b^2$. A másik kikötés az, hogy az EBCF és az E'B'C'F' paralelogramma hasonló legyen. Ezért $\alpha = \alpha'$ és $m/y = b/u = k$, illetve $m = ky$, ahol k az u-

ból és v-ből megszerkeszthető, például a párhuzamos szelők tétele alapján. A követelmények tehát az $\alpha = \alpha'$ mellett:

$x + y = 2a$

$mx = b^2$

és

$m = ky.$

A két utóbbi egyenletből:

$xy = b^2/k = c^2,$

ahol c^2 annak a téglalapnak négyzetté alakított formája, amelyet a b^2 k-ad részéből nyerhetünk.

Az 5. segédtétel szerint

$$xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

tehát

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = c^2$$

vagy

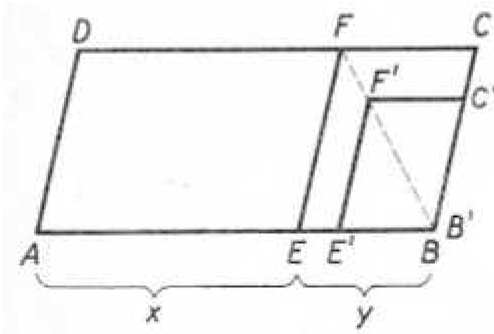
$$a^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = c^2.$$

Ez az összefüggés pedig olyan derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz-tétel, amelynél a két befogó (x-y)/2 és *c,* az átfogó pedig *a.* Ez a háromszög a *97. ábrán* láthatóan megszerkeszthető, ha $a > c$.

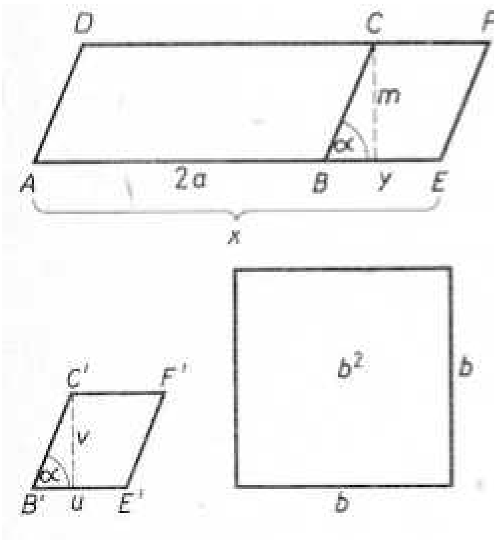
95. ábra

96. ábra

97. ábra



98. ábra



99. ábra

E háromszög másik befogója (x-y)/2, és ha ezt levonjuk az *a=(x +y)/2* átfogóból, akkor éppen *y-t* nyerjük.

Az *y* és az *E'B'C'F'* paralelogramma segítségével a szerkesztés végső lépése már megtehető úgy, hogy a 2*a* szakaszra a *B* végéhez rámásoljuk az *E'B'C'F'* paralelogrammát és az *y* szakaszt *(98. ábra)*. Ezután az ábrát a kívánt mértékben megnagyítjuk (vagy kicsinyítjük), tehát: az *E* pontból párhuzamost rajzolunk az *E'F'* szakasszal, és ezt elmetsszük a *B'F'* átló egyenesével. Az *F* metszéspont segítségével az ábra már kiegészíthető a szükséges

ABCD paralelogrammává, és könnyen belátható, hogy az *AEFD* paralelogramma területe valóban b^2 és az *EBCF* paralelogramma hasonló az *E'B'C'F'* paralelogrammához.

Ehhez a hiánnyal való, azaz elliptikus illesztéshez teljesen hasonló a VI/29. tétel kívánta hiperbolikus illesztés, ahol tehát az a feladat, hogy az adott 2*a* szakaszhoz illesszünk egy egyenes vonalú síkidommal egyenlő területű paralelogrammát úgy, hogy a többlet hasonló legyen egy adott paralelogrammához.

Az előbbi jelölésekkel a megoldás vázlatát a *99. ábra* szemlélteti. A gondolatmenet röviden:

A követelmények : $x—y = 2a,$

$\alpha = \alpha'$

és $x—y = 2a.$

Hivatkozva ismét az 5. segédtételre:

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=xy=c^2,$$

tehát

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-a^2=c^2.$$

Így az *a* és *c* befogójú derékszögű háromszög átfogója éppen (x +y)/2. Az (x+y)/2 átfogónak és az (x-y)/2 befogónak a különbsége pedig éppen *y*. Ennek és az adott *B'E'F'C'* paralelogrammának a segítségével a befejező szerkesztési mozzanat a VI/28. feladathoz hasonlóan végrehajtható.

Amint említettük, a *Sztoikheia* első két könyve nagyjából a püthagoreusok matematikáját foglalja össze és rendszerezi. A III. és IV. könyv minden valószínűség szerint a khioszi **Hippokratész** műveiből épült fel, de **Eukleidész** mesteri

rendszerezésében. Tartalom szerint ezt a részt a kör és a körrel kapcsolatos fogalmak (érintő, húrok, középponti és kerületi szög, a beírt és körülírt szabályos sokszögek) tulajdonságai, összefüggései és a kapcsolatos szerkesztések töltik ki.

Az V. könyv majdnem teljesen EUDOXOSZnak tulajdonítható. Ez, a korát felfogásában is messze megelőző kitűnő könyv az arányelméletet tárgyalja oly módon, ahogyan EUDOXOSZnál láttuk.

A VI. könyv az arányelmélet geometriai alkalmazásaival foglalkozik. Itt olvashatunk téglalapok és paralelogrammák területarányairól, a párhuzamos szelők tételéről, a síkidomok hasonlóságáról, területillesztéssel megoldható feladatokról, geometriai formában megadott másodfokú egyenletek (geometriai) megoldásáról stb.

A VII-VIII-IX. könyvek tartalmilag aritmetikai jellegű egységet alkotnak, amely lényegében számelmélet. A VII. könyvet 23 definíció vezeti be, amelyek a páros és páratlan, a prím- és összetett, a sík- és testszámokra, valamint a tökéletes számokra vonatkoznak.

A számelméleti tételek geometriai köntösben jelennek meg. A számokat szakaszok reprezentálják. Így a legnagyobb közös osztó kiszámítását is a kér szakasz legnagyobb közös mértékét meghatározó euklideszi algoritmus helyettesíti (lásd: a **Püthagorasz, püthagoreusok** címszónál a *31. ábrát).* A könyv utolsó, 39. tétele a legkisebb közös többszörös megszerkesztésének a módját mutatja be. Egyébként a *Sztoikheia* VII. könyve minden valószínűség szerint a püthagoreusok igen jól felépített és azért változatlanul hagyott kézikönyve leheteti.

A VIII. könyv a *Sztoikheia* egyik gyengébben sikerült része. Kapkodó, olykor zavaros gondolatmeneteivel és stílusával a forrásmunka szerzőjéről, ARKHÜTASZról árulkodik. A kötet tételei azt igyekeznek tisztázni, hogy két szám, a és b közé az $a : b$ aránytól függően miként lehet egy vagy több számot (középarányost) iktatni folytonos arányban. (Ha egy ilyen szám például c, akkor $a : c = c : b$. Két szám közbeiktatása esetén: $a : c = c : d = d : b$. Stb.) A kötet 22. tétele azt állítja, hogy „Ha három szám folytonos arányban áll, és az első négyzetszám, akkor a harmadik is az”. Tehát ha $a^2 : b = b : c$, akkor c is két egyenlő szorzótényezőre bomlik. **Eukleidész,** illetve **Arkhütasz** hivatkozik a VIII/20. tételre, amely szerint ha két szám közé pontosan egy középarányos helyezhető el folytonos arányban, akkor a két

közrefogó szám hasonló síkszám kell hogy legyen. Mint emlékszünk rá a püthagoreusi számelméletből, a síkszám olyan szám, amely két tényezőre bontható. Két síkszám akkor hasonló, ha megfelelő tényezőik aránya egyenlő. Algebrai jelöléssel: az $u*v$ síkszám hasonló $p*q$-hoz, ha teljesül, hogy

$u : p = v : q.$

A 20. tétel szerint tehát a^2 és c hasonló síkszámok. Ha pedig - mondja **Eukleidész** - a^2 négyzetszám, akkor a 20. tételből következik, hogy c is az. Ezt a következtetést **Van der Waerden** az *Egy tudomány ébredése* című könyvében (magyar kiadás 252. oldal) tévesnek ítéli. Amint írja: „Ez a következtetés jogosulatlan, mert a azonkívül, hogy egyenlő tényezőkre bontható, felbontható lehet különbözőkre is, s ha ennek a felbontásnak felel meg c egy arányos felbontása, akkor a számok hasonlóságának definíciója teljesül anélkül, hogy ebből le tudnánk vezetni, hogy c egyenlő tényezőkre bomlik." Ezen a ponton azonban meg kell védenünk **EUKLEIDÉSZt.** Ha ugyanis teljesül, hogy

$a^2 : b = b : c,$

ahol a^2 négyzetszám, valamint a^2-nek nemcsak az $a*a$ szorzatra bontása létezik, hanem valami $a^2=(n * u)*(n*v)$ is, ahol $u \neq v$, akkor ebből valóban következik, hogy a $c=(m*u)*(m*v)$ és az a^2 hasonló síkszámok az

$(n * u) : (m * u) = (n * v) : (m * v) = n : m$

aránypár szerint. Mivel azonban a^2 négyzetszám, azért kell, hogy az $(n * u)*(n * v)$ szorzat alakjában $(u*v)$ szintén négyzetszám legyen. Ekkor pedig a $c=(m * u) * (m * v) = m^2 * (uv)$ is négyzetszám. Természetesen teljesül az a követelmény is, hogy a^2-nek és c-nek legyen szám mértani közepe. Mostani jelöléseinkkel ez a mértani közép, illetve annak négyzete: $b^2 = a^2 * c = (nmuv)^2$.

A számelméleti tárgykört fejezi be Eukleidész a IX. könyvben. Itt is rábukkanhatunk néhány említésre méltó tételre. A 20. tétel tartalmazza annak a bizonyítását, hogy végtelen sok prímszám van. Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét, hogy tudniillik csak n prímszám volna, és n egy meghatározott szám. Ekkor

képezhető egy N szám úgy, hogy n prímszám szorzatához (P) hozzáadunk 1-et. Így kapjuk az $N = P + 1$ számot. Ez a szám azonban nem osztható a feltételezett n darab prímszám egyikével sem, tehát maga is törzsszám. Ez pedig ellentmond annak a feltevésnek, hogy csak n prímszám van. A prímszámok száma tehát véges nem lehet.

A IX/21-34. tételsorozat minden valószínűség szerint a görög matematikatörténet legrégibb összefüggő tételsorozata. Ezekből néhányat már megemlítettünk a 85. oldalon, de úgy vélem, hogy nem érdektelen teljes felsorolásuk úgy, ahogy azt az 1983-as magyar Eukleidész-fordításban olvashatjuk:

21. Bárhány páros számot adunk össze, az összeg páros.

22. Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páros sokan vannak, akkor az összeg páros.

23. Ha összeadunk valahány páratlan számot, melyek páratlan sokan vannak, akkor az összeg is páratlan lesz.

24. Ha egy páros számból párosat vonunk ki, a maradék páros.

25. Ha egy páros számból páratlant vonunk ki, a maradék páratlan.

26. Ha egy páratlan számból páratlant vonunk ki, a maradék páros.

27. Ha egy páratlan számból párosat vonunk ki, a maradék páratlan.

28. Ha egy páratlan számmal megszorzunk egy párosat, a szorzat páros lesz.

29. Ha egy páratlan számmal megszorzunk egy páratlant, a szorzat páratlan lesz.

30. Ha egy páratlan szám oszt egy párosat, akkor a felét is osztja.

31. Ha egy páratlan szám relatív prím valamely számhoz, akkor a kétszereséhez is relatív prím.

32. A diádból kétszerezéssel nyert összes szám csak párosszor páros alakban áll elő. (A „diád” szó jelzi a 2-nek a számelméletben kitüntetett szerepét.)

33. Ha egy szám fele páratlan, akkor a szám csak párosszor páratlan alakban áll elő.

34. Ha egy szám sem nem a diádból kétszerezéssel nyertek közül való, sem a fele nem páratlan, akkor mind párosszor páros, mind párosszor páratlan alakban előáll.

A 35. tétel lényegében a mértani haladvány első *n* elemének összegezési eljárását mutatja be, szokásos jelöléseinkkel az

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

megfogalmazásban. Kis átalakítás után:

$$\frac{a_1q^n-a_1}{S_n}=\frac{a_1q-a_1}{a_1},$$

ahonnan nyerjük az

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

mai formában használatos összegképletét.

A IX. könyv 36., egyben utolsó tétele azt bizonyítja be - amint ezt már a püthagoreusoknál is láttuk hogy ha az

$1+2+2^2+\ldots+2^n=p$

prímszám, akkor 2^np tökéletes szám (86. oldal).

A *Sztoikheia* IX. könyve is annyira egységes, hogy nem nehéz észrevennünk benne a püthagoreusi tanoknak szinte átdolgozás nélküli részét. Általában a VII-VIII-IX. könyv - amint már említettük

- a püthagoreusi hagyományok feldolgozása, és egyben előkészítése a következő, térgeometriai részhez szükséges számolási ismereteknek.

A mű legterjedelmesebb egysége a 115 tételre terjedő X. könyv, amely mintegy aritmetikai előkészítője a következő geometriai részeknek, főként a XIII. könyvnek. A X. és XIII. könyvben tárgyalt, illetve felhasznált tételek, valamint az ott alkalmazott elnevezések között akkora összhang van, hogy ismét közös szerzőre gyanakodhatunk. **Platón** barátjáról, THEAITETOSZról van szó, akire **Platón** *Timaiosz* című dialógusán kívül egy X. századi gyűjteményes munka, a *Szuda (Szuidász)* irányította a figyelmet. A X. és XIII. könyv egységes és a többitől eltérő stílusa és módszere mindenesetre meggyőzhet arról, hogy szerzőjük közös. A X. könyv első része mintegy mértékegységül bevezet egy meghatározott szakaszt. A többi szakaszt mérhetőnek nevezi, ha az egységszakasszal van közös mértéke, különben nem mérhető.

Bevezeti a szakaszok szerinti összemérhetőség fogalmát, amennyiben a két szakasznak van közös mértéke. Definiálja azonban a szakaszok négyzetük szerinti összemérhetőségét is. Ez az előbbinél tágabb fogalom. Ha például az egyik szakasz $\sqrt{2}$, a másik $\sqrt{3}$ hosszú, akkor ezek összemérhetetlenek, de a velük mint oldalakkal szerkesztett négyzetek területei, a 2 és a 3 már összemérhetők, azaz a $\sqrt{2}$ és négyzetük szerint összemérhetők. E fogalmakra alapozva végzi el EUKLEIDÉSZ a bikvadratikus irracionális kifejezések, tehát az a $\pm\sqrt{b}$, a $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, a $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, és a $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ bikvadratikus irracionalitások bonyolult osztályozását, ahol a és b összemérhető. THEAITETOSZra utal (Van der Waerden: Egy tudomány ébredése, 285. oldal) a X/l. tétel is, amelyet mesterien alkalmazott Arkhimédész a kimerítés módszerénél. Eszerint: Ha az A és B egynemű mennyiségek közül $A>B$, akkor ha A-ból elvesszük a felénél nagyobbat, és a maradékból ismét annak a felénél nagyobbat, és ezt így folytatjuk, akkor eljutunk egy olyan R maradékhoz, amely már kisebb B-nél ($R<B$). Ma talán hozzátennénk a nyomaték kedvéért, hogy bármilyen kicsiny is legyen B. Megemlítjük még azt a püthagoreusoknál megismert eljárást, amely alkalmas tetszőleges számú pitagoraszi számhármas

előállítására.

A X. könyv eredményeinek alkalmazásait látjuk a XIII. könyvben, amelyben megtaláljuk az egyazon gömbbe írt öt szabályos test éleinek az összehasonlítását, valamint az öt szabályos test megszerkesztését a körülírt gömb sugarából.

A XIII. könyvet azonban megelőzi a szintén térgeometriai tárgyú XI. és XII. A XI. könyv térgeometriai bevezetés. A könyv módszeréhez híven Eukleidész előrebocsátja a szükséges definíciókat. Ezeket követik azok a tételek, amelyek tárgya az egyenesek és síkok térbeli helyzetére, a testszögletekre, paralelepipedonokra és a hasábok térfogatára vonatkoznak. A XII. könyvben a gúla, henger, kúp és gömb térfogatszámítása, illetve e testek térfogatarányainak vizsgálata van. A módszer az EUDOXOSZnál már ismertetett kimerítési eljárás, amely a határérték-számítás ókori csíráit tartalmazza.

Amint láttuk, a *Sztoikheia* valóban nem mondható eredeti alkotásnak, legfeljebb egyes részleteiben. A sokféle forrásmunkából összeszedett részletek egységét a maga korában mesterinek minősülő elrendezés és az axiomatikusan megalapozott, egymásra épülő tételek tárgyalásmódja biztosítja. Ez a mű elévülhetetlen érdeme, az ti., hogy követésre méltóvá tette mind a mai napig a matematika, sőt más tudományok számára is az axiomatikus feldolgozást.

Később a *Sztoikheia* könyveihez csatlakozott még két kisebb, de már nem **Eukleidész** által, viszont teljesen az ő szellemében megírt munka, XIV. és XV. könyvként.

A XIV. könyv szerzője, Hüpsziklész (i. e. 180 körül) kimutatja, hogy az ugyanazon gömbbe írható dodekaéder és ikozaéder térfogatának aránya megegyezik ugyanezen testek felszínének arányával, továbbá hogy e gömbbe írt kocka és ikozaéder éleinek

aránya is ugyanakkora, nevezetesen

$\sqrt{10/[3(5-\sqrt{5})]}$,

illetve egyszerűbb alakban:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}.$$

Ezt az arányt meg is szerkesztette. Megjegyezzük, hogy **Eukleidész** kortársa, **Arisztaiosz** igazolta, hogy ugyanazon gömbbe rajzolt dodekaéder és ikozaéder esetében a dodekaéder ötszöglapjai köré rajzolható kör ugyanakkora, mint az ikozaéder háromszöglapjai köré írt kör.

A XV. könyv a VI. században keletkezett. Szerzője ismeretlen, magát „a hírneves **Iszidórosz”** tanítványának nevezte. Ez a milétoszi **Iszidórosz** (i. sz. 530 körül) Konstantinápolyban a csodálatra méltó Hagia Szófia egyik építője volt, egyike az utolsó kimagasló görög matematikusoknak. E könyv szintén a szabályos testekkel foglalkozik. Fő témája, hogyan lehet valamely szabályos testet egy másikba írni.

A *Sztoikheia* arab fordításban maradt ránk. A XII. században fordították le latinra, és a XVI. században jelent meg több nemzeti nyelven. Az első nyomtatott példány Velencében látott napvilágot 1482-ben. Magyarul először csak a *Sztoikheia* néhány tétele jelent meg 1655-ben **Apáczai Csere János** (1625-1659) *Magyar Encyclopaediájában*. A teljes könyvet először **Brassai Sámuel** (1800-1897) fordította le magyarra 1865-ben. Ennél a nehézkes stílusú könyvnél jobban olvasható **Baumgartner Alajos** (1865-1930) fordítása 1905-ből. Kár, hogy ő csak az első hat könyvet, tehát a síkgeometriai részt fordította le. Végre **Eukleidész** e világhírű műve 1983-ban modern magyar nyelven is megjelent **Maver Gyula** kitűnő fordításában.

EUKLEIDÉSZnek nem egyetlen könyve az Elemek. Számos más művet is írt, de ezek jelentőségükben elmaradtak a Sztoikheia mögött. Csak cím szerint ismerjük a következő munkáit: Pszeudaria (hamisságok; pszeudosz = csalás), Kónika (kúpszeletek), Topoj prosz epifaneia (felületeken található geometriai helyek), Poriszmata (tételek).

Görögül és arab fordításban is megmaradt az algebra történetében fontos szerepet játszó *Data* (adottak, meghatározottak) című könyve, amelyben geometriai formában algebrai jellegű tételek

találhatók, például: Ha adott *a,* valamint az *a : b* arány, akkor ez meghatározza *b-t***.** Egy másik példa: *(a + b)-vel* és *(a* : b)-vel meghatározott *a* és *b.* Valószínű, hogy a *Data* az alexandriai iskola tankönyve volt.

Csupán arab fordításban maradt meg az *Alakzatok felbontásáról* című eukleidészi mű. Ebben olyan feladatok szerepelnek, amelyek szögletes síkidomok adott arányú részekre bontását kívánják egy adott ponton átmenő egyenes segítségével.

Eukleidész ismeretes, de nem matematikai tárgyú művei: az *Optika,* a *Katoptrika,* a *Katatomé Kanónosz* és a *Phainomena.* Ezek közül az első kettő fénytani mű, a harmadik zeneelmélet, a negyedik pedig csillagászati tárgyú.

EGY KIS NEM FELESLEGES FILOZÓFIAI KITÉRŐ

Ahhoz, hogy igazán megérthessük a görög aritmetikát és a matematikai bizonyítási módszereket, ismernünk kell egy kissé a korabeli görög filozófiát. Ennek a szükségesre szorítkozó, vázlatos áttekintésében alapul vettem **Szabó Árpád** és **Falus Róbert** idevágó kutatási eredményeit.

A mai értelemben vett tudományos gondolkozásnak nem kellett még kifejlődnie ahhoz, hogy az ember a mindennapi életben felismerje és alkalmazza a tapasztalatokon alapuló általánosítás és az ok-okozati kapcsolatok törvényeit. Ahol pedig ezek a gyakorlatból származó logikai műveletek felmondták a szolgálatot, azaz ahol valaminek nem tudták magyarázatát adni, ott segítségül lehetett hívni az isteni beavatkozást, ezt a mindig kéznél levő és általánosan méltányolt hipotézist, amint ezt az *Iliász* sok példája közül is mutatja a következő, amelyet a szinte találomra kinyitott műből olvastam ki:

„Új vesszőt röpített Teukrosz ki az íj idegéről

Hektor ellen, akit vágyott lenyilazni a lelke;

s ismét elvétette; kitérítette Apollón

Lehetetlen, hogy egy ilyen jó harcos, mint **Teukrosz,** annyiszor

elvétette volna a célt, ha egy isten közbe nem lép. - Hogyan keletkezett a világ? „Isten teremtette”, hangzik a válasz a „nem tudom” helyett. A filozófia mindig kérdez olyat, amelyre a tudomány még nem tudhat felelni. Ez nem is nagy baj, hogy ti. kérdez, a baj az, hogy felel is rá. Ilyen vonatkozásban ma sem lehetünk nagyon büszkék. Az előbbi kérdésre a „modern tudományos” válasz az, hogy kezdetben volt a „nagy bumm”, az ősrobbanás. Valljuk be, hogy a régi és az új felelet között természettudományos szempontból nincs is nagy különbség, sőt a korábbiban nyíltan elismerjük, míg az utóbbiban a tudományosság látszatába burkoljuk tudatlanságunkat.

A tapasztalatok általánosítása már az állati lét fokán is életfeltétel. (Valahányszor oroszlánnal találkoztam, mindig megtámadott: Minden oroszlán veszedelmes állat.) A legegyszerűbb munkavégzésnél is alkalmazzuk az ok-okozati összefüggést. (Ha két fát így és így összedörzsölök, akkor tűz keletkezik.) Ugyancsak az emberi értelem kifejlődésének a kezdetére nyúlik vissza az ellentétek észrevétele: kicsi-nagy, kevés-sok, világos-sötét, jó-rossz, élőhalott stb. Jogosan számítható az ősi logikai műveletek közé az a megállapítás, hogy aki már nem él, az meghalt. Az ellentétpár egyik tagjának a tagadásával igen sokszor együtt jár a másik tag igenlése.

A megismeréshez vezető elemi logikai műveletek csírái tehát többé vagy kevésbé tudatosan fellelhetők a legősibb emberi gondolkozásban is. Ilyenek: az egyes esetekből való általánosítás, azaz az indukció, a hipotézisalkotás, a közvetett bizonyítás és az ok-okozati következtetés.

Igen valószínű, hogy már a **Thalész** előtti görög matematikában és bizonyára **Thalész** bizonyításaiban is ezek a félig tudatos, főleg a tapasztalatokon alapuló logikai műveletek keveredtek a még egészen szemléletes bizonyítással: a megmutatással. **Thalész** éppen azért határkő a matematika történetében, mert úgy sejtjük, hogy az elsők között használt tudatosan olyan logikai igazolást, mint például a közvetett bizonyítás (ha α és β csúcsszögek és mégsem egyenlők, akkor $\alpha+\gamma$ és $\beta+\gamma$ sem egyenlők, azaz az egyenesszögek sem egyenlők. Ez pedig lehetetlen, tehát az α és a β csúcsszögek egyenlők), vagy talán már a deduktív módszert is (az egyenesszögek

egyenlők, azaz $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, ismét egyenlőket kapunk, tehát $\alpha=\beta$).

Thalész egyik tanítványa, **Anaxagorasz** volt a mestere a kis-ázsiai Kolophónban született XENOPHANÉSZnek. Ez a **Xenophanész** (i. e. 576?-478?) 25 éves korában menekült el sok honfitársával együtt a perzsa hódítások elől. Mint dalnok és vándorénekes hányatott bolyongás után kötött ki a görög menekültek által alapított Eleában (Hüelé latinul: Velia), Itália déli részén. Ő volt az eleai filozófiai iskola első képviselője. Felismerte, hogy a tapasztalati általánosítások tévútra vezethetnek. Abból indult ki, hogy az isteneket az ember a saját képére képzeli el. Az etiópok istene - mondja - fekete és pisze, a thrákoké pedig kék szemű és vörös hajú, ugyanakkor a görög istenek telve emberi gyarlóságokkal. Melyik hát az igazi istenkép? Bizonyára egyik sem. Az emberi tulajdonságoknak az Istenre való átruházása, általánosítása jogtalan : tévhitet szül. Művének egy másik töredékében azt írja, hogy „Ha a sárgálló mézet nem teremtette volna az Isten, akkor az emberek sokkal édesebbnek mondanák a fügét.” Mintha azt mondaná : a füge önmagában édes ugyan, de a mézhez képest nem édes. Az érzetet megsemmisíti vagy legalábbis megváltoztatja a következő. Az érzékszervek csak az összehasonlítást teszik lehetővé: a méz édesebb, mint a füge. Ez a megállapítás azonban viszonylagos, nem abszolút jellegű, tehát magáról az „édesről” semmit sem mond. Az érzékelés csak látszólagos ismeretekhez vezet és nem a valósághoz. Ez ugyan hasznos lehet az anyagi világ egyre jobb megismerésében, de a gondolkozásban nem. **Xenophanész** tehát - amint **Falus Róbert** megfogalmazta - felfedezte, hogy „Más módszert követel a természet megismerése, és megint mást az abszolútumot kereső gondolkozás.” Így **Hérakleitosz** (i. e. 544-483) mellett **Xenophanész** volt az első, aki különválasztotta az érzékszervek útján nyert ismereteket a pusztán gondolkozással elérhető tudástól. A helyes istenfogalom megalkotásában **Xenophanész** arra törekedett, hogy abban ne legyen semmi antropomorfizmus, semmi tapasztalati elem. Így aztán erről az absztrakt, csak elgondolható Istenről nem is mondhatott mást, mint azt, hogy van és egy. Az „egy” itt azt is jelenti, hogy egységes, azaz oszthatatlan. **Xenophanész** az istenfogalmat lényegében azonosította a csak elgondolható, oszthatatlan egységgel.

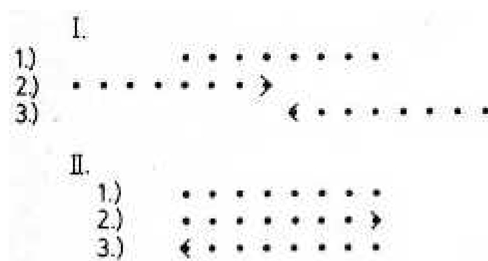
Xenophanész bizonyítás nélküli filozófiai állításait továbbcsiszolta és kifejtette tanítványa, **Parmenidész** (i. e. 520?-450), aki egy ideig valószínűleg püthagoreus is volt. Az, hogy Elea és a püthagoreusok székhelye, Krotón alig 50 km távol volt egymástól, nem zárja ki azt a feltevést, hogy a két iskola kezdetben kölcsönösen hatott egymásra, tehát nem csupán az eleai elvek és bizonyítási módszerek szivárogtak be a matematikába, hanem a püthagoreusi számfogalom és matematikai eljárások is termékenyen alakították a filozófiai nézeteket.

Mindenesetre **Parmenidész,** az eleai filozófiai iskola megalapítója *A természetről* című, kétrészes tankölteményében kifejtette, hogy az érzékszerveink nem a dolgok lényegéről tudósítanak bennünket. Az érzékszervek híradása csak látszat, megbízhatatlan, félrevezető, már csak azért is, mert a világ dolgai folytonos változásban vannak. Mire egy dolgot érzékelnénk, addigra már megváltozott. Így a dolgok jelenéről érzékszerveink nem képesek tudósítani. A tudás tehát csupán gondolkozással szerezhető meg. Továbbmenően, még a gondolkozással is vigyáznunk kell, hiszen rengeteg ellentmondásos fogalom van, ezek nem vezethetnek el a helyes tudáshoz. Ilyen a keletkezés fogalma is. Arra a kérdésre, hogy a létező miből keletkezett, kétféle választ adhatunk. Az egyik az, hogy a létező a létezőből lett. Ez a felelet nem kielégítő, hiszen nem tesz különbséget a keletkezése előtti és utáni létező között. A másik elképzelhető válasz így hangzik: A létező a nem létezőből lett. Ez megint furcsa állítás, hiszen ami nem létezik, arról lehet-e valamit is állítani? A keletkezés tehát ellentmondásos fogalom: Nincs értelme annak a kérdésnek, hogy „Miből keletkezett?". Ugyanígy ellentmondásos az elmúlás és minden változást, mozgást jelentő fogalom, tehát használatuk a gondolkozásban tilos. Nem nagy lépés kellett ahhoz, hogy az eleai filozófusok belássák a mozgással kapcsolatos tér- és időfogalmak ellentmondásos voltát is.

Parmenidész egyik tanítványa, az eleai Zénón (i. e. 490?-430?) (nem a mintegy 100 évvel későbbi sztoikus kitioni Zénón) éppen arról lett híres, hogy négy olyan paradoxont fogalmazott meg, amelyeket a mozgás ellentmondásosságára alapozott. Az első, „Akhilleusz és a teknősbéka" néven ismeretes. Tegyük fel, hogy Akhilleusz tízszer gyorsabb a teknősbékánál. A teknőc mégis futóversenyre hívta ki a görög hőst azzal a feltétellel, hogy

például 100 m-en 10 m előnyt kap. Miután Akhilleusz a feltételt elfogadta, a teknősbéka így okoskodott: Nem is kell lefutnunk a versenyt, hiszen világos, hogy nem érhetsz utol. Amíg ugyanis behoznád a 10 m-es előnyömet, addig én 1 m-t előremásznék; mire behozod az 1 m előnyt, addig én 1 dm előnyre teszek szert, és így tovább. E végtelenségig folytatható gondolatmenet szerint mindig lesz egy kis előnyöm. A versenyt tehát nem nyerheted meg.

A másik paradoxon azt állítja, hogy a kilőtt nyíl nem mozog. Nem tudjuk ugyanis megmondani, hogy hol mozog a nyíl. Vagy ott mozog, ahol pillanatnyilag van, de az éppen most elfoglalt térrész nem teszi lehetővé a mozgást. Akkor tehát ott mozog, ahol nincs. Ez megint lehetetlen, mert ahol nincs, ott nem csinálhat semmit.



100. ábra

A harmadik paradoxon szerint a kilőtt nyíl Sohasem érkezhet el a célba, mert előbb meg kell tennie az út első felét, aztán a hátralevő út felét, aztán a további út felét, és így tovább. Így tehát a célba érésig végtelen sok útszakaszt kellene befutnia, ehhez pedig végtelen hosszú időre lenne szüksége.

A negyedik paradoxon nem kevésbé meglepő dolgot állít, mint azt, hogy az idő fele egyenlő ugyanannak az időtartamnak a duplájával. Az okoskodás a következő: Három egyenlő hosszú útszakaszt képviseljen a *100. ábra* szerinti I. helyzetben 8-8 pont. Az első szakasz nyugalomban marad. A második és a harmadik szakasz egyszerre indul és ugyanakkor áll meg az ábra szerinti II. helyzetben. A harmadik szakasz, ha mozgását az elsőhöz viszonyítom, akkor 4 pontnyi utat tett meg, ha viszont a másodikhoz viszonyítom, akkor 8 pontnyit. Zénón a megtett út minden pontjához hozzárendelt egy időpontot, egy pillanatot. Így a 3. szakasz, az elsőre vonatkoztatva 4 pillanat alatt tette meg az utat,

a másodikhoz képest pedig 8 pillanat alatt. A 4 pillanat fele akkora időtartam, mint a 8 pillanat. A harmadik szakasz mozgásához azonban csak egyetlen indulási és egyetlen érkezési pillanat tartozik. E kettő közötti idő nem lehet kétféle, tehát az előbbi két időtartamnak egyeznie kell, azaz „a fele idő egyenlő a kétszeres idővel”. Ezt az eszmefuttatást Zénón úgy végezte el, hogy mind a három szakaszt végtelen sok, de ugyanannyi pontból állónak képzelte.

Akkoriban ezeknek az okoskodásoknak a megcáfolása a végtelen fogalmának tisztázatlansága miatt lehetetlennek látszott. Így igaznak tűnt az az állítás is, hogy a mozgás, valamint a vele összefüggő tér- és időfogalmak ellentmondásosságuk miatt nem elgondolhatók, és ezért a gondolkozásban nem használhatók. **Zénón** paradoxonjai voltaképpen közvetett bizonyítások: Ha felteszem, hogy a mozgás nem csupán látszólagos jelenség, akkor ebből, lám, az következik, hogy **Akhilleusz** nem éri utol a teknősbékát, hogy a kilőtt nyíl sohasem érkezik a célba, hogy a fele idő akkora, mint a kétszeres. A feltevésből tehát lehetetlen állítások következnek, és így a feltevés téves: a mozgás tehát elgondolhatatlan.

Végül is az eleai filozófia bizonyítás nélkül csak azt az állítást fogadta el, hogy „a létező van”, illetve a „nem létező elgondolhatatlan, tehát nincs”. Erre alapozva fejlesztettek ki egy vitatkozási módszert, amelyre szép példák **Platón** (i. e. 427-347?) dialógusai. **Platón** tanácsa a következő: Aki cáfolni akarja ellenfele véleményét, az először keressen egy olyan állítást, amelyet mindkét vitatkozó fél elfogad. Azután úgy kell vezetni a beszélgetést, hogy a megcáfolandó állításból helyes következtetéssel olyan tétel származzék, amely ellentmondásban áll a közösen elfogadott vitaalappal. Ebből kitűnik, hogy ellenfelünknek nincs igaza. A tanácsolt eljárás tehát az indirekt bizonyítás, a cáfolással való igazolás, ti. a bizonyítandó tétel ellenkezőjét kell megcáfolni.

Az eleai filozófia az absztrakt „létező” fogalmát az „egy” fogalmával azonosította, és részekre nem bonthatónak, oszthatatlannak vélte. Érvelése szerint a létező teljes egészében létező, nincsenek jobban és kevésbé létező részei. Az „egy” (a létező) fogalma kizárja az oszthatóságot, mert a részekre osztott „egy” részei szerint már „sok”

lenne. Így az egy és a sok a létezőben ellentmondás volna, ami nem engedhető meg. Az eleai filozófia a „sok létező” fogalmát is tagadta. Már két létező is egy harmadikat tételez fel, amely a kettőt elválasztja, de akkor a harmadik és az első, valamint a harmadik és a második létezőt is újabb létezőknek kellene elválasztaniuk, így folytatva, az eredetileg feltételezett két létező közé végtelen sok létezőt kellene elképzelnünk, amelyek a kettő között nem férnének el. Az eleai elképzelés szerint tehát az egyetlen elgondolt létező kitölti és magába foglalja a mindenséget, azzal és az Istennel egy.

A FILOZÓFIA ÉS A MATEMATIKA

Az előző fejezet filozófiai áttekintése után gondoljunk vissza a görög matematika kialakult módszereire és fogalmaira, azokra, amelyek időben felölelik az i. e. VI—III. századot, tehát Thalésztól EUKLEIDÉSZig.

Bizonyára nem véletlen, hogy **Thalész** az ismert ókori matematikusok közül elsőként szakított a szemléletességgel, értve ezen azt, hogy nem elégedett meg az állítások szemlélet alapján való elfogadásával, hanem szükségét érezte a logikai igazolásnak. Még erősebben jelentkezett ez az új, tipikusan görög matematikai irányzat a püthagoreusoknál, és teljes kiforrottságában látjuk **Eukleidész-**nél. **Thalész, Püthagorasz** és az utánuk következő matematikusok egy-két századnyi kora éppen az eleai filozófia kialakulásának és hatásának az ideje.

A püthagoreus számelméletben az „egy” az istenség jelképe, oszthatatlan, részekre nem bontható. A püthagoreus „egy” azonos az eleai „létező” fogalmával. Az oszthatatlanság viszont kizárja a törtek létezését. A gyakorlati életben - például a kereskedők - természetesen használták a törteket. A püthagoreus „egy” azonban csak az „elgondolt”, az absztrakt „egy”, amely az eleai elvek szerint kizárja az oszthatóság tulajdonságát. Ha a püthagoraszi aritmetika következetesen igazodott volna az eleai filozófiához, akkor lehetetlenné vált volna maga az aritmetika. Az eleaiak ugyanis, mint láttuk, tagadták a sok fogalmát. A püthagoreusok viszont definiálták a „szám” fogalmát, mégpedig úgy, hogy a szám az egységek halmaza. Az egység, felfogásuk szerint, nem is szám, hanem csak a számok (az elgondolt számok)

forrása. A számok tehát már oszthatók. Az ilyen módon meghatározott számok egyszersmind megoldották a törtek tagadásának a problémáját is, mert a törtek helyett két szám arányáról már lehetett beszélni, és az arányokkal éppen úgy lehetett műveleteket végezni, mint a törtekkel, ti. a gyakorlati élet törtjeivel.

Az első igazi aritmetikai nehézség az irracionális viszony felfedezésével adódott. Ha a négyzet oldalához számot (természetes számot) rendelünk, akkor - amint láttuk - az átlót nem lehet számmal jellemezni, de még két szám arányával sem. Más megfogalmazásban: Nem tudjuk számmal jellemezni annak a négyzetnek az oldalát, amelynek a területe kétszer akkora, mint egy adott, számmal jellemezhető oldalú négyzet területe. A görögök ezt az elképzelhetetlen számot „arrhéton” számnak, „kimondhatatlan” számnak nevezték.

Ugyanez a probléma viszont szerkesztéssel, tehát geometriai formában semmi nehézséget nem okozott. Nehéz volt azonban a geometriai fogalmak olyan meghatározása, amely összhangban van az eleai filozófiával. A baj ott kezdődött, hogy az eleai tanok szerint a mozgás és a tér ellentmondásos fogalmak, tehát nem elgondolhatók, azaz a gondolkozásban nem használhatók, és így az igazi tudás számára nem létező fogalmak. Ha viszont nincs tér, akkor a tér tudománya, a geometria sincs. A szerkesztéssel is baj van, hiszen valamit megszerkeszteni csak mozgással tudunk, a mozgás pedig nem elgondolható. **Püthagorasz** idejében a geometriát a fenti okok miatt nem is tekintették igazi matematikának (mathéma = tanulmány), hanem csak „látásból, hallomásból” eredő, látszólagos ismeretnek, görögül „hisztorié”-nek. Láttuk azonban, hogy akadt egy probléma, amely a görög matematikát szinte rákényszerítette a geometria művelésére - éppen a már említett „irracionális szám” felfedezése. Pontosabban: a négyzet oldalából a négyzet átlóját nem lehetett aritmetikai úton meghatározni, de szerkesztéssel igen. Más szavakkal: egy számnak és a szám kétszeresének a mértani középarányosa „arrhéton”, kimondhatatlan szám, de mégis megszerkeszthető. Ezért is nevezték el geometriai középnek. Gondoljunk a püthagoraszi számelmélet háromszög-, négyzet-, téglalap-, sokszög-, hasábszámaira. Ebben a számelméletben már geometriai fogalmakat használtak, lényegében geometriai számelméletet műveltek, illetve azt alapozták meg.

Az eleai iskolától ösztönzött bizonyítási módszerek, különösen pedig az axiómákra alapozott deduktív módszer, a geometriában az alapfogalmak nem kielégítő definíciói miatt, nehezebben keresztülvihetőek voltak, mint az aritmetikában. Azért, hogy a geometria az eleai elvekkel lehetőleg összhangban legyen, megalkották a csupán gondolatban létező geometriai alakzatokat. A geometriai pont, egyenes, sík vagy kör önállóan a valóságban nem létezik. Amit rajzolunk, az csak jele, jelképe az elgondolt alakzatnak, úgy, ahogy a leírt szám is csak jelképe a minden konkrét tartalmat nélkülöző, absztrakt számnak. Ezért olyan kínosan gondosak **Eukleidész** geometriai definíciói: Pont az, aminek nincs része. A vonal szélesség nélküli hosszúság. Ilyen pont, ilyen vonal csak elgondolható, a valóságban nincs, rajzolni ilyet nem tudunk. Ezek az erőltetett definíciók - erőltetettek, mert egyszerűbb fogalmat bonyolultabbal magyaráznak - nem segítettek azon, hogy a szerkesztéseknél rajzolunk, keletkeztetünk, tehát ezektől a műveletektől elválaszthatatlan a mozgás, a létrehozás, amelyek pedig az eleai tanok szerint tilos fogalmak.

A geometria vázolt nehézségein megpróbált segíteni a filozófia és a matematika is. Az eleai filozófiát **Platón** módosította. Ő olyan nagyra becsülte a geometriát, hogy nélküle a filozófiát nem tudta elképzelni, legalábbis erre mutat Akadémiájának kapujában a „Ne lépjen ide be senki, aki nem ismeri a geometriát!” felirat. **Platón** úgy vélte, hogy az érzékekkel tapasztalható, változó, látszólagos dolgok mellett van egy másik, valóságos világ, a változást nem ismerő, amely az érzékelhető dolgok absztrakcióit, ideáit tartalmazza. Az utóbbi teszi csak lehetővé az igazi tudást, és ez csak gondolkozással közelíthető meg. **Platón** azonban, hogy a geometriát is „szalonképessé” tegye filozófiájában, a látszólagos világ és az ideák világa közé iktatta azt a birodalmat, amely maga változatlan, de amelyben a változások lefolynak, vagyis a teret. Ennek a változásokat magába foglaló, változatlan világnak, a térnek a tudománya a geometria.

A platóni rangsorolásban tehát a látszólagos történések fölött van a tér, és erre következik az ideák mozdulatlan, örök világa.
Az érzékek csalóka, bizonytalan ismereteket adnak, az ideák az abszolút igazságot. Ez utóbbi megszerzésében segít az átmeneti jellegű tér tudománya, amely megtanít a helyes gondolkozásra, az

abszolút törvények meglátására. **Platón** a matematika nem geometriai részét, tehát az absztrakt számok tudományát, az előbbi besorolási szempontnak megfelelően a geometria fölé helyezte, azaz az ideák tartományába. A filozófia tehát még akkor is, ha a geometriát csak amolyan másodrendű matematikai területnek nyilvánította, tett valamit tekintélyének elismertetéséért.

A matematikusok egészen más úton „mentették meg” a geometriát. Mivel szükségük volt rá - hiszen segítségével problémamentesen oldottak meg olyan feladatokat, amelyekkel a „tiszta” aritmetikában nem boldogultak -, azért amennyire lehetett, megkísérelték ugyan tiszteletben tartani az eleai tanokat, de egy bizonyos határon túl határozottan szakították azokkal. Már a püthagoreusok megkísérelték az aritmetikai egység mintájára megteremteni a geometriai egységet azzal a definícióval, amelyet EUKLEIDÉSZnél is olvashattunk: a pont az, aminek nincs része. A számfogalomnak megfelelő szakaszfogalommal azonban már baj volt. A szám az egységek összessége, de mondható-e, elgondolható-e, hogy a szakasz a kiterjedés nélküli pontok összessége. A szám osztható, de véges számú osztója van, és a legkisebb osztója az egység. A szakasz is osztható, de végtelen sok osztója van, azaz végtelen sok olyan szakasz létezik, amely maradék nélkül rámérhető, de ezek között nincs legkisebb, és legkevésbé lehet ez a kiterjedés nélküli pont. A pontnak és a szakasznak ezek a nem megfelelő definíciói tették lehetővé Zénón paradoxonjait is, aki a véges halmazokra helyes törvényeket alkalmazta minden további nélkül a végtelen halmazokra is.

Átvehették azonban a geométerek az eleai filozófia bizonyítási módszereit. A bizonyításhoz a geometriában sem volt szabad segítségül hívni a szemléletet. A tisztán gondolkozással való igazoláshoz azonban először is ellentmondásmentes fogalmakra volt szükség. Ezeket biztosították, vagy legalább igyekeztek biztosítani a definíciók. Definiálni (görögül: horidzeszthai) annyit jelent, mint elhatárolni. A definíció tehát az elmélkedés tárgyát elhatárolja minden mástól, ami nem a tárggyal azonos. Ugyanakkor valamely fogalmat csak más, egyszerűbb fogalmakkal lehet definiálni, és a meghatározáshoz szükséges fogalmakat ismét újabb, még egyszerűbbekre kell visszavezetni. Nyilvánvaló, hogy a definíciók e lánca nem lehet végtelen hosszú. Kell tehát, hogy

legyenek olyan egyszerű fogalmak, amelyek már nem szorulnak definiálásra. Mai nézeteink szerint ilyen a pont, az egyenes és a sík is. Amikor **Eukleidész** a pontot definiálta, akkor nemcsak feleslegesen járt el, hanem hibásan is, hiszen a rész, amellyel definiált, nem egyszerűbb, hanem összetettebb fogalom, mint a pont, amelyet meghatározott. Mindenesetre a *Sztoikheiának* és már előtte a görög matematikusoknak az az igyekezete, hogy vizsgálódásuk tárgyát és fogalmait definiálják, biztosítani akarta az egyértelműséget, az önellentmondásmentességet.

Az ellentmondásmentesség célját szolgálták az axiómák és a posztulátumok is. Az axióma szó magyarul követelést jelent, és a görög „axioó”=kérek, követelek ige képzett alakja. Ennek az igének van azonban egy olyan jelentése is, hogy méltányolok, értékelek. Ez az axióma szó értelmének olyan árnyalatot kölcsönöz, amelyet magyarul a „méltányos követelés” fordítással lehetne visszaadni. Ugyancsak követelés a jelentése a posztulátum görög megfelelőjének, az aitéma szónak is („aiteó”=kérek, követelek), de ennek nincs meg a „méltányos” jelentésárnyalata, tehát a posztulátum olyan kívánalom is lehet, amelyet más esetleg nem követel. Már az V. századi **Proklosz** sem tudott az axióma és a posztulátum között biztos különbséget tenni. Ma ezt a kétféle eukleidészi követelményt általában nem különböztetjük meg, és mind a kettőt axiómának nevezzük. Az axiómák előzetes lerögzítése előfeltétele volt (és ma is az) a matematikában meghonosodott deduktív bizonyítási módszereknek. Az eleai filozófiának egyetlen axiómája volt: „A létező van.” Amint **Eukleidész** nagy művéből látjuk, a matematika nem elégedett meg ennyivel. A *Sztoikheia* szerzője a definíciók után 9 axiómát fogalmazott meg (lásd 149. oldal).

Az első nyolc az egyenlőség fogalmát tisztázza nagy, olykor talán felesleges gonddal, nehogy valaki azt állíthassa például, hogy „az idő fele egyenlő az idő duplájával”. Amikor ezek az axiómák keletkeztek, bizonyára még komolyan vették **Zénón** paradoxonjait. Úgy tűnik, hogy az első 8 axióma éppen a Zénón-féle paradoxonokkal helyezkedik szembe. A görög matematika tehát nem próbálta megcáfolni **Zénón** okfejtéseit, hanem egyszerűen úgy járt el, hogy előrebocsátotta elmélkedéseinek elfogadott, nem bizonyított alapállításait, axiómáit. Mintha csak ezt mondaná:

Lehet, hogy nem mindenkinek ez a véleménye, mi azonban elfogadjuk ezeket az axiómákat, és akkor igazak a következők.

Ugyanez a szerepe a posztulátumok egy részének is. Az axiómákat követő 5 posztulátum közül az első három (a 149. oldalon) a mozgást engedi meg a geometriában. Igaz, hogy a görög matematikusok sokszor hangsúlyozták, hogy ez csak „elgondolt mozgása” az „elgondolt pontnak”. A geometria területén azonban igen nehéz elválasztani a ténylegesen végrehajtott szerkesztést vagy azt a vázlatot, aminek alapján gondolkozunk, a csupán elgondolhatótól. Mindenesetre a 3 posztulátum - az eleai elvek ellenére - megengedi, egyszersmind korlátozza is a szerkesztés műveletét a vonalzó és a körző használatára.

Amint a görög matematika a definíciókkal gondoskodott az ellentmondásmentes fogalmakról, és amint leszögezte a bizonyításra nem szoruló, elfogadott követelményeket, rögtön lehetővé vált a teljes értékű, meggyőző erejű indirekt bizonyítás. Egy matematikai tétel vagy igaz, vagy nem. Ha a két lehetőség közül az egyikből helyes következtetéssel olyan állításhoz jutok, amely ellentmond a definíciók vagy az axiómák valamelyikének, akkor ezt a lehetőséget el kell vetnem, ugyanakkor bizonyítottá vált a másik lehetőség. Sokáig ezt az eleai filozófiában egyedül használatos bizonyítási eljárást tartották a matematikára legjellemzőbb bizonyítási módszernek.

Az axiómarendszerek azonban lehetővé tették az axiómák olyan csoportosítását is, amelyből új állítások: tételek születtek, vagyis létrejöhetett a deduktív (levezető) bizonyítási forma. Ennek a lényege az, hogy a definíciókból, az axiómákból, illetve a már belátott tételekből helyesen következtetve új, igaz állításokhoz juthatunk. Az indirekt és a deduktív módszernek is jellemzője, hogy a segítségükkel bizonyított tételek csak annyiban igazak, amennyiben az axiómák azok. Az axiómák igazságtartalmának a vizsgálata azonban már kivezet a matematika területéről a természettudományok birodalmába.

Ugyancsak a görög matematika ókorából származik még a deduktív, más nevén szintetikus módszernek bizonyos értelemben fordított menetű eljárása: az analízis módszere. E bizonyításfajta megszületésekor az analízis szónak nem a mai, vagy nemcsak a mai

értelme élt. Ma például a kémiai analízis egy vegyület alkotórészeinek a mennyiségi vagy minőségi vizsgálatát jelenti. A görög „analüó” ige értelme magyarul: feloldok, megoldok. A most megbeszélendő „analízis” fogalmára a „megoldás” szó világít rá, mégpedig olyan értelemben, ahogy egy csomót megoldunk, ahogyan a csomóból visszakövetkeztetünk a megkötés módjára. A megoldás most tehát a megkötés fordított folyamata. A matematikára fordítva a szót: az analízisnek nevezett bizonyítási módszer a dedukció megfordítása, a bizonyítandó tételből visszafelé következtetés addig, amíg eljutunk egy már bizonyított tételhez, esetleg az axiómákhoz.

Az analízisre közismert példa annak a tételnek a bizonyítása, amely szerint két pozitív szám számtani közepe nem kisebb, mint a mértani közepük. Algebrai megfogalmazásban:

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \quad \text{ahol} \quad a>0 \text{ és } b>0.$$

Úgy vélem, hogy a bizonyítás menete magyarázat nélkül is követhető :

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

$$a^2+2ab+b^2 \geqq 4ab$$

$$a^2-2ab+b^2 \geqq 0$$

$$(a-b)^2 \geqq 0.$$

Ez az „eredmény” már mindenki számára nyilvánvaló, aki tisztában van a számok és a műveletek definícióival. Ha tehát helyesen következtettünk és helyes eredményhez jutottunk, akkor ez azt jelentheti, hogy helyes volt a kiindulás is. Azért fogalmaztunk feltételesen, mert megeshet, hogy hamis kiindulásból is helyes

eredményhez jutunk, például:

$$-3=+3 \quad |^2$$
$$9=9$$

Ahhoz tehát, hogy az analízis teljes értékű bizonyítás legyen, ki kell még egészíteni, meg kell mutatni, hogy következtetési lépései egyértelműen megfordíthatok, vagyis az utolsó állításból [(a —b)$^2 \geq 0$] szükségképpen következik az eredeti, a bizonyítandó tétel. Az analízist ki kell egészítenünk a szintézissel, a dedukcióval. Tehát:

$$a^2-2ab+b^2 \geqq 0$$
$$a^2+2ab+b^2 \geqq 4ab$$
$$(a+b)^2=4ab$$
$$|a+b| \geqq 2\sqrt{ab}$$

Mivel 0 és $b>0$, azért:

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab},$$

és így valóban:

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \quad \text{ha} \quad a>0 \text{ és } b>0.$$

Ugyanez nem tehető meg a másik példánál:

$9=9$

Négyzetgyökvonás után:

$3=3$ és $—3=3$, sőt a $—3=$ $—3$ is lehetséges.

Természetesen az analízist kiegészítő szintézis önmagában is bizonyító erejű, de az analízis megadta az ötletet arra, hogy honnan

érdemes a dedukciónak elindulni.

E téma lezárásaként vegyük még észre, hogy az analízis-szintézis egyesített módszere speciális esetként tartalmazza a közvetett bizonyítást és a dedukciót. Ha ti. az analízis az axiómákkal ellentétes állításhoz vezet, akkor a kiindulás helytelen volt, tehát annak a tagadása a helyes állítás. Ha pedig az analízist elhagyjuk, akkor nyilván a szintézist, a dedukciót nyerjük.

Az elmondottak szerint a matematika definíciói, axiómái, bizonyítási eljárásai szoros összefüggésben születtek meg a filozófiai, közelebbről az eleai, illetve a platóni filozófiai elvekkel.

A SZÜRAKUSZAI ARKHIMÉDÉSZ (i. e. 287?-212)

Az ókor legnagyobb matematikusa és fizikusa. A **Newton** és **Leibniz** által megfogalmazott differenciál- és integrálszámítás gyökereit nála találjuk meg. Az analízis területén majd 2000 évig alig-alig tudtak hozzátenni **Arkhimédész** eredményeihez. A szicíliai Szürakuszai volt a szülővárosa. Apja a csillagász **Pheidiasz.** Családjáról keveset tudunk. Sok jelből arra következtethetünk, hogy rokonságban volt II. HIERÓNnal, Szürakuszai királyával. Biztos, hogy igen jó barátja volt a király fia, **Gelón. Az** uralkodó udvarában mindent megkapott, hogy életét matematikai, fizikai és mechanikai kutatásainak szentelhesse. Ifjabb korában megfordult az akkori világ legnagyobb kultúrközpontjában, Alexandriában is. Az itt szerzett barátokkal: **Konón** csillagásszal, annak tanítványával, DOSZIPHOSszal és a Nagykönyvtár tudós igazgatójával, **Era**TOSZTHENÉsszel hazatérte után is levelező viszonyt tartott fenn. Tudományos munkásságának eredményeit nagy részben éppen ez a baráti-tudományos levelezés őrizte meg számunkra. Szokása volt, hogy matematikai felfedezéseit eljuttatta barátaihoz, de a bizonyító gondolatmenet nélkül, hogy „ne vegye el társaitól az igazolás örömét”. Olykor meg is tréfálta ismerőseit azzal, hogy hamis eredmények bizonyítására buzdította őket.

Amint az a nagy embereknél sűrűn előfordul, **Arkhimédészről** is számos legenda született, amelyek a tudós furcsaságait, nagyságát igyekeznek felfokozni és a mindennapi ember csodálkozását felcsigázni. Csak ilyen, de valamelyest mégiscsak jellemző legendamozaikokból tudjuk összeállítani a nagy matematikus

életét. **Plutarkhosz** elbeszéli, hogy **Arkhimédész** annyira megszállottja volt a kutatásnak, hogy közben evésről, ivásról, alvásról, fürdésről tökéletesen megfeledkezett. Közismert **Vitruvius** római építész leírása az Arkhimédész-törvény felfedezéséről. Eszerint **Hierón** király áldozati koronát csináltatott, de gyanította, hogy az erre a célra szánt arany egy részét az ötvös csalárd módon ezüsttel pótolta. A király a csalás bizonyítását ARKHIMÉDÉSZre bízta. A kiváló fizikus fürdés közben, észlelve súlyának csökkenését, jött rá a róla elnevezett fizikai törvényre, amely alkalmas volt a csaló mester leleplezésére. Örömében a „heuréka" (megtaláltam) szót kiáltozva, meztelenül rohant haza, hogy a meghamisított koronára alkalmazza a csak imént felfedezett törvényt. Egy másik elbeszélés szerint a királyt azzal a kijelentéssel lepte meg, hogy a szokás szerint szárazföldön épülő hadihajót az uralkodó egyedül, egymaga bocsáthatja a vízre, mégpedig a hajó teljes személyzetével együtt. A kezdetben kétkedő király nagy örömére az **Arkhimédész** által emelőkből és csigákból összeállított szerkezet segítségével ez a művelet sikerült is. **Hierón** ekkor állítólag megparancsolta, hogy **Arkhimédész** legvalószínűtlenebb kijelentéseit is köteles mindenki elhinni. Bizonyára ezek közé a kijelentések közé tartozott a nagy fizikusnak az emelőtörvényre alapozott, szállóigévé lett mondása, hogy „Adjatok egy szilárd pontot és kifordítom sarkaiból a világot."

A második pun háború idején (i. e. 218-201) Szürakuszai hadifontosságú hely lett, és **Marcellus** római hadvezérnek csak kétévi ostrom után sikerült bevennie a hősiesen védekező várost. A sikeres védekezésben kiemelkedő szerepet játszottak **Arkhimédész** hadiszerkezetei. Hajítógépei hatalmas kőtömbökkel bombázták a római csatahajókat. Nagy emelők az óriási karmaikkal magasba emelt római gályákat a vízre dobva törték össze. Nagyméretű gyűjtőtükrök gyújtották fel napsugarakkal a támadó hajókat. Bizonyára túlzások ezek a híradások, de elhihető, hogy **Arkhimédész** haditalálmányai az ostromlottaknak nagy technikai fölényt biztosítottak. **Arkhimédész** utolsó, sokszor idézett mondása halálához fűződik. Amikor Szürakuszait árulás következtében **Marcellus** seregei bevették, a hadvezér utasítást adott, hogy a nagy ellenfél, a nagy tudós életét kíméljék. Egy római harcos mégis leszúrta a homokba rajzolgató, matematikai problémáiban elmerült tudóst. Talán felingerelte a katonát azzal, hogy amikor az a homokba rajzolt ábrákat összetaposta, **Arkhimédész** rászólt: „Noli

turbare circulos meos!” (Ne zavard köreimet!) A nagyságot az ellenségben is tisztelő **Marcellus** a gyilkost megbüntette, és **Arkhimédészí** tisztességgel eltemettette, kívánsága szerint sírkövére vésette a hengerbe írt gömb és kúp körvonalait, legkedvesebb tételének ábráját. Ez azonban már nem segített azon, hogy világunk bizonyára szegényebb lett néhány nagyszerű felfedezéssel. A nép hamar elfeledte nagy fiát. Halála után 150 évvel **Cicero,** aki akkor quaestori (római gazdasági felügyelő) hivatalt viselt, még megtalálta és rendbe hozatta elhanyagolt, bozótokban rejtőző sírját. Erről **Cicero** így számolt be: „Az előkelő, egykoron művelt görög város előtt ismeretlen maradt volna egyetlen lángelméjű polgárának emléke, ha egy Arpinumból származó fel nem fedi előttük.” **(Cicero** Arpinumban született.) Ez **Arkhimédész** sírjáról az utolsó híradás, de kőnél és ércnél maradandóbban hirdetik nagyságát művei.

Mielőtt az **Arkhimédész** gondolkozásmódjára jellemző néhány példát figyelemmel kísérnénk, fussuk át műveinek vázlatos áttekintését:

Egyik igen fontos matematikai munkájára, az **Eratoszthenész-**hez írott, *Módszer* nevű levelére csak 1906-ban ismert rá **Heiberg** dán nyelvész Konstantinápolyban a Jeruzsálemi Szent Sír Kolostor Könyvtárában. Szokásban volt, hogy a drága pergament többször is felhasználták úgy, hogy a régi írást lemosták róla. Az említett könyvtárban **Papadopulo** pétervári professzor talált egy ilyen kétszer felhasznált irattekercset, amelyen azonban még a régi írás is eléggé olvasható volt. Ezt az eredeti írást betűzte ki **Heiberg,** és tartalmáról, stílusáról ráismert **Arkhimédész** néhány művére, köztük az elveszett *Módszerre* is. Ebben a szerző elmondja **Eratosz**THENÉsznek, hogy matematikai felfedezéseit rendszerint valamilyen mechanikai kísérlet alapján sejti meg, és azután a megsejtett törvényt a matematika teljes szigorával igazolja. A tapasztalat és elmélet összeforrottságát mutató, ma is modern módszer szemléltetésére néhány sorral később nyílik alkalom.

A parabola kvadratúrája című tanulmány is szép illusztrációja a *Módszernek* Ebben egy gondolati kísérlettel, az emelő törvénye alapján sejti meg **Arkhimédész** a parabolaszelet területét, majd sejtését **Eudoxosz** „kimerítéses módszerének” tökéletesített

formájával, példamutató szigorral igazolja.

A gömbről és a hengerről szóló értekezésében az általa megfogalmazott axiómákra támaszkodva határozza meg az egyenes henger, majd az egyenes körkúp, valamint a gömb felszínét és térfogatát. Számításaiban az ún. kétoldali megközelítés módszerét alkalmazza. E munkájában állapította meg, hogy az egyenlő oldalú henger, az abba írható gömb, illetve egyenes körkúp térfogata úgy aránylik, mint 3:2:1. E számára kedves eredményt fejezte ki a sírkövére vésett ábra.

Az axiomatikusan megalapozott, egymásra épülő tételsorozat gyönyörű példája *A spirálisokról* című kis műve, amelyből majd néhány jellemző részletet szeretnék ismertetni.

A konoidokról és szferoidokról (A forgásparaboloidokról és forgásellipszoidokról) írt munkájában a címben szereplő testeknek és azok síkmetszeteinek felszínét, térfogatát, illetve területét számítja ki.

A körmérésről című írásában a körbe írt szabályos sokszögek segítségével közelíti meg a kör kerületét és területét.

A homokszámításról írt csillagászati színezetű könyvében lényegében azt mutatja meg, hogyan lehet alkalmas jelöléssel tetszőlegesen nagy számokat képezni és azokat leírni.

Megérdemli a gyönyörű jelzőt a csak arab fordításban ránk maradt szabályos hétszögszerkesztés.

Szintén arab nyelvű a *Lemmák könyve,* amelyben az „arbelosz”-nak (holdkésnek) és a „szalinon”-nak (sótartónak) nevezett síkidomokról sorol fel egymásra támaszkodó tételeket.

Kimondottan csillagászati tartalmú *A gömbök készítéséről* című, sajnálatosan elveszett mű. Ebben valószínűleg az eudoxoszi elképzelés alapján szerkesztett planetárium elkészítési módját írta le. Ez a planetárium ihlette verselésre az V. századi **Claudius Claudianus** római költőt. Epigrammájának egy része fordításban: Íme az öreg szürakuszai művészi módon utánozta az ég szabályait, a mindenség rendjét és az istenek törvényeit. Bezárt szellem áll a

különböző csillagok szolgálatára, és az eleven szerkezetet szabályos mozgásra kényszeríti. Az állatöv mása megfutja a maga éveit, és a Hold képe havonként visszatér.

A fizika számára jelentős két mechanikai tárgyú könyve: *A síkidomok egyensúlyáról* és *Az úszó testekről* szól.

Most szeretnék felsorakoztatni néhány, **Arkhimédészre** jellemző gondolatmenetet. Ezeket, ahol szükségesnek látszott, igyekeztem úgy átalakítani, hogy az olvasó számára könnyen megközelíthető legyen, de maga a gondolat csorbát ne szenvedjen. Ez a következőkben nyilvánul meg:

A tisztán szavakkal leíró geometriai algebra nyelvét helyettesítem mai jelöléseinkkel.

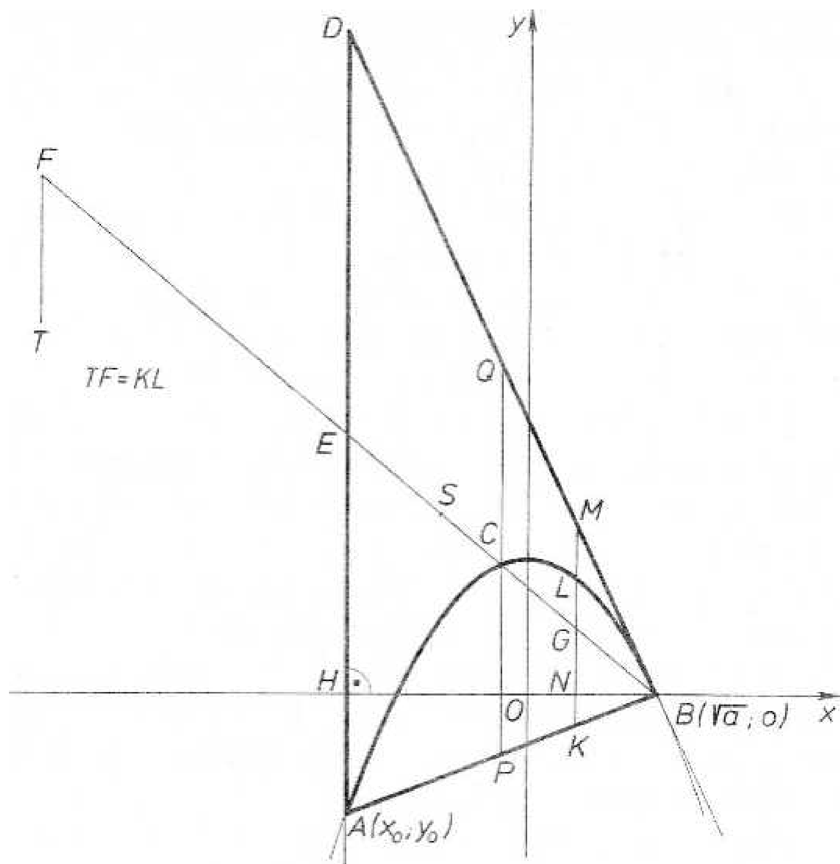
Az általánosabb eset helyett sokszor a jobban átlátható speciális esetre mutatom be a tárgyalt tételt.

Használom a középiskolából ismert koordinátageometriai módszert, főleg ott, ahol **Arkhimédész** már ismertnek vélt tételre hivatkozik.

A szent népszerűsítés érdekében elkövetett ezen hamisításaimért a komoly tudósok bocsánatát remélve, kérem a kedves olvasót, hogy kísérje figyelemmel a most következő néhány példát:

A *Módszerben* olvasható a parabolaszelet területének a meghatározása. Ezt a gondolatmenetet a fenti okok miatt kövessük koordinátageometriai leírással is. Az általánosság megsértése nélkül alapul vehetjük *az* $y=a—x^2$ parabolát, és válasszuk meg az a konstans értékét úgy, hogy az *ABC* parabolaszelet *(101. ábra) B* csúcsa essék az x-tengelyre. Kiszámítandó tehát az *ABC* parabolaszelet területe. Azért, hogy belássuk azt a segédtételt, amelyet **Arkhimédész** kiindulásul használt, húzzuk meg a parabola *B* pontjához tartozó érintőjét.

101. ábra



Ennek egyenlete:

$$y = 2a - 2\sqrt{a} \cdot x.$$

Rajzoljuk meg továbbá a parabola $A(x_0; y_0)$ pontján átmenő és a parabola tengelyével (az y-tengellyel) párhuzamos egyenest, megjegyezve, hogy x_0 *és* y_0 kielégíti a parabola egyenletét, tehát:

$$y_0 = a - x_0^2.$$

A tengellyel párhuzamos egyenes és a *B* ponthoz tartozó érintő az *AB* szelővel együtt meghatározza az *ABD* háromszöget. Szemeljük ki most az *AB* húr egyik tetszőleges *K* pontját, és legyen $AK : KB = p : q$, tehát a *K* pont koordinátái:

$$x_k = \frac{qx_0 + p\sqrt{a}}{p+q} \quad \text{és} \quad y_k = \frac{qy_0}{p+q} = \frac{q(a-x_0^2)}{p+q}.$$

Rajzoljunk végül a *K* ponton átmenő és a parabola tengelyével párhuzamos egyenest. Ez metszi a parabolát az *L,* az érintőt az *M* és az x-tengelyt az *N* pontban.

Számítsuk ki a *KL : KM* arányt!

A *K* pont abszcisszáját a parabola, illetve az érintő egyenletébe írva, nyerjük az *NL,* illetve az *NM* szakaszok hosszát. Ha ezután ezekhez hozzáadjuk az

$$NK = y_k = \frac{q(a-x_0^2)}{p+q}$$

abszolút értékét, akkor megkapjuk a *KL,* illetve a KM szakaszokat. Tehát:

$$KL = NL + |KN| = a - \left(\frac{qx_0 + p\sqrt{a}}{p+q}\right)^2 - \frac{q(a-x_0^2)}{p+q} =$$

$$= \frac{q^2(a-x_0^2) + 2pq\sqrt{a}(\sqrt{a}-x_0) - q(a-x_0^2)(p+q)}{(p+q)^2} =$$

$$= \frac{2pq\sqrt{a}(\sqrt{a}-x_0) - pq(a-x_0^2)}{(p+q)^2} = \frac{pq(\sqrt{a}-x_0)^2}{(p+q)^2}.$$

Hasonlóan:

$$KM = NM + |KN| = 2a - 2\sqrt{a}\,\frac{qx_0 + p\sqrt{a}}{p+q} - \frac{q(a-x_0^2)}{p+q} =$$

$$= \frac{2q\sqrt{a}(\sqrt{a}-x_0) - q(a-x_0^2)}{p+q} = \frac{q(\sqrt{a}-x_0)^2}{p+q}.$$

A kérdezett arány tehát:

$KL:KM = p:(p+q)$.

Mivel azonban $AK : KB = p : q$,

azért $AK : (AK + KB) = p : (p+q)$, azaz $AK : AB = p : (p+q)$.

Így

$KL : KM = AK : AB$. (1)

Erre az aránypárra **Arkhimédész** mint ismertre hivatkozott. Speciális esete az, amelynél a *K* pont éppen felezi az *AB* húrt. Ha tehát az aránypárt az *AB* húr *P* felezőpontjára alkalmazzuk, amikor is $AP = PB$, akkor a *101. ábra* szerint:

$PC : PQ = AP : AB = 1:2$, azaz $PQ = 2PC$,

vagyis a parabola *C* pontja felezi a *PQ* szakaszt. Ezen a *C* ponton át húzzunk a *B* pontból félegyenest. Ez felezi a *KM* szakaszt a *G* pontban és az *AD* szakaszt az *E* pontban. Mérjük fel végül erre a félegyenesre az $EF = EB$ távolságot. Ekkor:

$KL : KM = AK : AB = EG : EB = EG : EF$,

letisztázva: $KL : KM = EG : EF$.

Ezen a ponton ARKHIMÉDÉSZből kitört a fizikus, mégpedig az a fizikus, aki az emelő törvényét felfedezte. A felfedező éppen azért, mert sokkal mélyebben látja az általa felfedezett igazság vonatkozásait, mint a csak passzívan befogadó, azért tudja számunkra oly váratlan, meglepő módon és helyen alkalmazni a benne életre kelt törvényt. Az utolsó aránypárban **Arkhimédész** egy kétkarú emelő egyensúlyi szabályát látta meg. Így gondolkozott: Tekintsük a *GF* szakaszt egy *E* forgáspontú, kétkarú emelőnek, a *KL-et* a *KL* szakasz „súlyának" és a KM-et a *KM* szakasz „súlyának". Ekkor aránypárunk ennek az emelőnek az egyensúlyi állapotát fejezi ki abban az esetben, amelyben az *EF* karra akasztjuk a *KL* súlyt, az *EG* karra pedig a *KM* súlyt. Ez minden olyan *KL* és *KM* szakaszra érvényes, amelynél *K* az *AB* húr belső pontja. Mivel azonban - morfondíroz a fizikus **Arkhimédész,** és ezt a

matematikus **Arkhimédész** már fejcsóválva figyeli - a parabolaszelet területe a *KL* szakaszok összessége, ugyanígy az *ABD* háromszög területe a *KM* szakaszok összessége, ezért a szóban forgó aránypár, az emelőkarok helyes megválasztása esetén, érvényes a megfelelő szakaszok összességére is, azaz a parabolaszelet és a háromszög területére is.

Az aránypár szerint a *KL* szakaszok mindegyikéhez ugyanakkora *EF*=*EB* emelőkar tartozik, tehát az összegükhöz, azaz a parabolaszelet területéhez is. A *KM* szakasz *EG* karja azonban a *K* pont megválasztásától függ. A *KM* súlyok összege, amely az *ABD* háromszög területét képviseli, bizonyára a háromszög *S* súlypontjában fog hatni, amely az *EB* súlyvonalon van. A vázolt ötlet alapján tehát:

$$\frac{\text{a parabolaszelet területe}}{\text{az } ABD \text{ háromszög területe}}=\frac{t_p}{t_h}=\frac{ES}{EF}=\frac{1}{3}, \quad \text{tehát} \quad t_p=\frac{t_h}{3}.$$

A P felezőpontnak, és vele együtt a C pontnak az abszcisszája:

$$x_1=\frac{x_0+\sqrt{a}}{2},$$

és így a *C* pontbeli érintő iránytangense: $-2x_1= -(x_0+ \sqrt{a})$. A két iránytangens egyenlősége alapján tehát a *C* ponthoz tartozó parabolaérintő valóban párhuzamos az *AB* húrral.

Ebből az is következik, hogy ábránk *ABQR* négyszöge paralelogramma. Itt *BQ* és *AR* a PC-vel párhuzamos szakaszok.

Mivel *M* rajta van a parabola *B* pontjához tartozó érintőjén, azért a 2. segédtételt nyilvánvalóvá teszi az (1) aránypár. Ha ezt alkalmazzuk az *F* negyedelőpontra, akkor mivel *AF : AB = 3 :* 4,

azért: *FG : FM = AF : AB =* 3:4, ahol *FM*=*2FK,*

tehát: *FG : FK*= 3 : 2, vagyis *FK = 2KG.*

Hasonló módon juthatunk el a *DH = 2HE* egyenlőséghez is.

A két segédtétel belátása után jelöljük az *ABC* háromszög területét t-vel és a parabolaszeletét T-vel. Ha az *ABC* parabolaszelet területét

az *ABC* háromszög területével közelítjük, akkor $T > t$, de $t = T/2$, mert az *ABQR* paralelogramma területe nagyobb a szelet területénél, és így a paralelogramma területének a fele is nagyobb a szelet félterületénél. Ha tehát a szelet területéből elvesszük (kimerjük) az *ABC* háromszög területét, akkor többet vettünk el a szelet felénél. A közelítést pontosabbá tehetjük, ha az *ABC* háromszög területén kívül elvesszük még a *BCG* és az *ACE* háromszögek területét is. Ezekre nézve fennáll, hogy:

$t_{BCG} = t/8$, mert $t_{CKG} = t_{KBG} = 1/2 t_{FBK}$

a közös magassághoz tartozó alapok összehasonlítása szerint. Ugyanígy $t_{ACE} = t/8$. Az új, jobb közelítés tehát:

$$T > t_{ABC} + t_{BCG} + t_{ACE} = t + t/4.$$

Most is megjegyezzük, hogy a két utóbbi háromszög elvételével többet vettünk el, mint a (*T*—*t*) maradék felét.

Ezt a „kimeregetést” folytathatjuk. Az *AD, DP, PF* és *FB* szakaszok felezőpontjából állíthatunk merőlegest az x-tengelyre. Ezeknek és a parabolának a metszéspontjai: csúcsai az *AE, EC, CG* és *GB* szakaszokra mint alapokra épített, újabb „kimeregető” háromszögeknek. Az előbb vázolt gondolatmenet szerint ezek területösszege t/16. Így az újabb közelítés:

$$T > t + \frac{t}{4} + \frac{t}{16}.$$

Ha ezt az eljárást folytatjuk, és a parabolaszelet területéből mind több és több háromszög területét vesszük el, akkor a maradék tetszőleges kicsinnyé tehető.

102. ábra

Ezt **Arkhimédész** megokolta azzal az EUKLEIDÉSZnél már megemlített axiómával, amely szerint, ha $a>b$, és a-ból elvesszük a felénél nagyobbat, aztán a maradék felénél nagyobbat, és így tovább, akkor elérhetjük, hogy a maradék b-nél kisebb lesz (bármilyen kicsiny is a *b).* Az előbb éppen így jártunk el: mindig nagyobbat vettünk el, mint a közvetlenül előbbi maradék fele. Kimondhatjuk tehát, hogy a

$$T_n = t + \frac{t}{4} + \frac{t}{16} + \ldots + \frac{t}{4^{n-1}}$$

összeg tetszőleges pontossággal megközelíti a parabolaszelet *T* területét, azaz a $T — T_n$ különbség kisebb egy tetszőlegesen kicsiny ε pozitív számnál, ha *n* elég nagy, vagyis

$T — T_n < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$.

Érdekes módon határozta meg Arkhimédész a fenti mértani sorozat első n elemének T_n-nel jelölt összegét:

Legyen a_1, a_2, a_3, ... olyan mértani sorozat, amelynek hányadosa 1/4. Ekkor:

$$a_2+\frac{1}{3}a_2=\frac{4}{3}a_2=\frac{a_1}{3},$$

$$a_3+\frac{1}{3}a_3=\frac{4}{3}a_3=\frac{a_2}{3},$$

$$a_4+\frac{1}{3}a_4=\frac{4}{3}a_4=\frac{a_3}{3},$$

$$\cdots$$

$$a_n+\frac{1}{3}a_n=\frac{4}{3}a_n=\frac{a_{n-1}}{3}.$$

Az első és a harmadik oszlop összegére nézve tehát igaz, hogy

$$a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+\frac{1}{3}(a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n)=$$
$$=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}).$$

Adjunk most mind a két oldalhoz a_1-et, és ugyanakkor vonjuk ki az $1/3(a_2+ a_3+ \ldots + a_n)$ összeget. Így:

$a_1 + a_2+a_3+ \ldots + a_n=1/3a_1-1/3a_n+a_1,$

tehát

$a_1+a_2+a_3+ \ldots + a_n = 4/3a_1—1/3a_n.$

A mi esetünkben $a_1 = t$, és így

$$T_n=t+\frac{t}{4}+\ldots+\frac{t}{4^{n-1}}=\frac{4}{3}t-\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{4^{n-1}}.$$

Ebből már nem nehéz meglátni, hogy n növelésével az $1/3*t/4^{n-1}$ tetszőlegesen kicsinnyé tehető, tehát a T_n bármilyen közel juthat a $4/3t$-hez. Láttuk azonban, hogy az n növekedtével a T_n

tetszőlegesen megközelíti a *T-t* is. Valószínűnek látszik tehát, hogy a parabolaszelet *T* területe éppen 4/3*t.* Azt, hogy ez valóban így van,

Arkhimédész indirekt úton igazolta. Tudjuk ugyanis, hogy elég nagy n esetére igaz, hogy

$$a)\ T_n=\frac{4}{3}t-\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{4^{n-1}}<\frac{4}{3}t,$$

$$b)\ T>T_n,$$

$$c)\ T-T_n<\varepsilon,\ \text{ahol}\ \varepsilon>0,$$

$$d)\ \frac{4}{3}t-T_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{t}{4^{n-1}}<\varepsilon_1,\ \text{ahol}\ \varepsilon_1>0.$$



103. ábra



104. ábra

Tételezzük fel először, hogy T > 4/3t. Mivel T_n < 4/3*t,* azért a nagysági sorrendet a *103. ábra* számegyenese szemlélteti. Ekkor azonban a *c)* egyenlőtlenség szerint elég nagy *n* esetén T_n tetszőlegesen közel jut T-hez, tehát közelebb, mint a 4/3*t.*

Ezt viszont csak úgy teheti meg, ha bekövetkezik a 4/3t < T_n helyzet, ami viszont ellentmond az *a)* egyenlőtlenségnek, tehát a kiinduló feltevés, hogy tudniillik T > 4/3*t,* nem lehet igaz.

Tételezzük fel másodjára, hogy *T* < *4/3t.* Ekkor a nagysági viszonyokat a *104. ábra* mutatja. Most viszont a *d)* pont miatt a T_n

növekedő módon akármilyen közel juthat a 4/3t-hez, tehát elég nagy *n* esetén bekövetkezik, hogy T_n nagyobbra nő T-nél. Ez pedig a *b)* egyelőtlenség miatt lehetetlen. Így a kezdeti feltevést most sem fogadhatjuk el.

Ha a *T* sem kisebb, sem nagyobb nem lehet 4/3t-nél, akkor azzal egyenlő*:* $T = 4/3t$. Az *ABC* parabolaszelet területe tehát az *ABC* háromszög területének négyharmad része.

Érdemes felfigyelnünk arra, hogy Arkhimédész a határérték fogalmát leszámítva minden olyan ismeretnek a birtokában volt, ami a határozottintegrál-számításhoz szükséges. A határérték-fogalmat ügyesen megkerülte az indirekt bizonyítással. Érthető, hogy a fogalomrendszer hiányossága miatt ez a „majdnem határozottintegrál-számítás" még nem válhatott az azonos típusú feladatok megoldásának általános módszerévé, hanem mindig a konkrét feladat természetéhez kellett igazodnia. Ezen a fokon azonban **Arkhimédész** mesteri módon alkalmazta a „kimerítés" módszerét, és ezen a területen a XIX. századig versenytárs nélkül maradt.

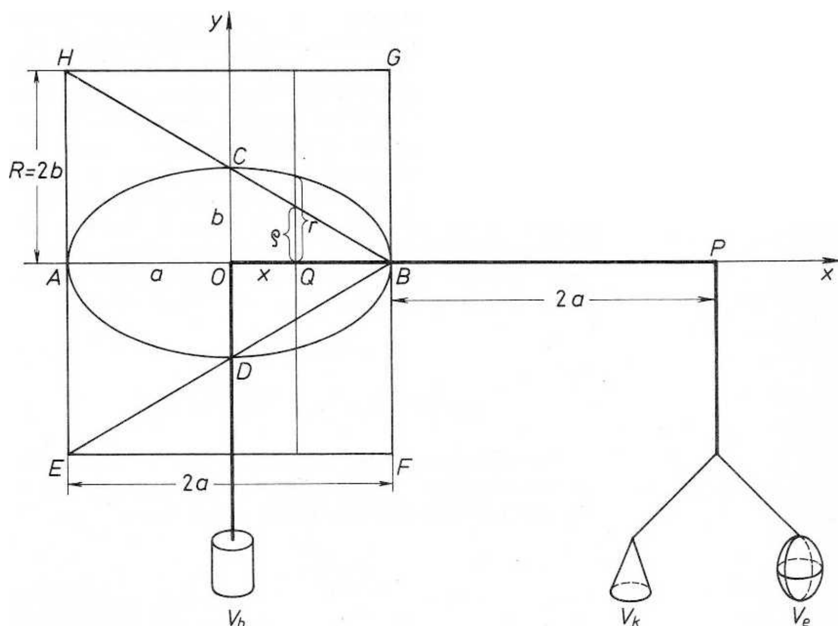
Ezek után talán már nem is meglepő, hogy **Arkhimédész** *A konoidokról és a szferoidokról* című könyvében szintén az emelőtörvény segítségével becsülte meg a forgásellipszoid (szferoid) térfogatát.

Kiindulásul tekintsük azt az ellipszist, amelyet az *x ; y* derékszögű koordináta-rendszerben az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenlet határoz meg *(105. ábra)*. Ezt az ellipszist forgassuk meg az *x-,* illetve *az* $AB = 2a$ tengely körül. Az így nyert forgásellipszoid térfogatát kell kiszámítanunk **Arkhimédész** módszerével. Segédeszközként képzeljünk el egy olyan helyzetű kúpot, amelynek a tengelymetszetét ábránkon az *EBH* háromszög jelzi. E kúp alapkörének sugara *2b* és magassága *2a.* Képzeljük el még az *EFGH* tengelymetszetű egyenes hengert is, amelynek magassága *2a és* alapkörének sugara *2b.*

105. ábra



E három testet egyszerre messük el az origótól x távolságú ($|x| \leq a$), az x-tengelyre merőleges síkkal. E sík a hengerből, az ellipszoidból és a kúpból is kimetsz egy-egy kört. E körlemezek sugarai rendre: *2b, r* és ϱ. A sugarak négyzetei:

$$R^2=4b^2,$$

$$r^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \text{ az ellipszis egyenletéből,}$$

$$\varrho^2=\frac{b^2}{a^2}(a-x)^2, \text{ az } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ egyenletből.}$$

Ezek alapján:

$$\frac{r^2+\varrho^2}{R^2}=\frac{1}{2a}(a-x).$$

Rendezés és π-vel való szorzás után:

$(r^2\pi + \varrho^2\pi)2a = R^2\pi(a - x)$.

Itt **Arkhimédész** ismét „fizikus módra” kezdett gondolkozni. Ha - vélte - tekintem a *B* forgáspontú *PQ* kétkarú emelőt, amelynek a $BP = 2a$ hosszúságú karján működik az $(r^2\pi + \varrho^2\pi)$ erő, és a másik, $BQ = a - x$ hosszúságú karján az $R^2\pi$ nagyságú erő, akkor a rendezés után kapott egyenlőség a két erő egyensúlyi feltételét fejezi ki. Változzék most az x értéke $(-a)$-tól $(+a)$-ig, és vegyük számításba minden x értéknél az ahhoz tartozó körlaphármast. A hengert fogjuk fel úgy, mint az $R^2\pi$ területű körlapok összességét, és e henger $V_h\gamma$ súlya hasson a henger *O* súlypontjában, azaz az $OB = a$ hosszúságú karon. Ugyanígy legyen a kúp a $\varrho^2\pi$ területű körlapok összessége, és az ellipszoid az $r^2\pi$ területű körlapok együttese. A kúp és az ellipszoid $(V_k + V_e)\gamma$ összsúlya támadjon továbbra is a *P* pontban, hiszen ezeknél a $BP = 2a$ erőkar független az x értékétől. (Jelöléseinkben V_h, V_k és V_e jelentik sorrendben a henger-, a kúp- és az ellipszoid térfogatát, γ pedig a közös fajsúlyt.) Ebben a felfogásban az egyensúlyt leíró egyenletben $R^2\pi$ helyett $V_h\gamma$, az $(r^2\pi + \varrho^2\pi)$ helyett pedig $(V_k + V_e)\gamma$ kerül, és a fajsúllyal való osztás után:

$(V_k + V_e)2a = a^*V_h$,

amiből:

$$V_e = \frac{1}{2}V_h - V_k = \frac{1}{6}V_h = \frac{4b^2\pi \cdot 2a}{6} = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Megint elérkeztünk ahhoz a ponthoz, amelynél a fizikus Arkhimédész a megsejtett eredményét igazolás végett átadta a matematikus ARKHIMÉDÉSZnek. Őt követve számítsuk ki mi is az előbbi

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

egyenletű ellipszis megforgatásából származó ellipszoid felének a

térfogatát. Ez a félellipszoid tehát az origótól az $x=a$ abszcisszájú pontig tart. Osszuk fel ezért a $0 \leq x \leq a$ intervallumot n egyenlő részre *(106. ábra).* Az osztópontokon át szeleteljük fel a félellipszoidot az x-tengelyre merőleges síkokkal. A metszetül nyert körlapokra építsünk a/n magasságú hengereket úgy, hogy azok beburkolják a félellipszoidot. Az osztópontok abszcisszái:

$$x:\ 0,\ \frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \frac{3a}{n},\ \ldots,\ \frac{(n-1)a}{n},\ \frac{na}{n}.$$

A megfelelő ordináták, azaz a körsugarak négyzetei:

$$y^2:\ b^2,\ b^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ b^2\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right),\ b^2\left(1-\frac{3^2}{n^2}\right),\ \ldots,\ b^2\left[1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right],\ b^2\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right).$$

A félellipszoidot burkoló hengerek térfogatösszege tehát:

$$V_n=\frac{ab^2\pi}{n}\left\{1+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\left(1-\frac{3^2}{n^2}\right)+\ldots+\left[1-\frac{(n-1)^2}{n_n}\right]+\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{ab^2\pi}{n}\left[n+1-\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\right]=$$

$$=ab^2\pi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\right].$$

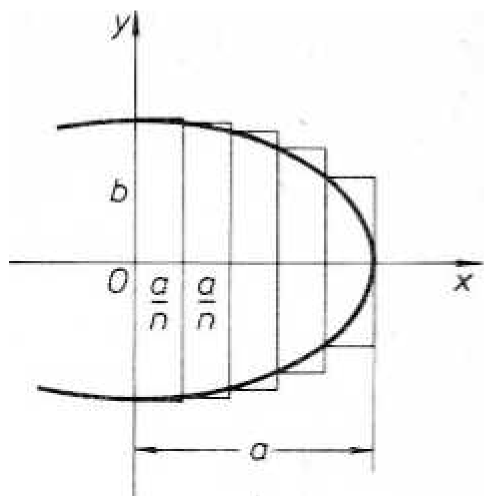
Ha az ellipszoid féltérfogatát V-vel jelöltük, akkor írhatjuk, hogy $V<V_n$. Ezt a felső becslést egészítsük ki egy alsó becsléssel. Illesszünk ezért most a félellipszoid körmetszeteire „belülírt” hengereket a *107. ábra* szerint. A *106. ábrá*val való összehasonlítás meggyőz bennünket arról, hogy a belülírt hengerek V_{n-1}, térfogatösszege éppen az előbbi legnagyobb henger térfogatával, vagyis $(ab^2\pi)/n$-nel kisebb, mint V_n. Ha ezt elhagyjuk, meg még a

V_n kifejezésében szereplő

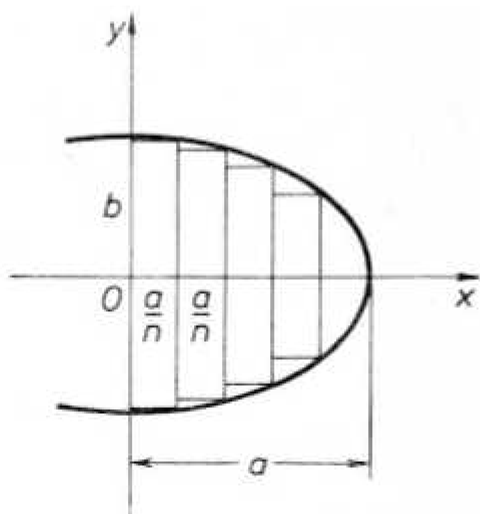
$$\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right),$$

zérus értékű tagot is, akkor:

$$V_{n-1}=\frac{ab^2\pi}{n}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\left(1-\frac{3^2}{n^2}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left[1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\right\}=$$
$$=\frac{ab^2\pi}{n}\left\{(n-1)-\frac{1}{n^2}\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right]\right\}=$$
$$=ab^2\pi\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right]\right\}.$$



106. ábra



107. ábra

A most nyert V_{n-1} bizonyára kisebb a V-nél. Így tehát sikerült a félellipszoid térfogatát két érték közé szorítani:

$V_n > V > V_{n-1}$

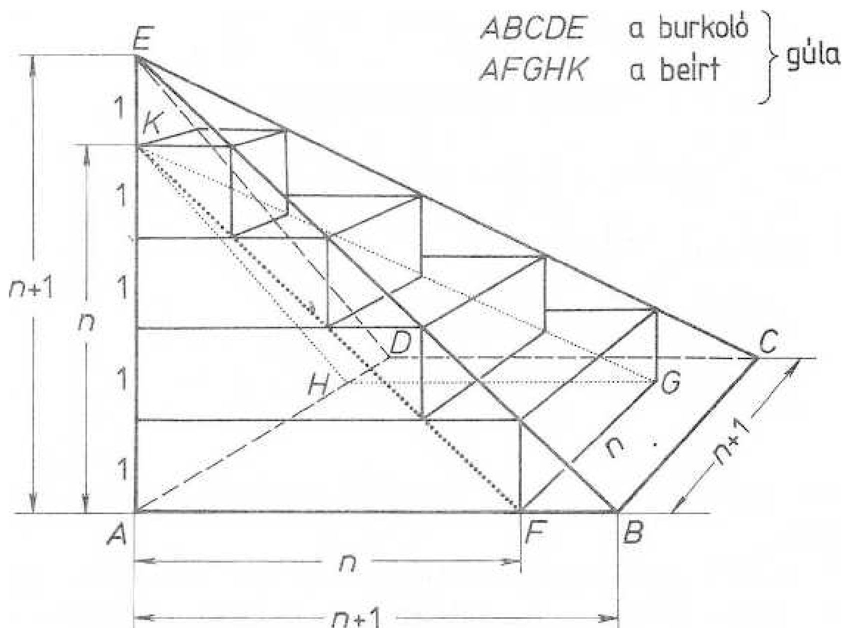
Mi most biztosan elővennénk az első *n* négyzetszám összegzési képletét, amit már **Arkhimédész** előtt is jól ismertek. Ő azonban mégsem ezt az utat választotta, hanem a négyzetszámok összegére is csak becslést adott. Igazolás nélkül hivatkozott arra, hogy

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 < \frac{(n+1)^3}{3}$$

és

$$S_{n-1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 > \frac{(n-1)^3}{3}.$$

108. ábra



Valószínű, hogy ez a két egyenlőtlenség valamilyen geometriai meggondolásból származott, talán a következőképpen: Építsünk fel egy lépcsőzetes piramist négyzetes oszlopokból a *108. ábra* szerint. A legalsó négyzet oldala *n* egység hosszú. Felfelé haladva, minden következőé 1 egységgel kisebb. Mindegyik oszlop magassága 1 egység. Az ilyen lépcsőzetes piramis térfogata:

$$S_n = 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + \ldots + n^2 \cdot 1 < \frac{(n+1)^2 \cdot (n+1)}{3} = \frac{(n+1)^3}{3},$$

ahol $(n+1)^3/3$ a *108. ábrán* feltüntetett körülírt négyzetes gúla köbtartalma. Az ábráról hasonló módon olvasható le, hogy

$$S_n = 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + \ldots + n^2 \cdot 1 > \frac{n^2 \cdot n}{3} = \frac{n^3}{3},$$

amiből következik, hogy:

$$S_{n-1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 > \frac{(n-1)^3}{3}.$$

Elfogadva tehát az S_n-re és S_{n-1}-re vonatkozó egyenlőtlenségeket:

$$V_n = ab^2\pi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\right]>$$
$$>ab^2\pi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{(n+1)^3}{3n^3}\right]=ab^2\pi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right].$$

Hasonlóan:

$$V_{n-1} = ab^2\pi\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]\right\}<$$
$$<ab^2\pi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{(n-1)^3}{3n^3}\right]=ab^2\pi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^3\right].$$

A V_n és V_{n-1} eme becsléseiből már nem nehéz észrevenni, hogy ha a felosztások *n* számát növeljük, akkor az 1/n mind kisebbé válik és V_n csökkenő, V_{n-1} pedig növekvő módon közeledik a $(2ab^2\pi)/3$ (már megsejtett) értékhez, amelyre nézve igaz, hogy:

$$V_n > \frac{2ab^2\pi}{3} > V_{n-1}. \qquad (1)$$

Igaz még az is, hogy

$$V_n - V_{n-1} = \frac{ab^2\pi}{n} \qquad (2)$$

az *n* növelésével tetszőleges kicsinnyé tehető.

Ezeken felül fennáll még, hogy

$V_n > V > V_{n-1}$ (3)

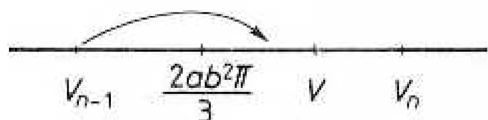
$V_n - V < \varepsilon_1$ (4)

valamint

$V - V_{n-i} < \varepsilon_2$ (5)

Mivel az (1), (2) és (3) megállapítások szerint a *V* és a $(2ab^2\pi)/3$ érték is, minden *n*-re nézve az egymáshoz tetszőleges közel jutó V_n és V_{n-1}, között van, azért kézenfekvőnek látszó állítás, hogy

$$V=\frac{2ab^2\pi}{3}.$$

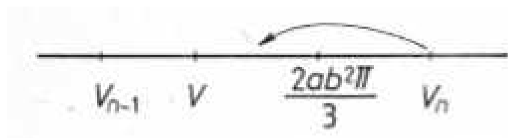


109. ábra

Tegyük fel ugyanis ennek az ellenkezőjét, először azt, hogy

$$V>\frac{2ab^2\pi}{3}.$$

Ekkor a nagysági viszonyokat a *109. ábra* számegyenesén szemlélhetjük. Az (5) feltétel szerint azonban V_{n-1} akármilyen közel juthat *V-hez,* azért az *n* növelésével be fog következni, hogy V_{n-1} nagyobb lesz $(2ab^2\pi)/3$-nál.



110. ábra

Ez viszont az (1) egyenlőtlenségnek ellentmond, tehát a $V > (2ab^2\pi)/3$ feltevés megdőlt.

Akkor talán *V* kisebb, mint $(2ab^2\pi)/3$. Ezt a helyzetet a *110. ábra* mutatja. Most a (4) kikötés kívánsága miatt V_n közelítheti meg bármilyen mértékben *V-t,* tehát *n* növekedésekor egyszer csak bekövetkezik, hogy $V_n < (2ab^2\pi)/3$. Ez pedig az (1) egyenlőtlenség szerint lehetetlen. Nem volt tehát jogos a $V < (2ab^2\pi)/3$ feltételezés sem.

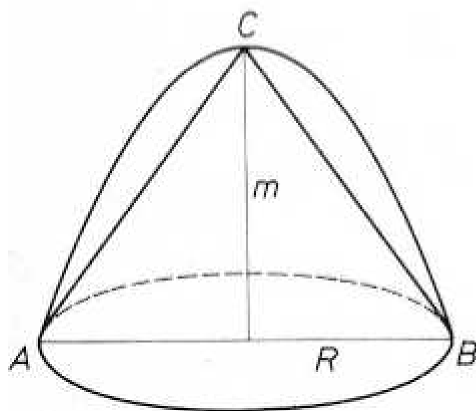
Így csak az az állítás fogadható el, hogy $V=(2ab^2\pi)/3$. Igaz tehát a fizikus Arkhimédész megjósolt eredménye: Az ellipszoid térfogata

$$V_e = 2V = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

Megjegyezve, hogy **Arkhimédész** külön foglalkozott a gömb térfogatának és felszínének kiszámításával *A gömbről és a hengerről* című tanulmányában, a gömb térfogatának a meghatározására a legegyszerűbb a nyert képletet alkalmazni arra az ellipszoidra, amelyet az egyenlő tengelyű ellipszis, vagy a kör megforgatásából kapunk, ha a forgástengely a kör valamelyik átmérője. A gömb térfogata tehát $V_g=(4r^3\pi)/3$, ahol $r=a=b$.

Arkhimédész az „emelőmódszert” fordított irányban is felhasználta a súlypont-meghatározásnál. Lássunk erre is példát. Hogyan állapította meg **Arkhimédész** a forgásparaboloid szeletének a súlypontját? Először a már ismertetett módszerrel kiszámította a szelet térfogatát. Eredményül azt találta, hogy a *111. ábra* szerinti *ABC* paraboloidszelet köbtartalma *(V_p)* a beírt *ABC* kúp térfogatának (V_k) a háromketted része, vagyis

$$V_p = \frac{3}{2} V_k.$$

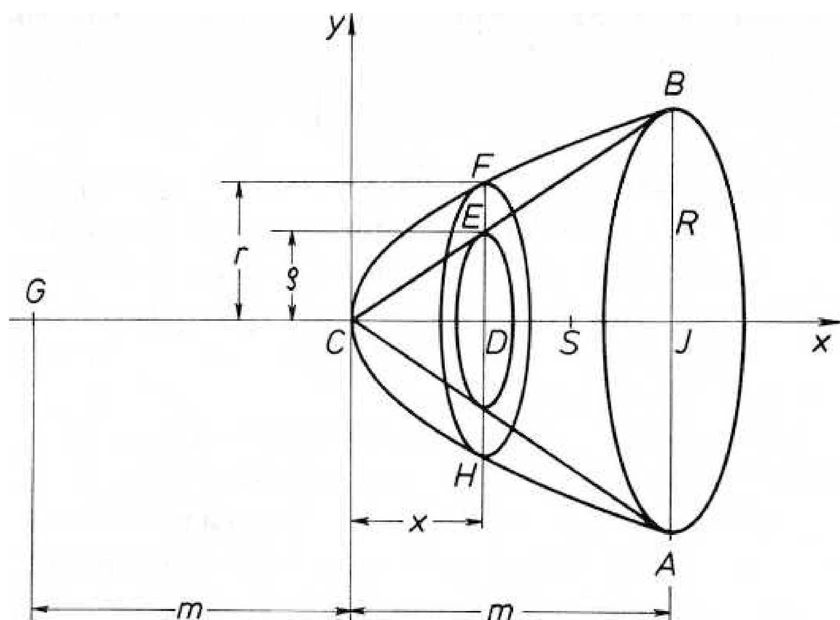


111. ábra

Kezdetben tegyünk úgy, mintha az $y^2=2px$ parabola x-tengely körüli forgatásából származó paraboloid *ABC* szeletének térfogatát akarnánk meghatározni, illetve „megsejteni” *(112. ábra)*.
Ezért készítsük el a tengelyre merőleges *HF* síkmetszetet. A *HF* sík a paraboloidszeletből kimetszi az *r* sugarú, a beírható *ABC* kúpból pedig a ϱ sugarú körlemezt. Az $y^2=2px$ egyenlet szerint

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{x}{m}, \quad \text{ahonnan} \quad r^2=\frac{R^2x}{m}.$$

112. ábra



A *CDE* és *CJB* hasonló háromszögekből pedig

$$\frac{\varrho}{R}=\frac{x}{m}, \quad \text{ahonnan} \quad \varrho^2=\frac{R^2x^2}{m^2}.$$

Ezek szerint

$$\frac{r^2}{\varrho^2}=\frac{m}{x}, \quad \text{amiből} \quad r^2\pi \cdot x=\varrho^2\pi \cdot m.$$

Tekintsük most legutóbbi egyenletünket egy olyan kétkarú emelőre vonatkozó egyensúlyi feltételnek, amelynek forgáspontja *C,* az x hosszúságú karon támad az $r^2\pi$ nagyságú erő, és a másik, m hosszúságú karon pedig a $\varrho^2\pi$ erő. A forgásellipszoidnál alkalmazott felfogás szerint az $r^2\pi$ területű paraboloidmetszetek összességét helyettesítsük *a C és J* pontok között a paraboloidszelet térfogatával, a $\varrho^2\pi$ területű kúpmetszetek együttesét pedig az *ABC* kúp köbtartalmával. Így az m hosszúságú karon a $V_k\gamma$ erő egyensúlyt tart a paraboloidszelet S súlypontjában támadó $V_p\gamma$ erővel, tehát

$$V_k\gamma \cdot m=V_p\gamma \cdot \overline{CS}, \quad \text{és innen} \quad \overline{CS}=\frac{V_k}{V_p} \cdot m.$$

Mivel azonban Arkhimédész már előzőleg megállapította, hogy $V_k : V_p=2 : 3$, azért $CS = 2/3m$, tehát a paraboloidszelet súlypontja a szelet *C* tetőpontjától számítva az m magasság második harmadolópontja. Ugyanígy határozta meg **Arkhimédész** a gömbszelet, a forgási ellipszoid és a forgáshiperboloid-szelet súlypontját is.

A gömbről és a hengerről című tanulmányból kiválasztottuk azt a részt, amely a gömb felszínének a kiszámításával foglalkozik.

Arkhimédész e munka elején az euklideszi posztulátumok mellé néhány újat is bevezet:

1. Azon görbék közül, amelyek végpontjai közösek, legrövidebb az egyenes szakasz.

2. Ha egy síkban két görbének ugyanazok a végpontjai, és mindkettő a végpontok által meghatározott egyenesnek ugyanarra az oldalára esik, akkor az a hosszabb, amely a másikat teljesen körülöleli.

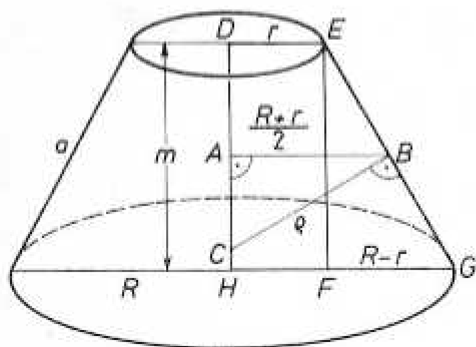
3. Ugyanazon zárt síkgörbével határolt felületek között

legkisebb területű a síkfelület.

4. Ha két felületet ugyanazon síkgörbe határol, és mindkettő a görbe síkjának ugyanazon oldalára esik, akkor a kettő közül az a nagyobb (területű), amely teljesen körülfogja a másikat.

5. Két vonal, felület vagy test különbsége valahányszor önmagához hozzáadva, bármely előre megadott, ugyanolyan fajtájú mennyiséget túlhaladhat. Ezt az 5. posztulátumot arkhimédészi axiómának nevezik, és szerepel a Hilbert-féle folytonossági axiómák csoportjában.

E posztulátumok előrebocsátása után **Arkhimédész** a „kétoldali megközelítés" módszerével meghatározta az egyenes körhenger és az egyenes körkúp palástjának a felszínét. Ezek helyett mi most megmutatjuk azt a segédtételt, amelyet a gömbfelszín számításánál használt fel.



113. ábra

Ismeretes, hogy az egyenes csonka körkúp palástjának a felszínképlete $P=(R+r)a\pi$, ahol R és r a határoló körök sugarai és a az alkotó hossza a *113. ábra* szerint. Alakítsuk át e formulát úgy, hogy szerepeljen benne a csonka gúla m magassága és az ábra szerinti $BC=\varrho$ szakasz. Ez az utóbbi illeszkedik az a alkotó és az m magasság által meghatározott síkra, az alkotóra merőleges annak középpontjában és az alkotó felezőpontjától a csonka kúp tengelyéig nyúlik. Az ABC és FEG háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{R+r}{2} : \varrho = m : a,$$

tehát

$(R+r)a=2\varrho m.$

Így a palást felszíne: $P= 2\varrho\pi m$, amely képlet az egyenes körkúp esetén is igaz.

Tekintsük ezután át **Arkhimédész** gondolatmenetét. Rajzoljunk az *r* sugarú körbe és a kör köré olyan *n* oldalú szabályos sokszöget, amelynek *n* oldalszáma néggyel osztható, amint ez a *114. ábrán* látható. Mind a három síkidomot forgassuk meg a sokszög két átellenes csúcsán átmenő *AB* tengely körül. Ekkor a körvonal leír egy *r* sugarú gömbfelületet, a két sokszög pedig kúp- és csonkakúp-palástokból összetett felületet.

Jelöljük a gömb felületét F_g-vel, a körülírt felületet F_k-val és a belülírtat F_b-vel. Ekkor a 4. posztulátum szerint: $F_k > F_g > F_b$. Mindkét sokszög oldalszámát egyenlően növelve F_k csökkenni, F_b pedig nőni fog, de az $F_k > F_g > F_b$ nagysági sorrend megmarad.

Alkalmazzuk most az előrebocsátott segédtételt a beírt, majd a burkoló felület felszínének kiszámítására. Az ábrát is segítségül híva:

$$F_b = 2\varrho m_1\pi + 2\varrho m_2\pi + 2\varrho m_3\pi + \ldots = \\ = 2\varrho\pi(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) = 2\varrho\pi 2r = 4r\varrho\pi.$$

Nem jelent lényeges eltérést, hogy Arkhimédész ebben a részeredményben nem a ϱ és r sugarakat, hanem a d és d_1 átlókat szerepeltette, hiszen az ábráról leolvasható: mivel $2r=d$ és $2\varrho=d_1$, azért

$F_b=4r\varrho\pi=d*d_1\pi.$

Az így felírt F_b felszínt egy olyan R sugarú kör területének tekintette, amelynél R a d és d_1 mértani közepe, vagyis ahol

$R^2 = d*d_1$.

Pontosan az F_b esetében látott módon juthatunk el az

$$F_k = 2r(2r + 2\Delta r)\pi = 4r^2\pi + 4r\Delta\pi$$

értékhez. Az F_b és F_k imént nyert kifejezéseit összehasonlítva látható, hogy

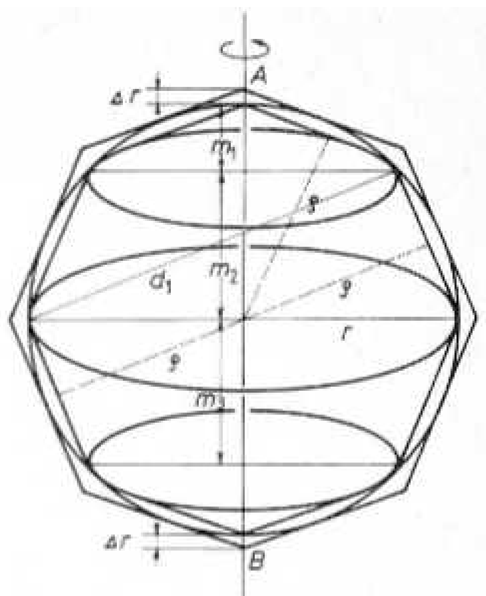
$$F_k > 4r^2\pi > F_b.$$

Ugyanakkor, amint már fentebb leszögeztük, igaz, hogy

$$F_k > F_g > F_b.$$

A szemlélet alapján kézenfekvőnek látszik, hogy $F_g = 4r^2\pi$, hiszen az n oldalszám növelésével F_k csökkenő, F_b pedig növekvő módon tetszőleges közel kerülhet a $4r^2\pi$ értékhez, és ugyanakkor mindig közrefogják F_g-t.

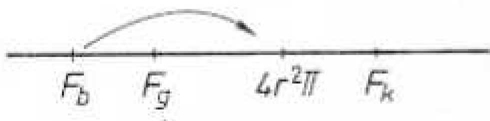
Azt, hogy a gömb felszíne valóban $4r^2\pi$-vel egyenlő, Arkhimédész most is a már jól ismert indirekt bizonyítással igazolta. Ha ugyanis feltételezzük, hogy $F_g > 4r^2\pi$, akkor a nagysági sorrendben szereplő mennyiségeket a 115. ábra szemlélteti. Mivel n növekedése folytán F_k bármilyen közel kerülhet $4r^2\pi$-hez, azért egy bizonyos n-től kezdve már $F_k < F_g$, ami pedig lehetetlen. Ugyanígy ellentmondáshoz vezet az a feltevés is, hogy $F_g < 4r^2\pi$, mert a 116. ábra helyessége esetén F_b a $4r^2\pi$-hez közeledve kell, hogy egyszer csak F_g-nél nagyobbá váljék, és ez szintén lehetetlen. Ekképpen leszámolva a két, ellentmondáshoz vezető feltevéssel, csak egyetlen lehetőség marad, az ti., hogy $F_g = 4r^2\pi$.



114. ábra



115. ábra



116. ábra

A gömbről és a hengerről című könyv második részében a szerző még két feladattal foglalkozott. Az első azt kívánja, hogy adott hengerhez, illetve kúphoz keressünk azzal egyenlő térfogatú gömböt. A második feladatban egy gömböt úgy kell egy síkkal kettészelni, hogy a részek térfogatának aránya előre megadott legyen.

Igen érdekes, és részletesebb tárgyalásra méltó ARKHIMÉDÉSZnek az a műve, amely az általa felfedezett spirálisról szól. *A spirálisokról* című dolgozatban 28, egymásra támaszkodó tétel sorakozik, szigorú axiomatikus felépítésben. A mű tárgya, a tárgyalás eszközei, a feldolgozás szelleme minden méltatásnál jobban tükrözi mindazt, amiben az ókor e legkiválóbb matematikusa majd 2000 évvel előzte meg korát. A tételek két cél felé vezetik az olvasót. Az egyik annak a területnek a meghatározása, amelyet a spirális és kezdőegyenese határol. A megoldás módszere hasonló ahhoz, amelyet a parabolaszelet területének a meghatározásánál láttunk. A tételek másik része ahhoz, az érintővel kapcsolatos feladathoz vezet, amelynek megoldásával a körnégyszögesítés arkhimédészi megoldásánál találkoztunk a 119. és 120. oldalon Ez alkalommal azonban szerezzük meg magunknak azt az örömöt, amelyet **Arkhimédész** eredeti gondolatmenetének követése adhat. A műből kiszakított alábbi tételek tehát egy, a spirális érintőjére vonatkozó megállapításhoz vezetnek.

1. Az egyenletes mozgás útja arányos az út megtételéhez szükséges idővel.

2. Két, általában nem egyenlő sebességű egyenletes mozgásnál az ugyanazon idők alatt megtett utak aránya egyenlő.

Igazolás: Az állandó c_1 sebességű pont t_1 idő alatt befutja az s_1 UTAT, ÉS t_2 idő alatt az s_2 utat. Az állandó $c_2 <=> c_1$ sebességű pont t_1 idő alatt megteszi az S_1 és t_2 idő alatt az S_2 utat. Ekkor az 1. tétel szerint

$s_1 = c_1 t_1$, $s_2 = c_1 t_2$ és

$S_1 = c_2 t_1$, $S_2 = c_2 t_2$.

Mivel

$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{c_1}{c_2} \text{ és } \frac{s_2}{S_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

azért valóban:

$$\frac{s_1}{S_1}=\frac{s_2}{S_2}.$$

3. Adott számú körhöz található olyan egyenesszakasz, amely nagyobb, mint e körök kerületösszege.

Igazolás: Az egyes körök köré írt érintősokszögek kerületösszege is ilyen szakasz.

5. Egy adott *O* középpontú körvonal *A* pontbeli érintőjéhez húzható az *O* pontból olyan félegyenes, amely a kört a *P* pontban, az érintőt az *E* pontban metszi úgy, hogy bármely adott *c* szakasz esetén :

$$EP : OP < \widehat{AP} : c.$$

Igazolás (117. ábra): Vegyük fel a $d > c$ szakaszt. Rajzoljunk az *O* pontból az *A* pontbeli érintővel párhuzamos félegyenest: *a.* Húzzuk meg azt az *A* ponton átmenő egyenest, amely a kört a *P,* az *a* párhuzamost az *F* pontban metszi úgy, hogy $PF = d$ legyen. Végül rajzoljuk meg az *OP* félegyenest, amely az érintőt az *E* pontban metszi. Ekkor az *APE és FPO* háromszögek hasonlósága miatt:

$EP : OP = AP : PF.$

Mivel pedig az

$$\widehat{AP} > AP \quad \text{és} \quad PF = d > c,$$

azért valóban:

$$EP : OP < \widehat{AP} : c.$$

Tekintve, hogy a műből kiválasztott érintőtétel szempontjából a hosszadalmasan bizonyított 8. tétel nem szükséges, azért helyette a 7. tételhez még egy kiegészítő tételt függesztünk. Így az eredeti 7. tétel nálunk a 7/1., a beiktatott pedig a 7/II. számozást viseli.

7/1. Az O középpontú körben az átmérőnél kisebb AB húrra állítsunk az O pontból merőlegest: *OM (118. ábra)*. Lehet az O pontból rajzolni olyan félegyenest, amely a kört a P pontban, az AB húr egyenesét az E pontban metszi úgy, hogy

$$EP : PB = d : e,$$

ahol a $d{:}e$ adott arány, amely nagyobb, mint a $BM : MO$ arány.
Igazolás: Rajzoljuk meg az O pontból az AB egyenessel párhuzamos egyenest**:** *a-t***.** Ezt a kör B pontjához tartozó érintője metszi a T pontban. Húzzuk meg az OB sugarat is. Mivel az OBM és TOB háromszögek hasonlók, azért

$$BM : MO = OB : BT.$$

A kikötés szerint

$$d : e > BM : MO,$$

azért

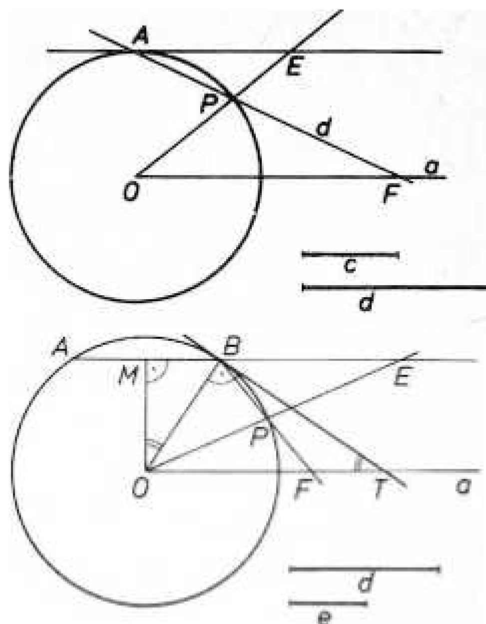
$$d : e > OB : BT.$$

Vegyünk most fel a BT-nél kisebb PF távolságot úgy, hogy a P pont a körön, az F pont az OT egyenesen legyen, és PF egyenese átmenjen a B ponton, valamint

$$OB : PF = d : e$$

legyen. Rajzoljuk meg az OP félegyenest is. Ez az AB húr egyeneséből kimetszi az E pontot. Az EPB és OPF hasonlóháromszög-párból:

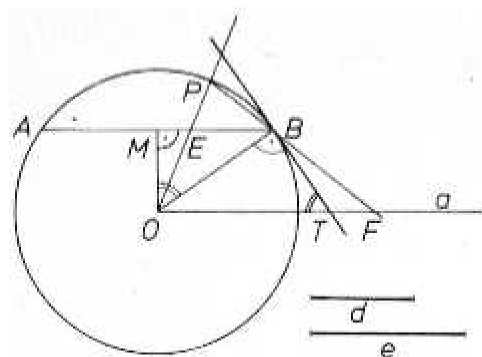
$$EP : PB = OP : PF = OB : PF = d : e.$$



117. ábra

118. ábra

Ekkor tehát



119. ábra

EP : *PB* = *d* : *e*, ahol *d* : *e* > *BM* : *MO*.

7/II. Az *O* középpontú körben az átmérőnél kisebb *AB* húrra

állítsunk az *O* pontból merőlegest: *OM (119. ábra)*. Lehet az O pontból rajzolni olyan félegyenest, amely a kört a *P* pontban, az *AB* húrt az *E* pontban metszi úgy, hogy $EP : PB = d : e$, ahol az adott $d : e$ arány kisebb, mint a $BM : MO$ arány.

Igazolás: Rajzoljunk az O pontból az AB-vel párhuzamos egyenest: *a*. Ezt a kör *B* pontbeli érintője metszi a *T* pontban. Húzzuk meg az *OB* sugarat is. Ekkor az *OBM* és *TOB* háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$BM : MO = OB : BT.$

Mivel

$d : e < BM : MO,$

azért

$d : e < OB : BT.$

Vegyünk fel most a BT-nél nagyobb *PF* távolságot úgy, hogy a *P* pont a körön, az *F* pont az *OT* egyenesén legyen, és a *PF* egyenese átmenjen a *B* ponton, valamint

$OB : PF = d : e$

legyen. Rajzoljuk meg az *OP* félegyenest is. Ez az *AB* húrt metszi az *E* pontban. Mivel az *EPB* és *OFP* háromszögek hasonlók, azért

$EP : PB = OP : PF = OB : PF = d : e,$

tehát

$EP : PB = d : e,$ ahol $d : e < BM : MO.$

Definíciók:

1. Ha a síkban a benne fekvő félegyenest a rögzített kezdőpontja körül állandó sebességgel forgatjuk és eközben egy pont a fix kezdőponttól indulva a forgó félegyenesen egyenletesen mozog, akkor ez a pont spirálist ír le a síkban.

2. A forgó félegyenes rögzített kezdőpontját a spirális kezdőpontjának nevezzük.

3. Azt a félegyenest, amelyből a forgó félegyenes forgását megkezdi, a spirális kezdő félegyenesének hívjuk.

4. Azt a távolságot, amelyet a félegyenesen mozgó pont az első fordulat közben megtesz, „első távolságnak” nevezzük. (Ez a pontnak a kezdőponttól való távolsága.) Azt a félegyenesen mért távolságot, amelyet a mozgópont a második fordulat alatt megtesz, „második távolságnak” hívjuk, és hasonlóan a további fordulatokban megtett távolságokat a fordulatok sorszáma szerint nevezzük el.

5. Azt a területet, amelyet az első fordulatban leírt spirálisív és az első távolság határol, „első területnek” nevezzük, amelyet a második fordulatban leírt spirálisív és a második távolság határol, „második területnek”, és rendre a többit is hasonlóan.

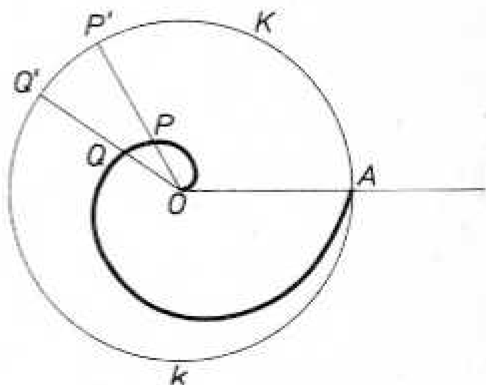
6. Ha a spirális kezdőpontjából egy félegyenest húzunk, akkor ennek azt az oldalát, amelybe a forgás iránya esik, „előreoldalnak”, és a másikat „hátraoldalnak” nevezzük.

7. Rajzoljunk a kezdőpont mint centrum körül kört, amelynek sugara az első távolság. Ezt nevezzük el „első körnek”; azt pedig, amelyet ugyanazon középpont körül rajzolunk, de kétszeres rádiusszal, „második körnek” nevezzük, és a következő köröket hasonlóan.

További tételek:

14. Ha a spirális kezdőpontja *O,* és az első spiráliskar két pontja *P* és *Q,* továbbá, ha az *OP* és *OQ* félegyenesek az első kört a *P',* illetve a *Q'* pontban metszik, végül, ha *OA* a spirális kezdő félegyenese, akkor

$$OP : OQ = \widehat{AKP'} : \widehat{AKQ'}.$$



120. ábra

Igazolás (120. ábra): Mialatt az *O* pont körül forgó *OA* félegyenesen az *A* pont egyenletes körmozgással leírja az *AKP',* illetve az *AKQ'* körívet, azalatt a spirálist leíró pont az *OA* félegyenesen egyenletes mozgással megteszi az *OP,* illetve az *OQ* távolságot. Így az 1. definíció értelmében

$$OP : OQ = \widehat{AKP'} : \widehat{AKQ'}.$$

15. Ha *P és Q* a spirális második fordulatán levő pontok, és *OP,* illetve *OQ* metszik az első kört a *P',* illetve a *Q'* pontban - mint a 14. tételnél -, és ha *c* az első kör kerülete, akkor:

$$OP : OQ = (c + \overparen{AKP'}) : (c + \overparen{AKQ'}).$$

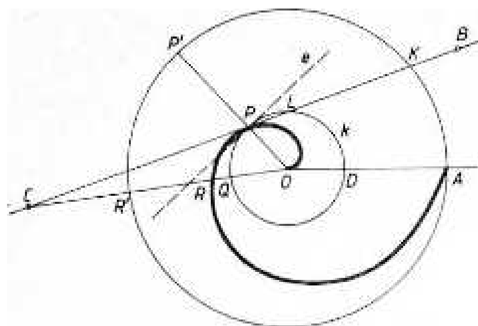
Igazolás: Amíg az *OA*-n mozgó pont leírja az OP távolságot, addig az *A* pont leírja az első kör kerületét meg az *AKP'* ívet, és amíg az *OA*-n mozgó pont megteszi az *OQ'* távolságot, addig az *A* pont leírja az első kör kerületét az *AKQ'* ívvel együtt. Az 1. definíció szerint:

$$OP : OQ = (c + \overparen{AKP'}) : (c + \overparen{AKQ'}).$$

Hasonlóan, ha P és *Q* a spirális n-edik karján van, akkor

$$OP : OQ = [(n-1)c + \overparen{AKP'}] : [(n-1)c + \overparen{AKQ'}].$$

16. Ha a spirális *P* pontjához tartozó érintőn kijelölünk egy tetszőleges *C* pontot az érintő „előreoldalán”, és egy *B* pontot az érintő „hátraoldalán”, akkor az *OPC* szög tompaszög, az *OPB* szög pedig hegyesszög *(121. ábra)*.



121. ábra

Igazolás: Tegyük fel, hogy a *P* pont a spirális első fordulatán van, és *OA* a kezdő félegyenes. Rajzoljuk meg az *O* centrumú, *OP* sugarú *k* kört. Ez metszi *OA-t* a *D* pontban. Ez a kör a P-től számított előreirányban az első spiráliskar „belsejébe” esik, és a hátrairányban azon kívül. Így a spirális rádiuszvektorai az előreirányban *OP*-nél hosszabbak, a hátrairányban pedig annál

rövidebbek. Ezért az *OPC* szög nem lehet kisebb, mint az *OP* és a *P* ponthoz tartozó *e* körérintő szöge, vagyis az *OPC* szög nem kisebb a derékszögnél.

Az *OPC* szög azonban nem lehet derékszög, mert tegyük fel, hogy az, akkor a *BC* egyenes a *P* pontban egyszersmind körérintő is. Így az 5. tétel értelmében lehet rajzolni olyan *OQ* félegyenest, amely a *P*-n átmenő kört Q-ban és az érintőt a C-ben metszi (legyen ez a tetszőleges *C* pont az előreoldalon) úgy, hogy

$$CQ : QO < \overset{\frown}{PQ} : c,$$

ahol *c* tetszőleges hosszúság. Legyen most $c = \overset{\frown}{DLP}$. Így

$$CQ : QO < \overset{\frown}{PQ} : \overset{\frown}{DLP}.$$

Ebből:

$$(CQ + QO) : QO < (\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{DLP}) : \overset{\frown}{DLP},$$

azaz

$$CO : QO < \overset{\frown}{DLQ} : \overset{\frown}{DLP}.$$

OC metszi a spirálist az *R* és az első kört az *R'* pontban, az *OP* meghosszabbítása pedig az első kört a P'-ben.

Mivel

$$\overset{\frown}{DLQ} : \overset{\frown}{DLP} = \overset{\frown}{AKR'} : \overset{\frown}{AKP'},$$

azért

$$CO : QO < \overset{\frown}{AKR'} : \overset{\frown}{AKP'}.$$

A 14. tétel szerint viszont

$$\overset{\frown}{AKR'} : \overset{\frown}{AKP'} = \overset{\frown}{DLQ} : \overset{\frown}{DLP} = \overline{OR} : \overline{OP},$$

tehát

$$CO : QO < OR : OP.$$

Utolsó egyenlőtlenségünk azonban nem lehet igaz, mert $QO = OP$ és $CO > OR$, tehát az a feltevés, hogy az *OPC* szög derékszög, nem volt helyes. Így viszont csak hegyesszög lehet.

(Ezután **Arkhimédész** a tételt általánosította arra az esetre, amelynél a *P* pont az n-edik fordulaton van, hivatkozva a 15. tétel általánosítási részére.)

18. Legyen *OA* a spirális kezdő félegyenese és *A* éppen a spirális első fordulatának a végpontja. Rajzoljunk az *A* pontban a spirálishoz érintőt, és állítsunk az *O* pontban az *OA*-ra merőlegest. A merőleges elmetszi az *A* pontbeli érintőt a *B* pontban.

Állítjuk, hogy az *OB* szakasz éppen az első kör kerületével egyenlő *(122. ábra). Igazolás:* Mivel a 16. tétel szerint az *OAB* szög hegyesszög, azért az érintő metszi az első kört még egy *C* pontban, és az előbbi, *OA*-ra állított merőlegest egy *B* pontban. Jelöljük az első kör kerületét c-vel. Igazolandó tehát, hogy $OB = c$.

a) Tegyük fel, hogy $OB > c$.

Mérjük fel ekkor *OB*-re a nála kisebb, de c-nél nagyobb *OD* távolságot. Az első körben az *AC* húr kisebb az átmérőnél, és teljesül, hogy $OA : OD > OA : OB$. Ha viszont *OE* merőleges *AC*-re, akkor az *AOB* és *AEO* hasonló háromszögekre tekintettel:

$OA : OD > 1/2AC : OE,$

és ezért a 7/1. tétel szerint létezik olyan *OPF* egyenes, amely metszi a kört a *P* pontban és *AC* meghosszabbítását az *F* pontban úgy, hogy

$FP : PA = OA : OD$

vagy

$FP : OA = PA : OD.$

Mivel $OA = OP,$ azért

$FP : OP = PA : OD,$

de $\widehat{PA} > \overline{PA}$ és $c < OD$, tehát

$$FP : OP < \widehat{PA} : c.$$

Innen:

$$(FP + OP) : OP < (c + \widehat{PA}) : c,$$

azaz

$$FO : OP < (c + \widehat{PA}) : c.$$

Ha a spirális az *OF* egyenesét a *Q* pontban metszi, akkor a 15. tétel szerint

$$OQ : OA = (c + \widehat{PA}) : c.$$

Ezt összehasonlítva az utolsó egyenlőtlenségünkkel:

$FO : OP < OQ : OA$.

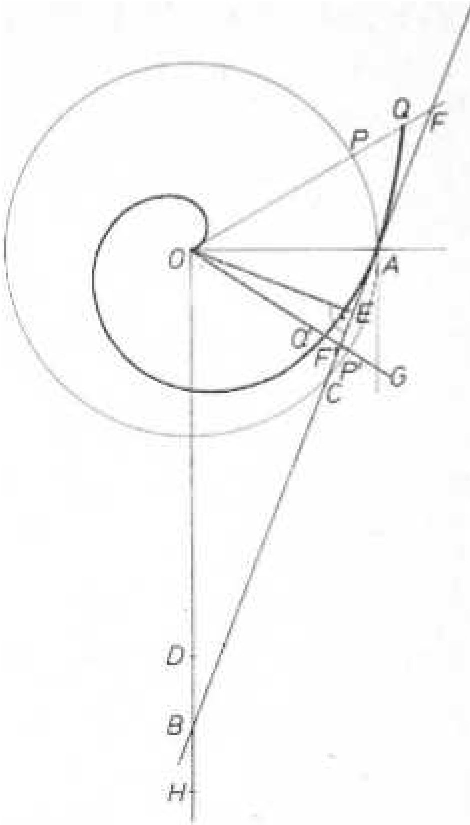
Mivel azonban $OP = OA$ és $FO > OQ$, azért a végeredményül kapott egyenlőtlenség nem teljesülhet. A kiinduló feltételezésünket tehát vissza kell vonnunk, azaz *OB* nem nagyobb c-nél.

b) Tételezzük most fel, hogy $OB < c$.

Mérjük fel ekkor az *OB* félegyenesre az *OH* távolságot, amelyre igaz, hogy $OH > c > OB$.

Ekkor, mivel $AO : OH < AO : OB$, illetve $AO : OH < 1/2AC : OE$,

ahol OE merőleges *AC*-re, azért a 7/II. tétel megengedi, hogy rajzolhassunk olyan *OF'P'G* egyenest, amelynek *P'* pontja a körön és *G* az



122. ábra

A ponthoz tartozó körérintő'n van úgy, hogy *F'P*': *AP'* = *OA : OH,* vagy

F'P': OA = *AP*': *OH,* és mivel *OA—OP',* azért

F'P': *OP'* = *AP*': *OH.*

Vegyük most tekintetbe, hogy

Ekkor

$$\overset{\frown}{AP'} > AP' \quad \text{és} \quad c < OH.$$

Átalakítva:

$$F'P' : OP' < \overset{\frown}{AP'} : c.$$

azaz

$$(OP' - F'P') : OP' < (c - \overset{\frown}{AP'}) : c,$$

$$OF' : OP' < (c - \overset{\frown}{AP'}) : c.$$

A 14. tétel értelmében

$$OQ' : OA = (c - \overset{\frown}{AP'}) : c,$$

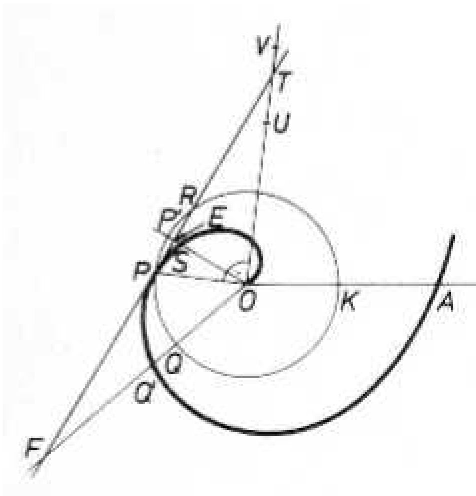
illetve

$$OQ' : OP' = (c - \overset{\frown}{AP'}) : c.$$

Ennek az utolsó egyenlőtlenségünkkel való összehasonlítása után azt nyerjük, hogy

$OF' : OP' < OQ' : OP'$.

Ez azonban lehetetlen, mert $OF' > OQ'$. A második feltételezésünk tehát szintén hamisnak bizonyult.



123. ábra

Mivel *OB* sem nagyobb, sem kisebb nem lehet c-nél, azért kell, hogy

azzal egyenlő legyen, azaz $OB = c$.

20. Legyen a P pont a spirális első fordulatán, és rajzoljunk az OP-re az O pontban merőlegest, amely a T pontban metszi a spirális P ponthoz tartozó érintőjét. Rajzoljuk meg az O középpontú, OP sugarú kört is. Ez metszi az első félegyenest a K pontban. Állítjuk, hogy az OT szakasz hossza akkora, mint a kör KP ívének a hossza, amely a spirális hátrairányában helyezkedik el.

Igazolás (123. ábra): A 16. tétel szerint az OPT szög hegyesszög. Ezért az érintő az OP sugarú kört metszi még egy R pontban és az OT egyenest a T pontban. Ha OT nem egyenlő a KRP spirálisívvel, akkor vagy nagyobb, vagy kisebb nála.

a) Tételezzük fel először, hogy

$$OT > \overset{\frown}{KRP}.$$

Mérjük fel ekkor OT-re az OU szakaszt, amely legyen kisebb OT-nél, de nagyobb a KRP ívnél.

Mivel $PO : OU > PO : OT$ vagy $PO : OU > 1/2PR : OE$, ahol OE merőleges PR-re, azért a 7/I. tétel szerint rajzolhatunk egy olyan OQF félegyenest, amelynek Q pontja az OP sugarú körön és F pontja a PR érintőn van, és amelyre igaz, hogy $FQ : QP = OP : OU$, vagy $FQ : OP = QP : OU$.

Az aránypárban OP helyett OQ-*t* írhatunk, tehát $FQ : OQ = QP : OU$.

A feltevés szerint:

$$FQ : OQ < \overset{\frown}{OP} : \overset{\frown}{KRP}.$$

Átalakítva:

$$(FQ + OQ) : OQ < (\overset{\frown}{QP} + \overset{\frown}{KRP}) : \overset{\frown}{KRP}$$

vagy

$$OF : OQ < \overset{\frown}{KRQ} : \overset{\frown}{KRP}.$$

Legyen az OQF félegyenes és a spirális metszéspontja Q'. Ekkor a 14. tétel szerint:

$OF : OQ < OQ' : OP.$

Ez az eredmény azonban - tekintve hogy $OQ = OP$ és $OF > OQ'$ - lehetetlen. Az ellentmondás miatt az eredeti feltevés hibás, azaz *OT* nem nagyobb, mint *KRP*.

b) Tegyük fel másodszor, hogy $OT < KRP$.

Most az *OT*-re olyan *OV* távolságot mérjünk, amelyre igaz, hogy

$$OV > \overset{\frown}{KRP} > OT.$$

Ekkor $OP : OV < OP : OT = 1/2PR : OE,$ és ezért a 7/II. tétel szerint tudunk rajzolni olyan *OEP'* félegyenest, amelynek a *P'* pontja a körön és az *E* pontja a *PR* húron van úgy, hogy

$EP' : PP' = OP : OV,$ vagyis $EP' : OP = PP' : OV.$

Mivel azonban

$OP = OP'$ azért $EP' : OP' = PP' : OV.$

Így

$$EP' : OP' < \overset{\frown}{PP'} : \overset{\frown}{KRP}, \quad \text{hiszen} \quad \overset{\frown}{PP'} > PP' \text{ és } \overset{\frown}{KRP} < OV.$$

Átalakítás után:

$$(OP' - EP') : OP' < (\overset{\frown}{KRP} - \overset{\frown}{PP'}) : \overset{\frown}{KRP},$$

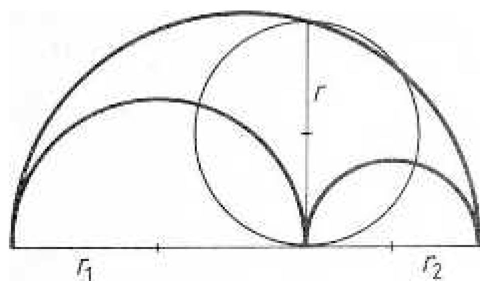
illetve

$$OE : OP' < \overset{\frown}{KRP'} : \overset{\frown}{KRP}.$$

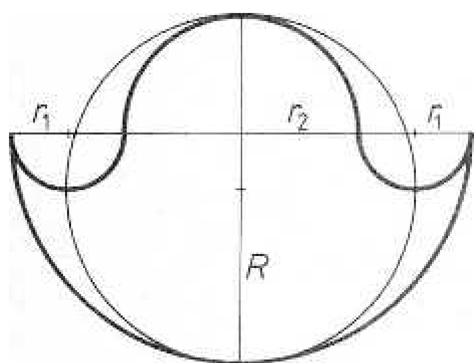
A 14. tétel alapján viszont: és így

$$OS : OP = \overset{\frown}{KRP'} : \overset{\frown}{KRP},$$

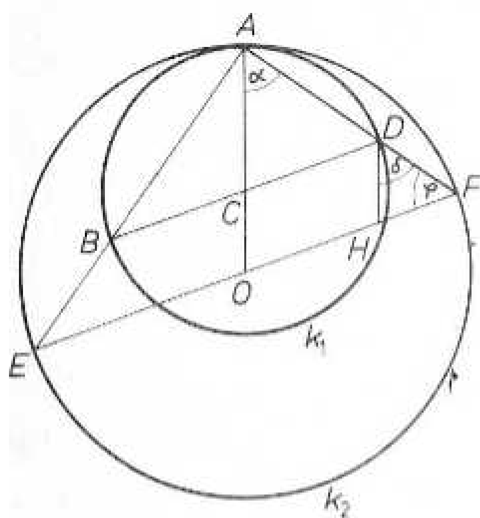
$OE : OP' < OS : OP,$



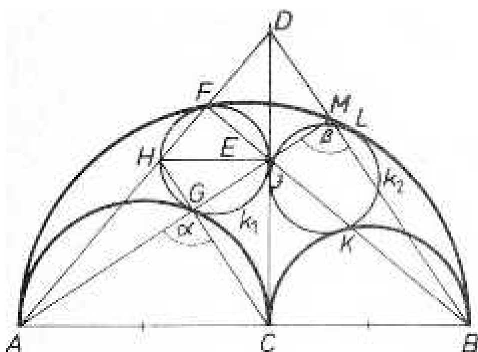
124. ábra



125. ábra



126. ábra



127. ábra

ami pedig lehetetlen, mert $OP' = OP$ és $OE > OS$. Tehát a kiinduló feltevésünk most sem bizonyult helyesnek. Egyetlen lehetőség maradt, hogy $OT = KRP$.

Szokás a spirális érintőjére most bemutatott tételsorozatot a differenciálszámítás előfutárának tekinteni. Ez a megállapítás kissé túlzásnak tűnik ugyan, mégis el kell ismernünk, hogy **Arkhimédész** a geometriai egyenlőtlenségekkel való mesteri bánásmóddal olyan érintőfeladatot oldott meg, amellyel utána századok elteltével csak a differenciálszámítás tudott megbirkózni.

Arkhimédész *Lemmák könyve* című könyvecskéje a matematikatörténet szempontjából nem jelentős alkotás. E mű inkább a nagy mester kedves játékának tekinthető, de ebben a minőségében is magán viseli a lángész ragyogását. A *124.* és *125. ábrán* látható két síkidomra állapított meg néhány érdekes tételt. Az első idomot „arbelosz”-nak, holdkésnek nevezte. Állítólag a tímárok használtak ilyen alakú kést a bőr kikészítésénél. A másik elnevezését magyarázza a síkidom alakja: sótartó, azaz „szalinon” a neve. E két síkidomra vonatkozik az a középiskolai tankönyvekből ismert két tétel, hogy a három félkör által határolt „holdkés” területe éppen az ábra szerinti $r^2\pi$; a négy félkörrel bezárt „sótartó” területe pedig $R^2\pi$. E két alakzatra azonban az ókori mester ennél meglepőbb megállapításokat is tett. Szabad legyen ezek közül legalább egyet bemutatni. Ezt előkészítendő ismerjük meg a dolgozat első tételét is.

Eszerint, ha két kör érinti egymást az *A* pontban *(126. ábra),* és ha e körökben a *BD* és *EF* egy-egy párhuzamos átmérő, akkor az *ADF* egyenesszakasz. Legyen az *A* pontban érintkező körök két középpontja *O* és *C.* A két centrumot összekötő egyenes éppen átmegy az érintkezési ponton. Rajzoljunk két, egymással párhuzamos tetszőleges átmérőt: *BD* || *EF.* Tüntessük fel az *AD* és *DF* szakaszokat is. Végül húzzuk meg az OA-val párhuzamos *DH* szakaszt. Mivel az *OHDC* négyszög paralelogramma, azért $DH = CO$. Ugyanezért: $OH = CD = CA$. Ugyanakkor: $OF = OA$.

A két utóbbi egyenlőségből következik, hogy $OF — OH = OA — CA$, azaz $HF = CO$.

Mivel $CO = HF$ és $CO = DH$, azért $HF = DH$, tehát a *HFD* háromszög egyenlő szárú, és így $\delta = \varphi$. Az *OFA* háromszög azonban szintén egyenlő szárú, tehát $\alpha = \varphi$. Ezek szerint $\alpha = \delta$, és minthogy *DH* párhuzamos *AO-v*al, azért kell hogy az α szög *AD* szára ugyanazon egyenesbe essék, mint a δ szög *DF* szára. Az *A, D* és *F* pontok tehát valóban egy egyenesre illeszkednek.

A bizonyítás hasonlóan megy abban az esetben is, amelyben a két kör kívülről érintkezik.

A *Lemmák könyvé*nek 5. tétele: Az arbeloszban *(127. ábra)* állítsunk a *C* pontban az *AB* átmérőre merőlegest. Rajzoljuk be a két nagyobbik félkört és a merőlegest egyszerre érintő k_1 kört. Ez érint az *F, G és E* pontokban. Ezután rajzoljuk meg a legnagyobb és legkisebb félkört, valamint a merőlegest érintő k_2 kört. Ez érint a *J, K* és *L* pontokban. Állítjuk, hogy a k_1 és a k_2 körök egybevágók. *Igazolás:* Tüntessük fel a k_1 körnek az *AB-vel* párhuzamos *HE* átmérőjét. Az 1. tétel szerint az *A, H* és *F* pontok egyazon egyenesre esnek. Ugyancsak egy egyenesen vannak az *F, E* és *B* pontok is. Szintén a segédtételünk értelmében egy egyenesre illeszkedik az *A, G* és *E,* valamint egy másik egyenesre a C, *G* és *H* pont.

Az *AF* és *CE* egyenesek közös pontja legyen *D.* Az *AE* egyenese metszi a nagy félkört az *M* pontban. Húzzuk meg végül a *BM* és *MD* szakaszokat is.

Mivel *BF* merőleges *AF*-re, és *CD* az *AC*-re, azaz *BF* és *DC* az *ABD*

háromszög két magassága, azért *E* a háromszög magasságpontja. Ebből következik, hogy az *ABD* háromszögnek az *AE* is magassága, vagyis merőleges a *BD* szakaszra. Vegyük még figyelembe, hogy az *AMB* szög derékszög. E két utóbbi megállapítás alapján *M* rajta van nemcsak a *BLA* félkörön, hanem a *BD* egyenesen is, tehát a *D, M* és *B* pontok is egyazon egyenesre esnek.

Tekintettel arra, hogy α és β derékszögek, *BM* párhuzamos CG-vel. A párhuzamos szelők tétele alapján tehát:

AB : *BC* = *AD : DH.*

Az *ACD* és *HED* hasonló háromszögekből viszont *AD : DH* = *AC : HE,* tehát

AB : *BC* = *AC : HE*

vagy

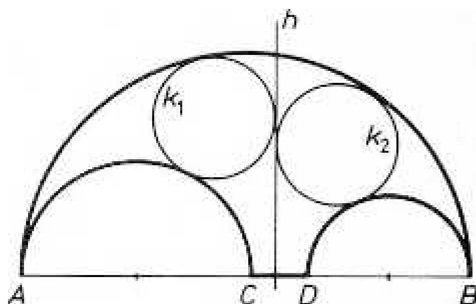
*AC*BC* = *AB*HE.*

A k_1 kör átmérője: *HE=(AC*BC)/AB* tehát csak az *A, B* és *C* pontok helyzetétől függ.

Ugyanígy látható be, hogy a k_2 kör átmérője is

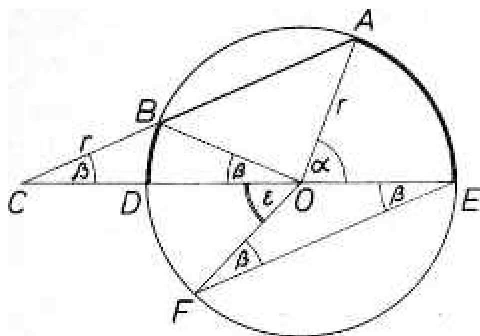
$\frac{AC \cdot BC}{AB}$-vel

egyenlő, vagyis a két kör valóban egybevágó.

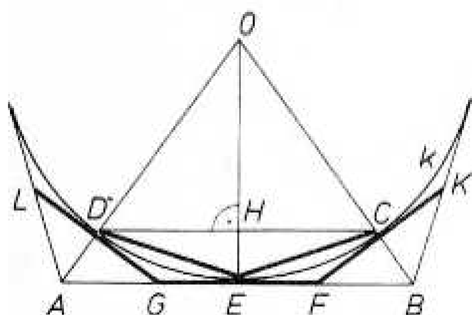


128. ábra

(Az érdekesség kedvéért megemlítem, hogy e tétel a következő általánosítással is igaz: Az *AB* átmérőn válasszunk ki tetszőleges két pontot a *128. ábra* szerint. Legyenek ezek az ábra *C* és *D* pontjai. Az *AC* átmérőhöz rajzolt körnek és a *DB* átmérőjű körnek húzzuk meg a *h* hatványvonalát. Az ábrán feltüntetett k_1 és k_2 érintő körök most is egybevágók. Ennek igazolása a középkori AL-KARHI arab matematikus nevéhez fűződik.



129. ábra



130. ábra

Érdemes kissé még elidőzni a könyvecske 8. tételénél is. Ez valójában általánosítása, illetve megfordítása a 120. oldalon olvasott szögharmadolási feladatnak. A tétel így hangzik:

Legyen *AB* az *O* centrumú kör átmérőjénél kisebb tetszőleges húrja *(129. ábra).* Ezt hosszabbítsuk meg a *B* ponton túl a kör sugarával a *C* pontig. A *CO* egyenes kimetszi a körből a C-hez közelebbi *D* és a C-től távolabbi *E* pontot. Ekkor az $AE = 3BD$, vagy ami ugyanaz: $\alpha = 3\beta$.

Igazolás: **Arkhimédész** megrajzolta az *E* végpontú és *AB-vel* párhuzamos *EF* húrt, valamint az *EFO* egyenlő szárú háromszöget, és így okoskodott: Az *OBC* háromszög egyenlő szárú, tehát az *r* szárakkal szembeni szögek egyenlők. Jelöljük mindkettőt β-val. A *BCO* és *OEF* szögek váltószögek, tehát egyenlők, és így az *EFO* háromszög egyenlő szögeit is β-val jelölhetjük. Az *EFO* háromszög ε-nal jelölt külső szöge tehát: $\varepsilon = 2\beta$. Így a kör *BF* ívéhez tartozó középponti szög 3β, de ez ugyanakkora, mint az *AE* ív középponti szöge, tehát valóban $\alpha = 3\beta$.

A 120. oldalon nem az *AB* húrhoz szerkesztettük meg az α szöget, hanem fordítva, az α szöghöz az *AB* húrt, illetve az ezzel adódó β szöget. A *Lemmák könyve* 8. tételének ábráját nyerhetjük euklideszi szerkesztéssel, a megfordításnál azonban az *AB* húr, illetve a *C* pont csak „neuszisz” szerkesztéssel adódik.

Arkhimédész egyik igen szép gondolatmenete a π közelítő értékének meghatározása, amit *A kör mérése* című tanulmányában olvashatunk. Célját a szabályos 96 oldalú sokszög kerületének a kiszámításával érte el a következőképpen:

A *130. ábrán* látható az *r* sugarú *k* körbe írt, szabályos n-oldalú sokszög egy középponti háromszöge: *DCO,* és a kör köré rajzolt szabályos *n*-szög egy középponti háromszöge: *ABO.* A beírt sokszög egy oldalát jelöljük a_n-nel, és a körülírt sokszögét A_n-nel. Az ábrán látható még a beírt és körülírt szabályos 2*n* oldalú sokszög egy részlete is. Ezek oldalait jelöljük rendre a_{2n}-nel és A_{2n}-nel. Tehát $DC = a_n$, $AB = A_n$; $DE = EC = a_{2n}$ és $GF = FK = A_{2n}$.

A *BCF* és *BEO* hasonlóháromszög-párból:

$$\frac{A_{2n}}{2} : \frac{A_n - A_{2n}}{2} = r : OB,$$

illetve:

$$A_{2n} : (A_n - A_{2n}) = r : OB.$$

A *BEO* és *CHO* hasonló háromszögekből:

$$\frac{a_n}{2} : \frac{A_n}{2} = r : OB, \quad \text{azaz} \quad a_n : A_n = r : OB.$$

A két aránypárból következik a harmadik:

$A_{2n} : (A_n - A_{2n}) = a_n : A_n$, ahonnan

$$A_{2n} = \frac{a_n A_n}{a_n + A_n}. \qquad (1)$$

Végül a *CED* és *CFE* háromszögek hasonlósága miatt:

$a_n : a_{2n} = a_{2n} : (A_{2n})/2$, ahonnan

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{a_n A_{2n}}{2}}. \qquad (2)$$

A sokszögek kerületei tehát:

$k_n = na_n$, $K_n = nA_n$, $k_{2n} = 2na_{2n}$ és $K_{2n} = 2nA_{2n}$.

Az (1) és (2) figyelembevételével:

$$K_{2n} = 2nA_{2n} = \frac{2na_n nA_n}{na_n + nA_n} = \frac{2k_n K_n}{k_n + K_n}$$

és

$$k_{2n} = 2na_{2n} = \sqrt{na_n 2nA_{2n}} = \sqrt{k_n K_{2n}}.$$

Ezekből a kerületekből és az oldalszámok további duplázásával keletkezett sokszögek kerületeiből egy érdekes sorozat állítható össze:

$K_n, k_n, K_{2n}, k_{2n}, K_{4n}, k_{4n}, K_{8n}, k_{8n}, \ldots$

Ezt a sorozatot arkhimédészi sorozatnak nevezik. Képzési szabálya szerint a harmadik elemétől kezdve minden páratlan sorszámú elem a közvetlen előtte álló két elem harmonikus közepe, és minden

páros számú elem a közvetlenül előző kettőnek a mértani középarányosa. **Arkhimédész** az r sugarú körbe írható szabályos hatszögből indult ki. Ekkor $K_6=4r\sqrt{3}$ és $k_6=6r$. Az egyszerűség kedvéért legyen $r=1$, és ekkor $K_6=4\sqrt{3}$ és $k_6=6$. A hatszögekhez tartozó kör kerületére pedig igaz, hogy $4\sqrt{3} = 2\pi > 26$ vagy $2\sqrt{3}>\pi>3$.

Arkhimédész tehát a K_6 és a k_6 első két elemből kiszámította a róla elnevezett sorozat elemeit egészen a K_{16n} és k_{16n} elemekig, vagyis a K_{96} és k_{96} kerületekig. Így π értékét két korlát közé szorította:

$$\frac{K_{96}}{2}>\pi>\frac{k_{96}}{2}.$$

Számítás közben a kerületekben fellépő $\sqrt{3}$ értékét az

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$$

egyenlőtlenséggel becsülte meg. Ezt azonban nem tudjuk, honnan vette, bizonyára valamelyik, általunk nem ismert művéből. Végül is a következő becsléshez jutott:

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

Ez tizedes törtekkel:

$3{,}140\,845 < \pi < 3{,}142\,8571.$

(Zsebszámológéppel, a 96 oldalú sokszögekig számolva, a következő eredményt kaptam: $3{,}141\,0381 < \pi < 3{,}142\,7146$.)

A $\sqrt{3}$ két érték közé szorítása alkalmat ad arra, hogy röviden áttekintsük a lánctörtek fejlődését. A $\sqrt{3}$-at közrefogó két érték ugyanis arról árulkodik, hogy **Arkhimédész** a $\sqrt{3}$-at meg tudta közelíteni a „lánctörtek módszerével”.

Már a 23. oldalon láttuk, hogy a négyzetgyök kiszámítására

Mezopotámiában ismerték a

$$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}$$

közelítést. Ehhez a becsléshez az ott ismertetett iterációs eljáráson kívül másként is eljuthatunk. Vezessük be a következő jelölést: legyen

$$\sqrt{a^2+b}=a+x.$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$x(2a+x)=b$,

ahonnan

$$x=\frac{b}{2a+x}$$

Ha most a jobb oldalon a nevezőben szereplő x helyett folytatólagosan behelyettesítjük a

$$\frac{b}{2a+x}$$

kifejezést, akkor a

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\dots}}}}$$

végtelen lánctörtet kapjuk. A babiloni „formula” nyilván ennek az első közelítő törtje: $a+$ (b/2a).

A √2 és a √3 lánctörtjei:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

és

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\dots}}}$$

A √2 közelítő törtjei:

$$1=\frac{1}{1};\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5};\quad \frac{17}{12};\quad \frac{41}{29};\quad \frac{99}{70};\quad \dots$$

A √2 ezen közelítő törtjeit megtaláljuk a szmürnai THÉONnál. A √2 ≈ 7/5 értéket ismerte PLATÓN, és a √2√ ≈ 17/12 közelítést használta HÉRÓN is.

Ha felírjuk a √3 lánctörtjének közelítő törtjeit, akkor a következő sorozatot kapjuk:

$$1;\ 2;\ \frac{5}{3};\ \frac{7}{4};\ \frac{19}{11};\ \frac{26}{15};\ \frac{71}{41};\ \frac{97}{56};\ \frac{265}{153};\ \frac{368}{209};\ \frac{989}{571};\ \frac{1351}{780};\ \dots$$

Ebben a sorozatban felismerhetjük azt a két törtet, amellyel ARKHIMÉDÉSZ közrefogta a √3-at:

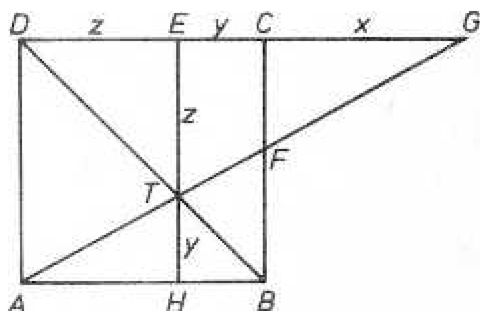
$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}.$$

Ezek a megfigyelések azt valószínűsítik, hogy az ókori görög matematikusok már ki tudták számítani a

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}$$

végtelen lánctört közelítő törtjeit, természetesen a fogalom és a ma használt formalizmus ismerete nélkül.

Ugyancsak gyökvonásra használták a „lánctörtek módszerét” a középkori arabok (al-Hajjám), az itáliai Luca Pacioli, a bolognai Pietro Cataldi (1552-1626) és Raffaello Bombelli is. Lehet, hogy Cataldi és Bombelli műveiből ismerte meg a lánctörteket az angol William Brouncker (1620-1684) és John Wallis. Nagy lépéssel vitte előre a lánctörtek használatát Huygens, aki felfedezte a közelítő törtek néhány fontos tulajdonságát. A lánctörtek rendszeres elméletét Euler dolgozta ki az 1784-ben megjelent *Bevezetés a végtelen kicsinyek analízisébe* című könyvének előkészítő részében.



131. ábra

A végére tartogattam Arkhimédész egy kis tanulmányát, amelyet művei sorában csodás csillogású gyöngyszemnek tekinthetünk. Azt, hogy megmaradt *A szabályos hétszög szerkesztése,* Szábit ibn KURRÁnak köszönhetjük. Ez a neves arab matematikus a IX. században még olvashatta ARKHMÉDÉSZnek igen elrongyolódott,

görög nyelvű kis könyvét, amelyet arabra fordított. E fordításban a szabályos hétszög szerkesztését a következőképpen olvashatjuk: Rajzoljuk meg az *ABCD* négyzet *BD* átlóját, és hosszabbítsuk meg a *DC* oldalát a *C* ponton túl *(131. ábra).* Ezt a meghosszabbítást metsszük el képzeletben az *ATFG* egyenessel úgy, hogy az *ATB* háromszög területe legyen egyenlő a *CFG* háromszög területével.

Rajzoljuk meg végül a *DC* oldalra merőleges *ETH* szakaszt.

Az *ETG* és *CFG* háromszögek hasonlósága miatt:

$CF : x = z : (x+y)$.

Ebből:

$$CF=\frac{x \cdot z}{x+y}. \qquad (1)$$

A *TEG* és az *AHT* háromszögek is hasonlók, tehát:

$(x+y) : z = z : y$,

vagyis

$z^2 = y(x+y)$. (2)

A rajz szerint az *ATB* és a *CFG* háromszögek területe egyenlő, tehát:

$(y+z)y = x*CF$,

vagy figyelembe véve az (1) összefüggést: $(y+z)y = (x^2z)/(x+y)$, ahonnan:

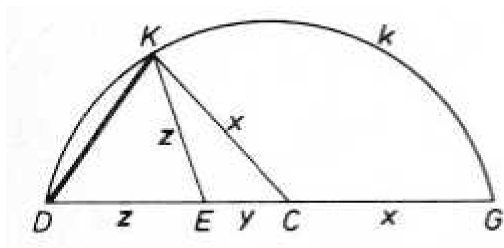
$$y+z=\frac{x^2z}{(x+y)y}.$$

Ha a nevező helyett z^2-et írunk, amit a (2) egyenlőség megenged, akkor

$y+z=x^2/z$

vagy

$(y+z)z = x^2$. (3)



132. ábra

Szerkesszük meg most az $y = EC$ szakasz fölé az *x,* y, z oldalú *ECK* háromszöget, és szerkesszük meg a *DKG* háromszög köré írható kört is *(132. ábra).* Ekkor - állítja **Arkhimédész** - a *DK* szakasz éppen a *k* körbe rajzolható szabályos hétszög egyik oldala.

Ezt a meglepő kijelentést **Arkhimédész** nem indokolta meg. Így e feladattal kapcsolatban két kérdés maradt nyitva. Az egyik az: hogyan lehet a *131. ábrán* megrajzolni az *ATFG* egyenest úgy, hogy az *ATB* háromszög területe akkora legyen, mint a *CFG* háromszögé? A másik, még feleletre váró kérdés, hogy milyen alapon jelentette ki **Arkhimédész** a *DK* szakaszról, hogy az éppen a *k* körbe rajzolható szabályos hétszög oldala?

Talán nem járunk messze a valóságtól, ha az első probléma megoldásánál a kúpszeletekkel való szerkesztésre gondolunk. Jelöljük ugyanis az *ABCD* négyzet egy oldalát a-val, azaz legyen $y+z=a$. Ekkor a (2) és (3) egyenlőségek a $z = a—y$ helyettesítés után az

$(x+y)y = (a-y)^2$

és

$a(a—y)=x^2$

alakot nyerik. A derékszögű koordináta-rendszerben az első egy hiperbolának, a második egy parabolának az egyenlete, amelyek a középiskolában megszokott alakban:

$y(x+2a)=a^2$

és

$$y=-\frac{x^2}{a}+a.$$

Ezek görbéi a *133. ábrán* láthatók. E két kúpszelet három metszéspontjából az első negyedbe eső *P* pont koordinátái szolgáltatják az *x* és *y* értékeket. Ezekkel már az *ATFG* egyenes megrajzolható.

A második, még válasz nélküli kérdésre a körbe írható szabályos hétszög átlóinak tanulmányozása adhat feleletet. Egy olyan szabályos hétszöget képzeljünk el a *134. ábrán,* amelynek a *DG* átlója éppen $(x+y+z)$ hosszú. Rajzoljuk meg a *KM, KN, KG* és *DN* átlókat is. A keletkezett metszéspontok: *E, C* és *P.* A körülírt kör centruma: *O.*

Vezessük be a következő jelöléseket: A szimmetriaviszonyok alapján

$DE=EK=z$ és $CG=CK=x.$

Legyen továbbá $EC=y.$

Kérdés, hogy a *134. ábrán* szereplő *x, y és z* azonosak-e a *131. ábrán* látható *x, y és z* szakaszokkal, vagyis fennáll-e közöttük a (2) és (3) alatti

$z^2=y(x+y)$

és

$x^2=z(y+z)$

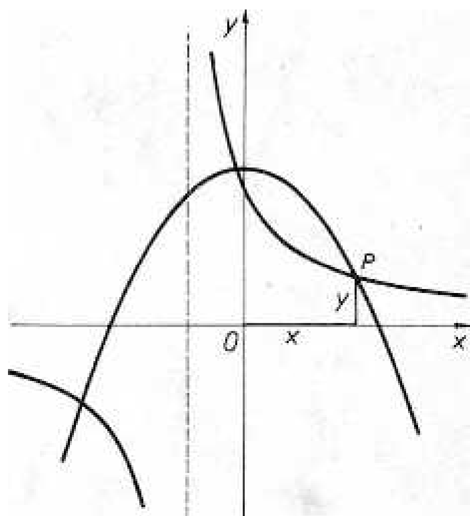
két összefüggés?

A szögek vizsgálata alapján észrevehető, hogy az *EKG, az EKC* és a *CKP* háromszögek hasonlók. Az első kettőből:

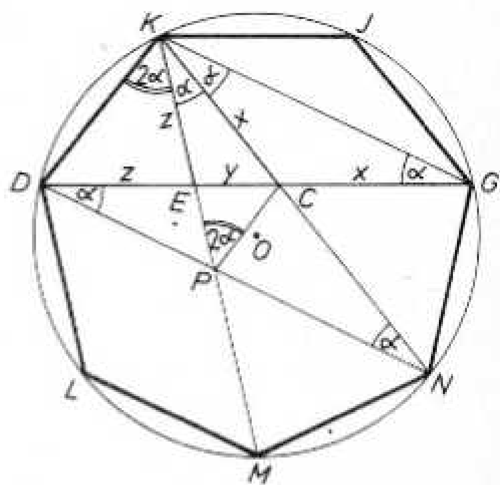
$(x+y):z = z:y$, azaz $z^2=y(x+y).$

A második két háromszögből:

$(y+z):x=x:z$, tehát $x^2=z(y+z)$.



133. ábra



134. ábra

Amint láthatjuk, a szabályos hétszögben jelölt *x,y és z* kielégítik a *131. ábrán* feltüntetett *x,y és z* közötti összefüggéseket, tehát a

132. ábra DK szakasza valóban a szóban forgó szabályos hétszög oldala.

Talán mondanom sem kell, hogy a felsorolt néhány példával még nem merítettem ki **Arkhimédész** minden említésre méltó eredményét, de remélem, hogy a kiszemelt gondolatmenetek már meggyőzhetnek bennünket arról, hogy méltán tekintjük ARKHIMÉDÉSZT az ókor legnagyobb matematikusának. Csodálatunkat csak növeli az a tény, hogy ő nem volt birtokában azoknak az áttekintést, megfogalmazást és számolást könnyítő eszközöknek, amelyekkel mi már rendelkezünk. Nem élhetett az algebrai jelölések előnyével, kénytelen volt minden algebrai jellegű feladatát geometriai formában megoldani. Még a helyi értékes 10-es alapú számrendszer számolástechnikai segítségét sem élvezhette, nem beszélve például az általunk sokszor igénybe vett koordinátageometriai módszerről. Eredményei és módszerei mégis sok száz évre megtermékenyítették a matematikai kutatásokat. Az integrálszámítás csíráit az ő terület- és térfogatszámításában találhatjuk meg először, és a differenciálszámításra kell gondolnunk, ha a spirális érintőjére vonatkozó tételeit olvassuk. Szabatosságban, a bizonyítás szigorában majd 2000 évig nem akadt párja. Igazat kell adnunk LEIBNIZnek - akit NEWTONnal együtt a differenciál- és integrálszámítás felfedezőjének szoktunk tekinteni amikor azt mondja: „Arkhimédész és Apollóniosz munkáit tanulmányozva, nem fogod csodálni a mai matematikusok sikereit.”

A PERGÉI APOLLÓNIOSZ (i. e. 260?-190?)

Szülőhazáját, a kisázsiai Pamphiliát az Arkádiából és Ciprusról betelepedő görögök alapították. A tartomány elnevezése (pan = minden, filé = néptörzs) is mutatja, hogy Pamphilia lakossága több népfajból ötvöződött egy nagyobb egységbe. Négy-öt jelentős városának lakói szenvedélyes hajósok voltak, virágzó kereskedelmet bonyolítottak le, és mellékesen kicsit kalózkodtak is. A hajózásra, illetve a kereskedelemre rá voltak kényszerítve, hiszen termőföldjük alig volt. Egyik nagyobb városuk, Pergé a Kesztrosz folyó jobb partján épült. Forgalmát segítette, hogy a folyó torkolatától mintegy 10 km távoli város jól kiépített, nagyszerű kikötővel rendelkezett. Az i. e. 260. év táján ebben, a híres Artemisz-templomhoz közeli városban született **Apollóniosz,** az ógörög matematika

aranykorának időrendben utolsó nagy alakja.

Születésekor már létezett a Pergamoni Királyság, amely nemsokára fennhatósága alá vonta Pamphiliát is, több más görög tartománnyal együtt. Ügyes politikával mindig meg tudta őrizni függetlenségét abban a területszerző háborúskodásban, amely **Nagy Sándor** hirtelen halála után tört ki tábornokai, a diadokhoszok (örökösök) között. Pergamon királyai, különösen **I. Eumenész** (i. e. 263-241) és **I. Attalosz** (i. e, 241-197) gazdagságuk egy részét arra fordították, hogy a királyság székhelyén, Pergamonban (most a török Bergama) Alexandria és Athén mintájára nagy művészeti és tudományos központot hozzanak létre. Az Attalidák összegyűjtötték a görög világ legjobb szobrászait, hogy azok csodálatos alkotásaikkal ékesítsék a gyönyörű templomokkal, palotákkal díszes és nagy színházzal, valamint hatalmas oszlopcsarnokos könyvtárral ellátott fővárost. Ekkor épült a világhírű Zeusz-oltár is. Az azt átölelő dombormű a gigászok és az istenek harcát (gigantomakhia) ábrázolja a galaták elleni győzelem allegóriájaként, a klasszikus görög művészettől szokatlan mozgalmassággal (pergamoni barokk). A relief mintegy száz alakját a legkiválóbb hellén szobrászok komponálták csodálatos egységbe. Az oltárt ma a berlini Pergamon Múzeumban láthatjuk. A romjaiban is lenyűgöző alkotást 1873-ban ásatta ki a török szolgálatban álló német mérnök: KARL HUMANN. A török kormány jóváhagyásával I. VILMOS hadihajója szállította Berlinbe a szétdarabolt, gondosan megszámozott, 462 ládába csomagolt műalkotást. Bergama sikátoraiban ma hiába keresnénk a néhai dicső Pergamon pompás palotáit, 200 000 kötetes könyvtárát. Pergamonnak talán egyetlen műemléke sem maradt a helyén. Európa különböző múzeumai őrzik a büszke múlt emlékeit, ha ugyan el nem pusztultak az idők viharában.

Az ifjú APOLLÓNIOSZ még rótta a Kaikosz folyó melletti Pergamon gyönyörű utcáit, tereit. Itt tette meg első lépéseit a tudomány, nevezetesen a csillagászat területén is. Aztán ebből a születőben levő kultúrközpontból őt is elcsábította a már patinásnak számító Alexandria, ahol a nagy költőnek, KALLIMAKHOSZnak könyvtárigazgatói székében akkor már annak tanítványa, ERATOSZTHENÉSZ ült, aki élénk levelezést folytatott ARKHIMÉDÉSSZEL. Nem sokkal APOLLÓNIOSZ megérkezése előtt

mondott búcsút Alexandriának a rhodoszi APOLLÓNIOSZ, aki azonban nem matematikus, hanem költő volt, az *Argonautiká*nak, ennek a nagy mitológiai eposznak a szerzője. Egyiptom uralkodója, a Muszeion patrónusa akkor PTOLEMAIOSZ EUERGETÉSZ vagy PTOLEMAIOSZ PHILOPATOR lehetett. A fiatal APOLLÓNIOSZnak mindenesetre volt alkalma tanulni EUKLEIDÉSZ tanítványaitól, de ő tanítványból csakhamar mesterré lépett elő, amikor új elmélettel lepte meg az alexandriai csillagászokat. Továbbfejlesztette a Hold mozgására vonatkozó tanításokat. Ennek köszönhette első, közkedveltségét is tükröző melléknevét. Epszilonnak nevezték el, mert ez a görög betű a holdsarlóra emlékeztetett. Ekkor tehát már nem csupán tanult, hanem tanított is. Itt kezdett dolgozni élete fő művén: a kúpszeletek elméletén.

Hosszas alexandriai működése után visszatért szülővárosába. Itt, Pergében vezette haláláig a matematikai iskolát, és itt fejezte be a Muszeionban megkezdett *Kónikát,* a kúpszeletekről szóló nyolckötetes könyvét. Igen valószínűnek látszik, hogy hosszabb ideig tartózkodott Pergamonban is. Ezt a feltevést valószínűsíti, hogy nagy művének egy részét magának I. ATTALOSZ pergamoni királynak ajánlotta, aki nagy érdeklődéssel kísérte a *Kónika* megírását.

Ezzel a munkával érdemelte ki a „nagy geométer” (megász geometrész) nevet, és léphetett méltán az ókor legnagyobb matematikusainak a sorába. A kúpszeletek tárgykörében olyan nagyszerűt alkotott, hogy még a XVII. századi FERMAT és DESCARTES sem tudták lényegesen felülmúlni. A *Kónika* hatalmas összefoglaló könyv, amely nemcsak tárgyalja a kúpszeletekről már eladdig megismert tételeket, hanem számos új felfedezéssel gazdagítja is a régi ismereteket, sőt ezenfelül is adott valami olyan többletet, amely évszázadokra kijelölte a geometria egyik ágának fejlődési irányát. Ez pedig a kúpszeletek tárgyalásmódjának egységes szelleme, a koordinátageometriai módszer.

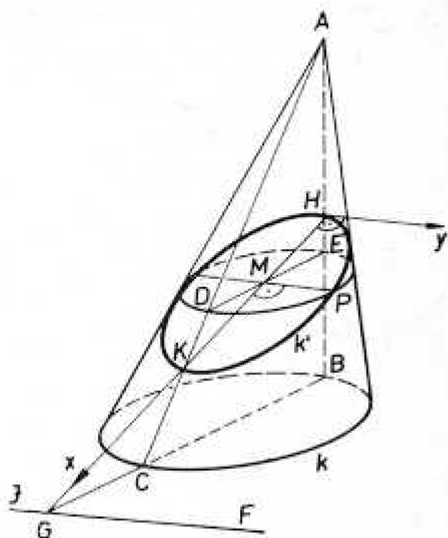
A koordinátageometria kezdeteit a köztudat DESCARTES nevéhez kapcsolja. Igaz, hogy a derékszögű koordináta-rendszer egyféle kezdetleges alakja nála jelentkezik, de még azt sem mondhatjuk, hogy először, hiszen PTOLEMAIOSZ KLAUDIOSZ a földrajzi helyeket lényegében úgy határozta meg, amint ma szokás,

vagyis a földrajzi hosszúság és szélesség segítségével, és a francia NICOLE D'ORESME (1320?-1382) „latitudo"-ja (szélessége) és „longitudo"-ja (hosszúsága) a mai abszcissza és ordináta fogalmakkal azonosítható. A módszer lényege: a koordinátageometriai gondolkozásmód, az egységes és következetes koordinátageometriai szellem azonban az ókori APOLLÓNIOSZnál teljesedett ki először, és ami még csodálatosabb : a koordináta-rendszer ismerete nélkül. Hogyan lehetséges ez? Úgy, hogy minden, kúpszeletre vonatkozó tételét - ha ezt nem is fogalmazta így meg - mindig két, alkalmasan kiválasztott egyenesre (konjugált átmérőkre) vonatkoztatta. Pontosabban: úgy járt el, mintha ma a koordináta-rendszer ordinátatengelyének a kúpszelet egyik érintőjét és abszcisszatengelyének az érintési ponthoz tartozó átmérőt választanánk. APOLLÓNIOSZ tehát valójában ferdeszögű koordináta-rendszerben gondolkozott. A koordinátageometriai módszer felfedezője, illetve a módszer nagy átütő erejének felismerője tehát a pergéi APOLLÓNIOSZ volt, DESCARTES pedig csak az alaki és jelölésbeli kellékekkel járult hozzá - ami persze szintén nem lebecsülendő érdem.

Kevés olyan nagy találmánnyal találkozhatunk, amely csupán egyetlen ember nevéhez fűződnék. Előzmények, részeredmények majdnem minden esetben fellelhetők. Az úttörők, a sokszor aprónak látszó munkák végzői rendszerint homályban maradnak az eredmény látványos betetőzője mögött. A koordinátageometriai gondolkodásmód már fel-felcsillant APOLLÓNIOSZ előtt is. A kúpszeletek felfedezője, MENAIKHMOSZ - amint a 111. és 112. oldalakon láttuk - már megállapította például a hiperbola „szümptómáját" is, azaz e kúpszeletre vonatkozó legjellemzőbb geometriai összefüggést. A háromféle kúpszeletet ő még háromféle egyenes körkúp síkmetszeteként állította elő, a metsző síkot mindig valamelyik alkotóra merőlegesen irányítva. A kúpszeleteket még a körkúpok fajai szerint nevezte el: a hegyesszögű kúp metszete volt az ellipszis, a derékszögű kúp metszete a parabola és a tompaszögű kúp metszete a hiperbola neve. Így származtatta a kúpszeleteket ARKHIMÉDÉSZ is, aki szintén bővítette a kúpszeletekre vonatkozó ismereteket, de csak amilyen mértékben az más irányú kutatásaihoz szükséges volt. Tudjuk, hogy EUKLEIDÉSZ is írt a kúpszeletekről, sőt az ő kortársa, ARISZTAIOSZ szintén összeállított egy kúpszeletekről szóló könyvet. Ez utóbbinak

azonban csak a latin címét, *Solid loci* (Térbeli mértani helyek) ismerjük. Láttuk, hogy ARKHIMÉDÉSZ munkáinak megértéséhez is sokszor hozzásegített a segítségül hívott koordinátageometria. Ez azt mutatja, hogy ARKHIMÉDÉSZ is sokszor gondolkozhatott koordinátageometriai módon, vagyis a jobb megértést célzó „modernizálásunk" talán nem is volt olyan megbocsáthatatlan hamisítás. Végül is: APOLLÓNIOSZnak voltak szellemi elődei, de a náluk alkalomszerűen használt módszer általános jellegét ő vette észre és alkalmazta teljes céltudatpssággal és következetességgel egész művében. Ez az ő nagy tudományos tette és évszázadokra előremutató érdeme, mert a kúpszeletek tanát összefoglaló egységes nézőpontja a matematika más területén is gyümölcsözőnek bizonyult.

A *Kónika* első négy könyve eredeti, tehát görög nyelven maradt ránk, az ötödik, hatodik és hetedik kötetet arab nyelvű fordítások őrizték meg. Az elveszett nyolcadik kötetet EDMUND HALLEY angol csillagász és matematikus rekonstruálta 1710-ben, APOLLÓNIOSZ kommentátoraira, különösen PAPPOSZ munkáira támaszkodva. Az első négy kötet a már kifejtett szempontok szerint foglalja össze és bővíti ki az elődök eredményeit. Ezekben APOLLÓNIOSZ elsőként tárgyalja a kúpszeleteket egy tetszőleges ferde körkúp síkmetszeteiként, tehát mind a három kúpszeletet egyetlen ferde körkúpból származtatja a metszősík helyzetének változtatásával. Ezek a kötetek tartalmazzák a kúpszeletek szümptómáit; azokat a tételeket, amelyek a konjugált átmérőkre, az érintőkre, az aszimptotákra, a pólusra, a polárisra és a fokális tulajdonságokra vonatkoznak. Az ötödik könyv a kúpszeletek érintőiről és evolutáiról szól. A hatodik a kúpszeletek egybevágóságával és hasonlóságával foglalkozik. A hetedik kötet számos, a konjugált átmérőkre vonatkozó tételt tárgyal, végül a nyolcadik főleg szerkesztési feladatokat.



135. ábra

Ezután az első részből kiszemelt néhány részlettel szeretném érzékeltetni **Apollóniosz** „koordinátageometriai módszerét”. Először nézzük meg, hogyan kapta meg a kúpszeletek egyenleteit, szümptómáit. Amint azt már előrebocsátottam, **Apollóniosz a** kúpszeleteket a ferde körkúpból származtatta.

Az ellipszist és az arra jellemző összefüggést a következőképpen találta meg: A *135. ábra* útmutatása szerint az *ABC* ferde körkúpot egy olyan sík metszi, amely a *k* alapkör síkjából kivágja az *FJ* egyenest. Ennek az egyenesnek azonban nincs közös pontja az alapkörrel. Rajzoljuk meg az alapkörnek az *FJ-re* merőleges *BC* átmérőjét. Ennek egyenese *FJ-t* metszi a *G* pontban. A metsző sík a kúpfelületből ellipszist vág ki. Ennek egy tetszőleges pontját jelöljük P-vel. A *P* ponton át fektessünk az alapkörrel párhuzamos síkot, amely a kúpból kimetszi a *DE* átmérőjű *k'* kört. Húzzunk végül a *P* pontból az *FJ* egyenessel párhuzamost, azaz a *DE* átmérőre merőlegest. Az így nyert *PM* szakasz ábránkon merőleges az ellipszis *KH* nagytengelyére is. A rajzról a következő összefüggések olvashatók le:

Az *EHM* és *BHG* háromszögekből: $EM : HM = BG : HG$.

A *DMK* és *CGK* hasonló háromszögekből: *DM* : *KM* = *CG : KG.* E két aránypárból következik, hogy: *EM*DM* : *HM*KM* = *CG*BG : HG*KG,* ahonnan

$$EM \cdot DM = \frac{CG \cdot BG}{HG \cdot KG} \cdot HM \cdot KM.$$

Vegyük most tekintetbe, hogy a *k'* körből $EM * DM = PM^2$, és hogy a *(CG*HG)/(HG*KG)* tényező független az ellipszisen felvett *P* pont helyétől. Jelöljük ezt a pozitív konstanst k^2-tel, akkor az egyenlőség

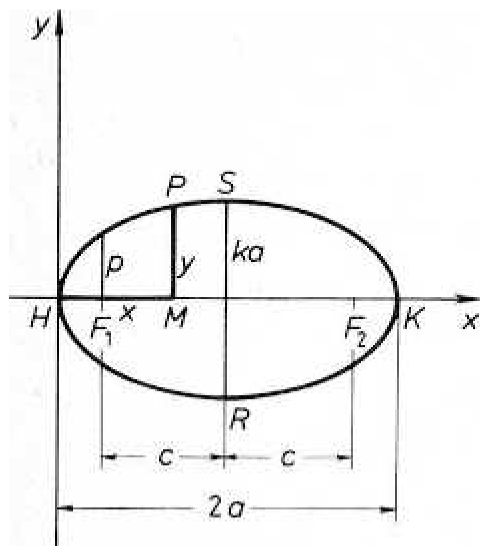
$PM^2 = k^2 * HM * KM.$

Ezt az ellipszis definiálására alkalmas összefüggést kapta **Apollóniosz.** Ezt nevezte az ellipszis szümptómájának, amely tartalma szerint megegyezik a középiskolában megismert ellipszisegyenlettel. Ezt beláthatjuk a következő jelölések bevezetésével: Legyen $PM=y$, $HM=x$, $HK=2a$ és akkor $KM=2a—x$. Ezekkel a szümptóma az

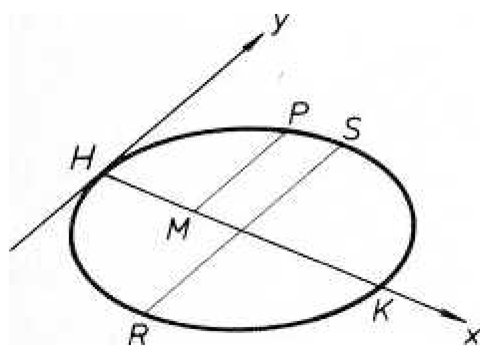
$y^2=k^2(2a\text{-}x)x$

alakot ölti, vagy rendezés után:

$y^2= —k^2(x^2—2ax)$, illetve $y^2= — k^2(x—a)^2+a^2k^2$.



136. ábra



137. ábra

138. ábra

Végül:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ka)^2}=1.$$

Ez már valóban ismerős: egy olyan ellipszis egyenlete, amelynek helyzetét a derékszögű koordináta-rendszerben a *136. ábra* szemlélteti. Ezen az ábrán a *H, M, K* és *P* pontok az előbbi ábra hasonló jelölésű pontjainak felelnek meg. APOLLÓNIOSZnál tehát az ellipszist meghatározó összefüggés arra a koordináta-rendszerre vonatkozik, amelynek x tengelye a *HG* egyenes, az ordinátatengelye a *H* pontot tartalmazó és az *FJ* egyenessel párhuzamos egyenes, az origó pedig a *H* pont. Ez a koordináta-rendszer, ha a metsző síkot úgy választjuk, hogy a *k* kör *BC* átmérőjének megfelelő *HK* ellipszishúr ne az ellipszis nagytengelye legyen, akkor nem

derékszögű. APOLLÓNIOSZ eredménye tehát általánosabb a mi egyenletünknél. A *135. ábrán* az ellipszis egyik szimmetriatengelye *(HK)* benne van a ferde kúp szimmetriasíkjában, vagy rövidebben: az ellipszisnek és a kúpnak van közös szimmetriasíkja. Ez azonban APOLLÓNIOSZ-nál általában nem teljesül, és akkor a koordináta-rendszer nem derékszögű. Az alapkör két, egymásra merőleges átmérőjének az ellipszis két konjugált átmérője felel meg. APOLLÓNIOSZnál *HK* egy tetszőleges átmérő és a *PM* a *HK* konjugált átmérőjével, illetve a *H* pontbeli érintővel párhuzamos félhúr, amint ez például a *137. ábrán* látható. Ha *HK* és *RS* az ellipszis két konjugált átmérője, valamint *PM* párhuzamos RS-sel, akkor APOLLÓNIOSZ egyenlete szerint a *PM* oldalú négyzet területe arányos a *HM* és *HK* oldalú téglalap területével. Ehhez a megfogalmazáshoz nem volt szükség koordináta-rendszerre, és bevezetése már csak formai kérdés. Az Apollóniosz-féle szümptóma rögtön átírható az ellipszis egyenletévé, amint a vonatkoztatási rendszert bevezetjük.

Hasonló módon kereste és találta meg a „nagy geométer” a hiperbola egyenletét is. Most a ferde, kettős körkúpot metsző sík úgy vágja szét a *k* alapkör síkját, hogy a kimetszett *FJ* egyenesnek két közös pontja van az alapkörrel, de a metsző sík nem párhuzamos a kúp egyik alkotójával sem *(138. ábra)*. Most is tüntessük fel az alapkör *FJ*-re merőleges *BC* átmérőjét, és válasszuk ki a kúp és a metsző sík találkozásával keletkezett hiperbola egy tetszőleges *P* pontját. Ezen - csakúgy, mint az ellipszisnél - fektessünk át az alapkörrel párhuzamos síkot, amely meghatározza a kúppal a *k'* kört. Ennek a BC-vel párhuzamos átmérője *DE.* A *P* pontból állítsunk erre merőlegest: *PM.* (Az ábránk most is speciális, mert a hiperbola *HK* szimmetriatengelye benne van a kúp szimmetriasíkjában, és ekkor *PM* merőleges a *HK* tengelyre is. Ezeknek azonban a rajz elkészítési utasítása szerint általában nem kell így lenniük.) Ábránkon *PM* merőleges a *HK* szimmetriatengelyére is.

Az *EMK* és *CGK* hasonló háromszögekből: $ME : MK = GC : GK$.

A *DMH* és *BGH* hasonló háromszögek miatt: $DM : MH = BG : GH$.

A két aránypárból:

$ME*DM : MK*MH = GC * BG : GK * GH,$

ahonnan:

$$ME \cdot DM = \frac{GC \cdot BG}{GK \cdot GH} \cdot MK \cdot MH.$$

Itt figyeljünk fel arra, hogy a *k'* körből $ME*DM = PM^2$, és az egyenlet jobb oldalán szereplő tört egyik tényezője sem függ a *P* hiperbolapont megválasztásától, tehát ennek pozitív konstans értékét jelölhetjük most is k^2-tel. Így

$PM^2 = k^2 \cdot MK \cdot MH.$

Ezt az **Apollóniosz** által nyert hiperbolaszümptómát most is könnyen átalakíthatjuk a megszokott egyenletté, ha bevezetjük a következő jelöléseket: Legyen $PM = y$, $MK = x$, $KH = 2a$, és így $MH = x + 2a$. Ekkor:

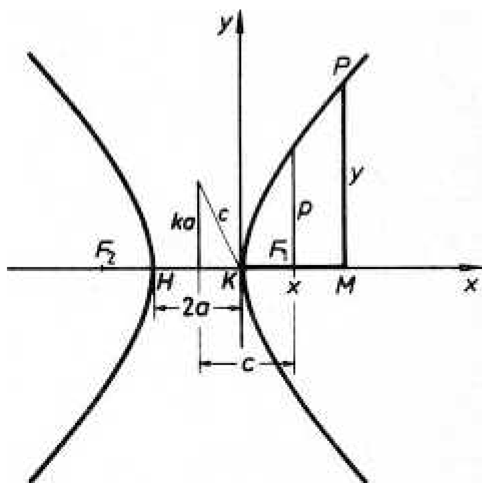
$y^2 = k^2(x + 2a)x.$

Rendezés után:

$y^2 = k^2(x^2 + 2ax)$, illetve $y^2 = k^2(x + a)^2 — k^2a^2$,

tehát

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{(ka)^2} = 1.$$



139. ábra

Ez pedig a *139. ábra* hiperbolájának az egyenlete.

A megfelelő koordináta-rendszer a *138. ábrán* is látható.

Még egyszerűbb módon nyerhető a parabola egyenlete. Most a ferdekörkúp-felületet olyan síkkal metszettük, amely valamelyik alkotóval párhuzamos. A mi egyszerűsítő céljainknak megfelelő, különleges esetet tünteti fel a *140. ábra.* (A specializálás most is abban mutatkozik, hogy a parabola és a kúp szimmetriasíkja közös.) Most is rajzoljuk meg az alapkör síkján kimetszett *FJ* húrra merőleges *BC* átmérőt. A parabola tetszőleges *P* pontján át most is fektessünk az alapkörrel párhuzamos síkot, amely kimetszi a kúpból a *k'* kört. A k'-nek a BC-vel párhuzamos *DE* átmérőjére most is állítsunk merőlegest a *P* pontból. Ez a mi ábránk szerint merőleges a *KG* parabolatengelyre is. Mivel az *EMK* háromszög hasonló a *CGH* háromszöghöz, azért

$ME : MK = GC : GK,$

140. ábra

tehát

$$ME = \frac{MK \cdot GC}{GK}.$$

Ugyanakkor $DM = BG$, tehát

$$DM \cdot ME = \frac{GC \cdot BG}{GK} \cdot MK.$$

A k' körből most is $DM*ME = PM^2$, és az egyenlet jobb oldali törtje független a P pont megválasztásától. Ha tehát ezt a törtet k betűvel jelöljük, akkor

$PM^2 = k*MK.$

Vezessük be ismét az ábrán is feltüntetett koordináta-rendszert, amelyben $PM = y$ és $MK = x$. Így a *141. ábra* parabolájának az egyenlete:

$y^2 = kx.$

Apollóniosz tehát - szemben elődeivel - teljesen azonos eljárást talált mind a három kúpszelet származtatására és egyenletének megkeresésére. Az eredményül kapott alapösszefüggések hasonlósága híven tükrözi nemcsak a három görbe rokon voltát, hanem a módszer azonosságát is.

Az, hogy **Apollóniosz** a kúpszeleteket a ferde körkúp síkmetszeteiként állította elő, megszüntette a régi elnevezések jogosultságát. Értelmét vesztette a hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű kúp metszete elnevezés, amelyeket a kúpszeletek atyja, **Menaikhmosz** használt. Érthető, hogy **Apollóniosz új,** jellemző tulajdonságokat keresett a kúpszeletek elnevezési alapjául. Tőle származnak a ma is használatos, ellipszis, parabola és hiperbola nevek. Így lett ő, ha nem is a kúpszeletek atyja, de a keresztapja.

A három görbe új elnevezését indokoló tulajdonságokat keresve, először vissza kell lapoznunk a 154-156. és 159-160. oldalakhoz, ahol **Eukleidész** *Sztoikheiája* nyomán ismertettük az illesztési feladatokat. Ott fordultak elő az elliptikus (hiánnyal való),

a hiperbolikus (többlettel való) és a parabolikus (illeszkedő) elnevezések. Mi a kapcsolat az illesztési feladatok és a kúpszeletek elnevezése között? A felelethez kissé át kell alakítanunk a kúpszeletek megismert egyenleteit. Az átalakítás abból áll, hogy a már előállított tengelyponti egyenletekbe bevezetjük az ún. paramétert. A parabolánál ez semmi újat nem jelent. A parabola paraméterét úgy szokás definiálni, hogy az a parabola vezéregyenese (direktrixe) és gyújtópontja közti távolság kétszerese *(141. ábra),* a jele $2p$. Vegyük észre azt is, hogy az $y^2 = 2px$ parabolánál az helyen $y^2 = p^2$, azaz a fókuszon átmenő és a parabola tengelyére merőleges húr hossza éppen a $2p$, a paraméter. Nevezzük paraméternek az ellipszisnél és a hiperbolánál is az első fókuszon átmenő és a főtengelyre merőleges húr hosszát, és jelöljük most is 2p-vel.

Mekkora az ellipszis és a hiperbola paramétere?

A *136. ábra* ellipszisének egyenlete

$y^2 = k^2(2ax—x^2)$.

Vezessük be a $(ka)^2 = b^2$ alapján a $k^2 = b^2 : a^2$ jelölést, ahol b az ellipszis kistengelyének a fele. Ekkor

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

Az első fókusz (F_1) abszcisszája, ha a lineáris excentricitást c-vel jelöljük:

$x_1 = a—c$.

így az ellipszis félparaméterére kapjuk, hogy

$$p^2=y_1^2=\frac{b^2}{a^2}[2a(a-c)-(a-c)^2].$$

vagy

$$p^2=\frac{b^4}{a^2}, \quad \text{illetve} \quad p=\frac{b^2}{a}.$$

Ha tehát az ellipszis egyenletében a b^2/a helyett *p-t* írunk, akkor

$$y^2=\frac{p}{a}(2ax-x^2),$$

vagyis

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2.$$

Ugyanígy járhatunk el a hiperbola esetében is. Ha ennek egyenletébe is beírjuk a $(ka)^2 = b^2$ jelöléssel a k^2 helyére a $b^2 : a^2$ törtet, akkor a *139. ábra* hiperbolájának az egyenlete

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2).$$

Az F_1 első fókusz abszcisszája $x_1 = c—a$ lévén, a hiperbola paraméterére a

$$p^2=y_1^2=\frac{b^2}{a^2}[2a(c-a)+(c-a)^2],$$

azaz a $p^2 = b^4/a^2$, illetve a $p = b^2/a$ értéket nyerjük. Így a hiperbola egyenlete:

$$y^2=\frac{p}{a}(2ax+x^2), \quad \text{vagyis} \quad y^2=2px+\frac{p}{a}x^2.$$

Érdemes egy pillanatra megállnunk, és összehasonlítanunk a háromféle kúpszelet legutóbbi tengelyponti egyenleteit:

Az ellipszis egyenlete:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2.$$

A hiperbola egyenlete:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

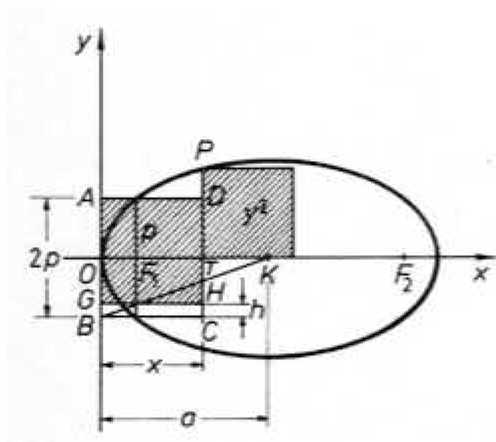
A parabola egyenlete: $y^2 = 2px.$

Szokás az $\varepsilon = p/a$ törtet numerikus excentricitásnak nevezni. Így *a* mindhárom kúpszelet egyenletét összefoglalja az

$$y^2 = 2px + \varepsilon x^2$$

egyenlet, amit ellipszis ábrázol, ha $\varepsilon < 0$, hiperbola, ha $\varepsilon > 0$ és parabola, ha $\varepsilon = 0$.

Térjünk vissza eredeti problémánkhoz. Miért honosította meg **Apollóniosz** az ellipszis, a hiperbola és parabola elnevezéseket? Mi a kapcsolat a nevek és az illesztési feladatok között? A feleletet a paraméteres egyenletek adják meg.



Az ellipszis egyenletét megfogalmazhatjuk a következő illesztési feladatként: Illesszünk a $2p$ távolsághoz y^2 területű téglalapot úgy, hogy hiányozzék a távolság mellől egy $(p/a)x^2$ területű téglalap!

Ezt a feladatot **Apollóniosz** a *142. ábra* szerint oldotta meg. Az ellipszis tetszőleges *P(x;y)* pontjának ordinátájához szerkesztettünk y^2 területű négyzetet. Az F_1 fókuszon átmenő és a főtengelyre merőleges húr hossza az *y* tengelyen is feltüntetett

AB=*2p.* Így az *ABCD* téglalap területe 2*px.* Kössük össze most az ellipszis *K* szimmetria-középpontját a *B* ponttal. Ez a szakasz kimetszi a *CD* oldalból a *CH*=*h* szakaszt. Számítsuk ki ennek a hosszát!

Az *OBK* és *GBH* hasonló háromszögekből: $h : x = p : a$, ahonnan h=p/a és így a *BCHG* téglalap területe (p/a)x^2. Ezek szerint tehát az *AB*=*2p* szakaszhoz illesztett *AGDH* téglalap területe $2px$-(p/a)x^2, vagyis éppen y^2, és a *2p* szakasz mellől hiányzik a *GBCH* téglalap, amelynek területe Ezt a hiánnyal való, azaz elliptikus illesztési feladatot lehet tehát ezzel a kúpszelettel megoldani. Ezért lett ellipszis a neve.

A hiperbola elnevezés oka hasonló. Egyenlete, az

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

azt a feladatot rejti, hogy illesszünk a *2p* szakaszhoz y^2 területű téglalapot úgy, hogy az túlnyúljon a *2p-n* egy (p/a)x^2 területű téglalappal. Az egyenlet tartalma tehát egy többlettel való illesztési feladat is lehet, amit **Apollóniosz** a *143. ábra* szerint oldott meg. Az itt ábrázolt hiperbola bármely *P(x; y)* pontjának *y* ordinátájához szerkesszünk y^2 területű négyzetet. Ezután az *y* tengelyen látható *AB*=*2p* távolsághoz rajzoljuk meg a 2*px* területű *BCDA* téglalapot. Ennek meghosszabbított *DC* oldalát messük el a *KB* egyenessel, végül egészítsük ki a vázlatot a *BGHC* téglalappal. Ennek *CH*=*h* oldalát nyerjük a *KOB* és *BCH* hasonló háromszögpárból:

$h:x=p:a$, ahonnan $h=(p/a)x$,

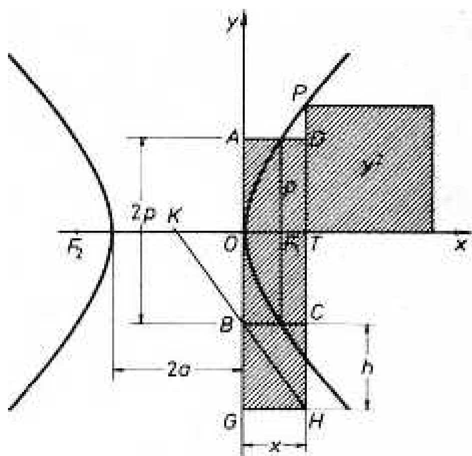
és így a *BGHC* téglalap területe (p/a)x^2. A hiperbola egyenlete szerint az A*GHD* téglalap területe, a $2px+(p/a)x^2$ éppen y^2. Ebből fölösleg a *BGHC* téglalap (p/a)x^2 nagyságú területe. A most bemutatott, többlettel való, azaz hiperbolikus illesztés tehát a szóban forgó kúpszelettel végrehajtható. Ezért e kúpszelet a hiperbola nevet kapta.

A harmadik kúpszelet esete a legegyszerűbb. *Az* $y^2=2px$

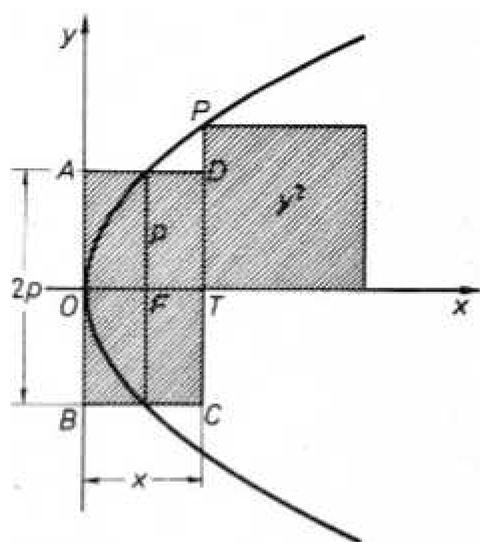
egyenletből rögtön látható, hogy a $2p$ szakaszhoz illesztett *ABCD* téglalap területe éppen $2px$, azaz y^2. E pontos illeszkedés után méltán keresztelte **Apollóniosz** ezt a kúpszeletet parabolának *(144. ábra)*.

A kúpszeleteknek ez az egyöntetű, lényeglátó tárgyalásmódja - azt hiszem - méltán vívja ki Apollóniosz iránti csodálatunkat.

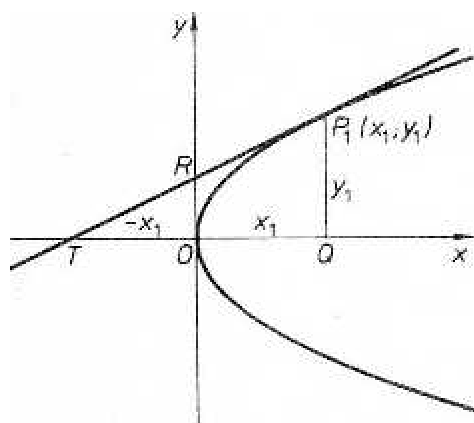
A *Kónika* első könyvének végső célja annak a megmutatása, hogy az új módon, tehát a ferde körkúpok segítségével definiált kúpszeletek azonosak a **Menaikhmosz** által, tehát a forgáskúppal meghatározott kúpszeletekkel. Ezért **Apollóniosz**
végeredményben megszerkesztette az új származtatású kúpszeletekhez a megfelelő forgáskúpot.



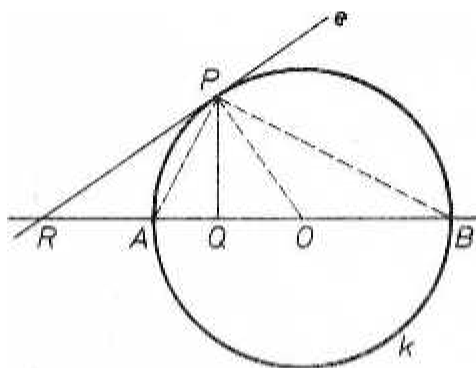
143. ábra



144. ábra



145. ábra



146. ábra

Ha az ide vezető tételsorozatot teljes egészében nem is tárgyalhatjuk, talán érdemes közülük néhányat kiemelni, hogy lássuk, milyen sokféle feladatot oldott meg az ókor legnagyobb kúpszelet-szakértője. Néhány érintővel kapcsolatos feladatra gondolok.

Hogyan szerkesztett APOLLÓNIOSZ adott kúpszelet adott pontjához érintőt? Tárgyalásunkban derékszögű koordináta-rendszerre szorítkozunk, és felhasználjuk középiskolai tanulmányainkat. Legegyszerűbb a dolgunk az $y^2=2px$ egyenletű parabolánál. Ennek $P_1(x_1;y_1)$ pontjához az

$$yy_1=p(x+x_1)$$

egyenletű érintő tartozik, amely az x tengelyt az $y=0$ ordinátájú, azaz a $T(—x_1;\ 0)$ pontban metszi. Ha tehát a *145. ábra* útmutatása szerint felmérjük a parabola tengelyére az $OT= OQ$ szakaszt, akkor a TP_1 egyenes éppen a P_1 parabolaponthoz tartozó érintő.

A *145. ábra* meggyőz arról is, hogy az OR szakasz, amelyet az érintő az y tengelyből lemetsz, a TQP_1 háromszög egyik középvonala, és éppen azért a P_1Q-*nak,* vagyis az y_1 ordinátának a fele. A parabola bármely érintője a csúcsérintőből feleakkora darabot vág le, mint az érintési pontnak és a parabola tengelyének a távolsága.

Azért, hogy eljussunk az ellipszis érintőjének ahhoz a

tulajdonságához, amely APOLLÓNIOSZnál az érintőszerkesztés alapja, induljunk ki a *146. ábra* körének a *P* pontjához tartozó érintőjéből. Feladatunk, hogy a kör adott *P* pontjához és adott *AB* átmérőjéhez szerkesszük meg az *e* érintőt. E feladatot most úgy oldjuk meg, hogy a módszer az ellipszisre is alkalmazható legyen. Ezért észrevesszük, hogy az *ABP* derékszögű háromszögből

$PQ^2 = AQ*QB,$

az *ROP* derékszögű háromszögből pedig

$PQ^2 = RQ*QO.$

így

$RQ*QO = AQ*QB,$

vagy

$RQ : AQ = QB : QO,$

ahonnan

$(RQ-AQ) : AQ = (QB-QO) : QO,$

tehát

$RA:AQ = OB : QO. \quad (\alpha)$

Az $RQ*QO = AQ*QB$ egyenlőségből azonban az is következik, hogy

$RQ : QB = AQ : QO,$

ahonnan

$(RQ + QB) : QB = (AQ + QO) : QO,$

tehát

$RB : QB = AO : QO. \quad (\beta)$

Mivel azonban $OB = OA = r$, azért az (α) és (β) oldalai egyenlők, tehát

$$\frac{RA}{AQ}=\frac{RB}{QB},$$

és ha figyelembe vesszük a szereplő szakaszok irányítását is, akkor:

$$\frac{RA}{AQ}:\frac{RB}{BQ}=-1.$$

Ha valamely egyenesen úgy helyezkedik el az *R, A, Q* és *B* pont, hogy az utóbbi egyenlőség teljesül, akkor harmonikus pontnégyesről szokás beszélni. Az arányok arányát kettősaránynak vagy még inkább kettősviszonynak nevezik, és használják a következő jelöléseket:

$$(ABC)=\frac{AC}{CB} \quad \text{és} \quad (ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}.$$

A mi esetünkben:

$$(RQAB)=\frac{(RQA)}{(RQB)}=\frac{RA}{AQ}:\frac{RB}{BQ}=-1.$$

Hogyan szerkeszthető meg a harmonikus pontnégyes egyik pontja a megadott háromból? Legyen adott egy egyenesen három különböző pont: *A, B* és *C* úgy, hogy a C pont az *A* és a *B* közé essék. Az egyenesnek melyik *D* pontja teljesíti az

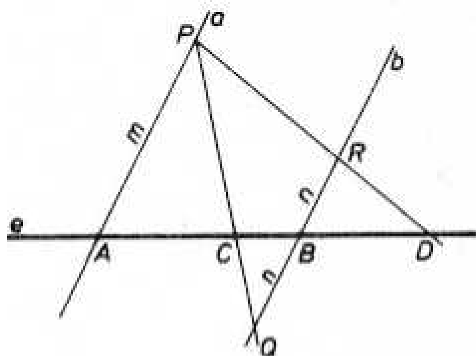
$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1$$

feltételt? A szerkesztést a *147. ábra* mutatja. Az *e* egyenes *A* és *B* pontján át rajzoljunk két, egymással párhuzamos egyenest: a-t és *b*-1. Az *A* pontból az *a* egyenesre mérjük fel a tetszőleges $AP=m$ távolságot. A *PC* egyenes metssze a *b-t* a *Q* pontban. Mérjük fel továbbá a *b*-re a *B* pontból a $QB=n$ távolságot az *e* egyenes másik oldalán: $BR=n$. Állítjuk, hogy a *PR* egyenes kimetszi az *e*

egyenesből a kívánt *D* pontot. Az *ACP* és *BCQ* hasonló háromszögekből ugyanis:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}.$$

$$\frac{AD}{DB}=-\frac{m}{n}.$$



147. ábra

Ugyanígy az *ADP* és *BDR* hasonlóháromszög-párból:

A két arány hányadosa tehát:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=(ABCD)=-1.$$

148. ábra

149. ábra

A negyedik harmonikus tehát egyszerűen megszerkeszthető. Persze

a körérintő megszerkesztéséhez ez az eljárás nem szükséges. Azért volt érdemes mégis megismernünk, mert a harmonikus pontnégyes hasonlóképpen jelentkezik az ellipszis érintőjével kapcsolatban is. Arra kell gondolnunk, hogy az ellipszis a kör merőlegesen affin képe *(148. ábra)*. Mint ismeretes, a merőleges affinitás olyan ponttranszformáció, amelyben adott egy *t* tengely és egy rögzített

arány, most b/a, és utasítása a következő: A *P* pont merőlegesen affin képe az a *P'* pont, amely rajta van a *P* pontból a *t* tengelyre állított merőlegesen úgy, hogy teljesül a P'Q/PQ = b/a feltétel. A *148. ábra k* körének merőlegesen affin képe az *e* ellipszis, és a *c* körérintő képe a *c'* ellipszisérintő. Amint látható: az *A, B, R* és *Q* pontok a transzformáció után is ugyanott maradtak, tehát az ellipszisérintőre is igaz, hogy (*RQAB)* = — 1.

Igazolhattuk volna ezt az ellipszis egyenletének felhasználásával is, ahogyan most a hiperbolánál tesszük: A *149. ábra* hiperbolájának egyenlete: $y^2 = k^2(x^2 + 2ax)$.

A $P_1(x_1;y_1)$ hiperbolaponthoz tartozó *e* érintő egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{k^2}{y_1}(a + x_1)(x - x_1).$$

Az érintő az x-tengelyt az y = 0 ordinátájú *R* pontban metszi. Ennek abszcisszája tehát:

$$AR = -\frac{ax_1}{a + x_1}, \quad \text{és így} \quad RA = \frac{ax_1 \cdot}{a + x_1}.$$

Az ábráról leolvasható, hogy $RB = -(2a - RA) = (a(2a + x_1))/(a + x_1)$ és $AQ = x_1$, valamint hogy $BQ = 2a + x_1$. Így:

$$(RQAB) = \frac{RA}{AQ} : \frac{RB}{BQ} = \frac{a}{a + x_1} : \left(-\frac{a}{a + x_1}\right) = -1.$$

A harmonikus pontnégyes segítségével tehát az ellipszis és a

hiperbola adott pontjához az érintő megszerkeszthető.

Roppant gondosan **készített elő Apollóniosz** egy olyan területátalakítási tételt, amelynek alapján kimutathatta, hogy a kúpszeletek szümptómájának előállításához bármely konjugált átmérőpár alkalmas. A bizonyítandó tétel az ellipszisnél így hangzik: Rajzoljuk meg az ellipszis egyik átmérőjét, legyen ez most az *AB* nagytengely *(150. ábra)*. Húzzuk meg az ezen átmérő *A* végpontjához tartozó érintőt, valamint az ellipszis valamely tetszőleges *E* pontbeli érintőjét. - E két érintő után szokták a most ismertetendő tételt a két érintő tételének nevezni. - Ez az érintő metszi az *AB* átmérő egyenesét a *D* pontban. Az ellipszis *AE* ívének tetszőleges *P* pontjából az *ED* érintővel párhuzamos egyenes és az *AB* átmérő egyenesének közös pontja *R*.

Rajzoljuk meg végül az *E* pont ordinátáját is (tengelyponti koordináta-rendszerre gondolva), úgyszintén a *P* pont ordinátájának egyenesét és a *CE* egyenest, ha a *C* pont az ellipszis középpontja. A két érintő tétele azt mondja ki, hogy a *PQR* háromszög területe akkora, mint az *AQML* négyszög területe. (Ez akkor is igaz, ha *P* az ellipszis egy tetszőleges pontja!) A tétel indoklása a következő: A *PQR* és az *EZD* háromszögek területaránya, hasonlóságuk miatt:

$t_{PQR} : t_{EZD} = PQ^2 : EZ^2 = y^2 : y^2{}_1 = k^2 * (2a-x)x : k^2 * (2a-x_1)x_1,$

azaz

$$t_{PQR} : t_{EZD} = \frac{x(2a-x)}{x_1(2a-x_1)} .$$

Az előbbiek szerint az ellipszis érintőjére igaz, hogy

$DA : AZ = DB : BZ,$ vagyis $DA : x_1 = (DA+2a) : (2a - x_1).$

Ebből

$$DA = \frac{ax_1}{a-x_1} .$$

Így az *EZD* háromszög területe:

$$t_{EZD}=\frac{y_1}{2}(DA+AZ)=\frac{y_1}{2}\left(\frac{ax_1}{a-x_1}+x_1\right)=\frac{y_1(2a-x_1)x_1}{2(a-x_1)}.$$

A két háromszög területének arányából tehát:

$$t_{PQR}=\frac{x(2a-x)}{x_1(2a-x_1)}\cdot t_{EZD}=\frac{x(2a-x)}{x_1(2a-x_1)}\cdot\frac{y_1(2a-x_1)x_1}{2(a-x_1)}=$$
$$=\frac{y_1(2a-x)x}{2(a-x_1)}.$$

Számítsuk most ki az *AQML* négyszög területét:

$$t_{AQML}=\frac{AL+QM}{2}\cdot x.$$

Az ALC és a ZEC hasonló háromszögekből AL : y_1 = a : (a—x_1), tehát

$$AL=\frac{ay_1}{a-x_1}.$$

Mivel pedig a QCM és ZCE háromszögek is hasonlók, azért

QM : y_1 = (a-x) : (a-x_1),

tehát

$$QM=\frac{y_1(a-x)}{a-x_1}.$$

így

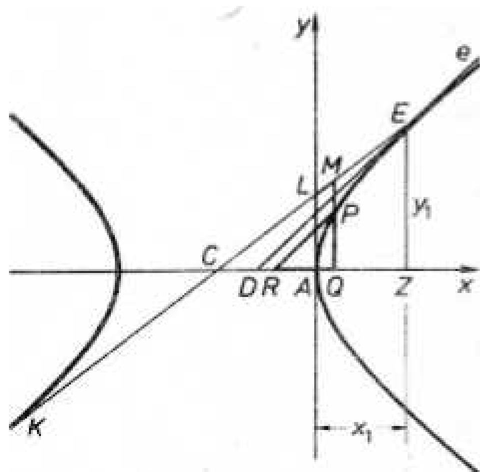
$$t_{AQML}=\frac{AL+QM}{2}\cdot x=\frac{ay_1+(a-x)y_1}{2(a-x_1)}\cdot x=\frac{y_1(2a-x)x}{2(a-x_1)}.$$

Eredményünket összehasonlítva a *PQR* háromszög területével, nyerjük, hogy $t_{PQR}=t_{AQML}$, ami a bebizonyítandó tétel.

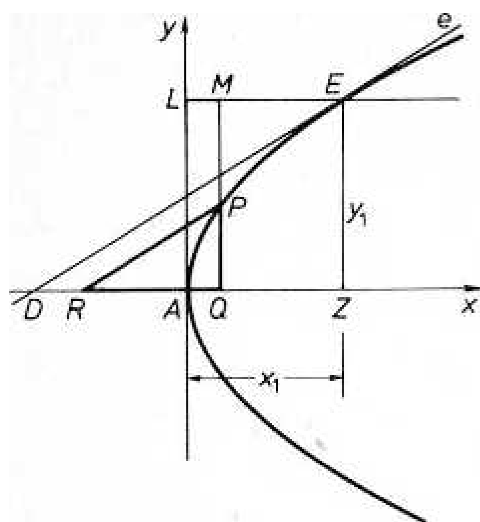
Apollóniosz ezt az összefüggést úgy alakította át, hogy az *AQML* trapéz területe helyett az *ACL* és a *QCM* háromszögek területkülönbségét vette. Ekkor $t_{PQR} = t_{ACL} - t_{QCM}$ vagy $t_{PQR} + t_{QCM} = t_{ACL}$. Ha most hangsúlyozzuk, hogy az *A* és az *E* pont rögzített, és a *P* pont az ellipszis egy tetszőleges pontja, akkor a legutóbbi egyenlőség azt mondja ki, hogy a bal oldali háromszögterületek összege független a *P* pont helyétől. Az ábra szerint a *PQR és* a *QCM* háromszögek területösszegét a *PMCR* konkáv négyszög területének tekinthetem. Ebben az alakban a két érintő tétele területi tétel, amely kimondja, hogy a *PMCR* négyszög területe állandó marad, miközben a *P* pont befutja az ellipszis kerületét. Ennek minden ellipszispont és csak ellipszispont tesz eleget, tehát a tétel valójában az ellipszis átalakított szümptómája.

Figyeljük meg, hogy a *PMCR* négyszög két oldalát két átmérő egyenese (*AB* és *EK)* tartalmazza, a másik két oldal pedig az ezen átmérőkhöz tartozó érintőkkel (*AL* és *DE)* párhuzamos. A tétel megfogalmazásakor a *PMCR* négyszög két-két oldalának a szerepe egyenértékű, más szóval az *E* és az *A* érintési pontokhoz tartozó átmérők és érintők szerepe felcserélhető. Így a tétel, vagyis az ellipszis szümptómája megfogalmazható olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelyei az *AB* átmérő és az *A* ponthoz tartozó érintő, de éppen úgy megfogalmazható abban a koordináta-rendszerben is, amelynek a tengelyei az *EK* átmérő és az *E* pontbeli érintő.

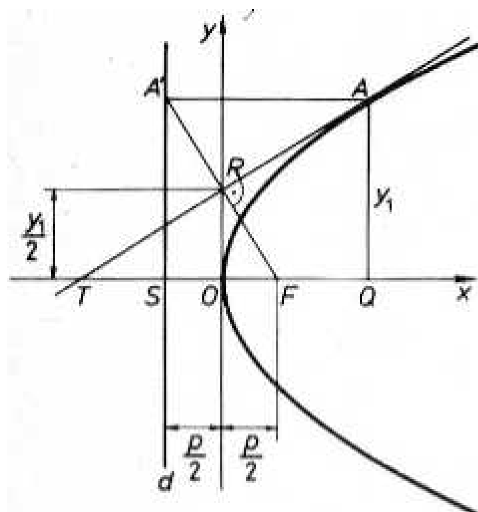
Apollóniosz tehát a két érintő tételével kimutatta, hogy az ellipszis szümptómája éppen olyan alakú bármely átmérőre és a hozzá tartozó érintőre mint koordináta-rendszerre nézve. Bármely átmérőt tekinthetjük abszcisszatengelynek, a hozzá tartozó érintőt pedig ordinátatengelynek. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az ellipszisre vonatkozó két érintő tételének bizonyítását csak a legegyszerűbb esetben mutattuk be, amikor is a tetszőlegesen felvehető *P* pont abszcisszája nem nagyobb az ellipszis *AC* féltengelyénél. Külön meggondolást igényel az az eset, amelyben ez a feltétel nem teljesül, vagyis amelyben az *AQML* trapéz helyett az *AQ'M'L* hurkolt négyszög és a *PMCR* négyszög helyett a *P'M'CR'* négyszög jelentkezik a *150. ábrán.* Ezt a lehetőséget mi nem tisztáztuk, de **Apollóniosz** igen.



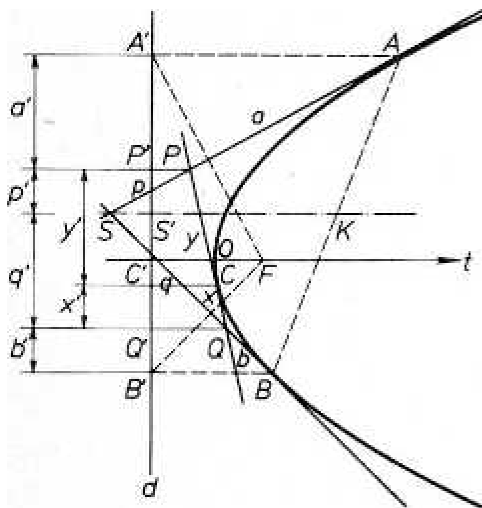
151. ábra



152. ábra



153. ábra



154. ábra

A két érintő tételét bebizonyította Apollóniosz a hiperbolára és a parabolára is. A hiperbolánál az ellipszissel való analógia, amint a 151. ábra mutatja, kézenfekvő. A parabolánál csak annyi az eltérés, hogy a *CE* egyenest az *E* ponton áthaladó, a tengellyel párhuzamos egyenes helyettesíti *(152. ábra).*

Nem tudok ellenállni annak a kísértésnek, hogy ismertessem APOLLÓNIOSZnak egy alkalmazásában is tetszetős tételét, amelyet a három érintő tételének szokás nevezni. Rajzoljuk meg a *154. ábra* szerinti parabola *A, B* és C pontjaihoz az *AS,* a *BS* és a *PCQ* érintőket. A tétel szerint az érintési pontok és az érintők metszéspontjai által meghatározott szakaszok között érvényes az

$$\frac{SP}{PA}=\frac{QC}{CP}=\frac{BQ}{QS}$$

összefüggés.

A bizonyításhoz előbb idézzük fel a *145. ábrához* fűzött megjegyzésünket, amely szerint a parabola bármely érintője a csúcsérintőből feleakkora szakaszt vág le, mint az érintési pont és a tengely egymástól való távolsága. A továbbiak kedvéért a *153. ábrán* kiegészítettük a *145. ábrát* az *F* fókusszal és a *d* direktrixszel (vezéregyenessel) is. Az *FR* egyenes a d-ből kimetszi az *A'* pontot. Az *A'* pontnak az *x* tengelytől való *A'S* távolsága éppen y_1, mert az *A'SF* háromszögnek az *A*'S-sel párhuzamos *OR* középvonala $y_1/2$.

Ebből következik, hogy az *A'A* szakasz párhuzamos a parabola tengelyével, vagyis az *A'A* szakasz az *A* pontnak a *d* direktrixtől való távolsága. Ez, amint tudjuk, egyenlő az *AF* távolsággal. Így az *A'AF* háromszög egyenlő szárú, tehát az *A* csúcsot az *A'F* oldal *F* felezőpontjával összekötő *AR* szakasz és ezzel együtt az érintő is merőleges az *A'F* oldalra. Más szavakkal: A parabola *F* fókuszának a tetszőleges *e* érintőre mint tengelyre vonatkozó tükörképe rajta van a direktrixen.

E tények ismeretében belátható, hogy a *154. ábrán* az *A* és a *B* pontbeli érintők *S* metszéspontja rajta van azon az egyenesen, amely felezi az *AB* húrt és párhuzamos az *OF* parabolatengellyel. Ez következik abból, hogy az *A'B'F* háromszögnek oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, márpedig e háromszög oldalfelező merőlegesei éppen az *AS, BS* és *KS* egyenesek.

A további bizonyításhoz vezessük be a következő jelöléseket:

Az A pontbeli érintőn $PA = a$, $SP=p$; ezeknek a direktrixre való merőleges vetületei: a' és p'.

A C pontbeli érintőn $QC=x$, $CP=y$; ezeknek a direktrixre való merőleges vetületei: x' és y'.

A B pontbeli érintőn $BQ=b$, $QS=q$; ezeknek a direktrixre való merőleges vetületei: b' és q'.

Az előrebocsátott segédtétel szerint:

$a'=y'$, $b'=x'$ és $a'+p' = b'+q'$. (1)

A rajz szerint:

$x'+y'=p'+q'$.

Mivel pedig az (1) szerint $x'=b'$ és $y'=a'$, azért

$a'+b'=p'+q'$. (2)

Az (1) és (2) összehasonlításából: $p'=b'$, és akkor az (1) szerint $a'+p'=p'+q'$ tehát $q' = a'$.

Ezek alapján:

$p : a=p' : a' = b' : a'$,

$x : y = x' : y' = b' : a'$

és

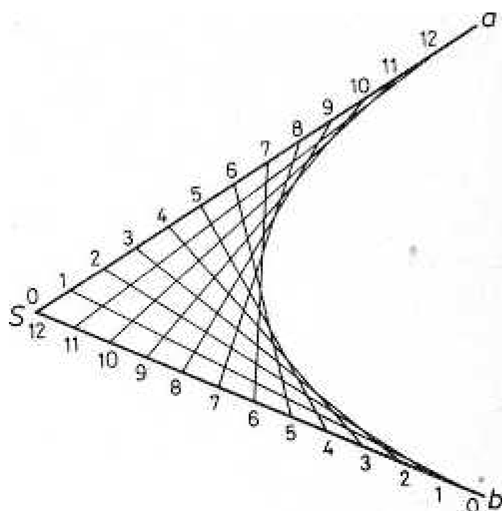
$b : q = b' : q' = b' : a'$,

tehát:

$p : a = x : y = b : q$

vagy

$$\frac{SP}{PA}=\frac{QC}{CP}=\frac{BQ}{QS}.$$

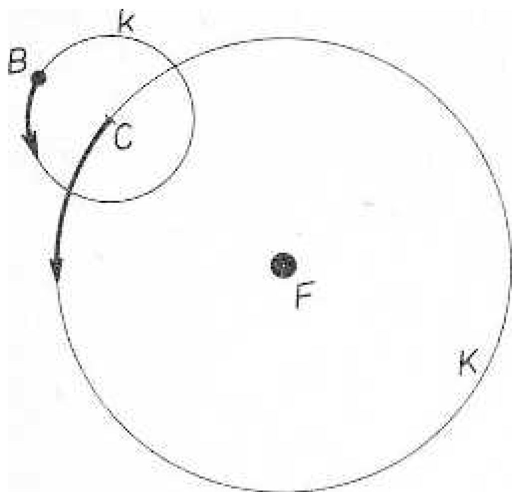


155. ábra

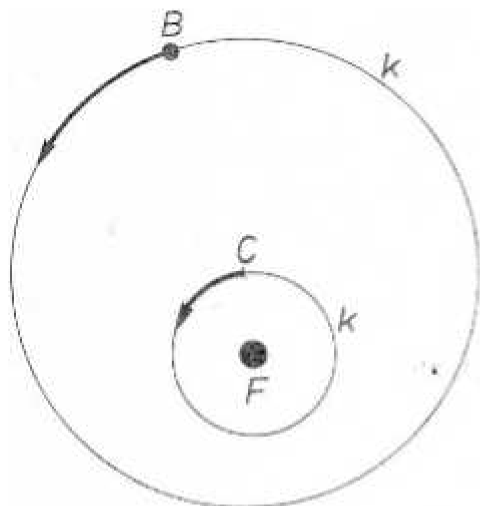
Most pedig már igazán idekívánkozik ez utóbbi Apollóniosz-tétel megfordításának egy szép következménye, amelyet HEINRICH DÖRRIE *A diadalmas matematika* című könyvében olvastam, a magyar kiadás 240. oldalán *(155. ábra)*. A 180°-kal nem egyenlő *ASB* szög mindkét szárára a csúcsból kiindulva *n* egyenlő távolságot mérünk. Az osztópontokat a rajz szerint számozzuk meg a két száron ellentétes irányban. Ha most az azonos számokkal ellátott osztópontokat szakaszokkal kötjük össze, akkor egy parabola érintőseregét nyerjük. Ez a parabola a szög szárait éppen az *A* és a *B* pontban érinti.

A *Kónikán* kívül megmaradt még **APOLLÓNIOSZnak** *Az adott arányban metszésről* című könyve. Főleg **Papposz** értesít bennünket arról, hogy ezeken kívül még öt művet írt a „nagy geométer". Ezeket csak cím szerint ismerjük: *Az adott terület kimetszéséről, Az érintőkről, A síkbeli mértani helyekről, A neusziszről* és végül *A dodekaéder és az ikozaéder összehasonlításáról.* Tudjuk még, hogy írt a csavarvonalakról, az irracionális mennyiségekről és a gyors szállításról is. *Az érintőkről* szóló két könyvében szerepelnek az ismert Apollóniosz-feladatok. Ezekben három adott körhöz - amelyek mindegyike helyettesíthető egyenessel vagy ponttal is - érintőkört kell szerkeszteni.

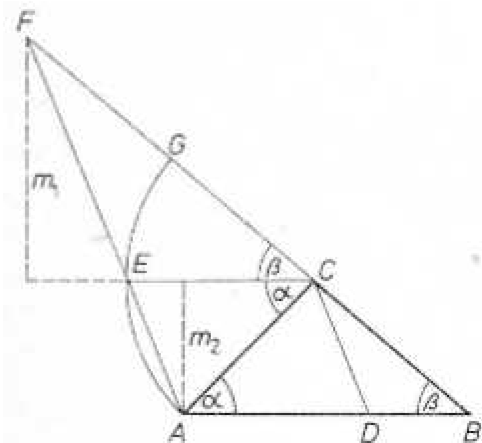
Hiányos lenne az APOLLÓNIOSZról alkotott kép, ha nem emlékeznénk meg csillagászati eredményeiről. Ezt matematikatörténeti keretben annál is inkább megtehetjük, mert csillagászati érdemei teljesen geometriai jellegűek. Említettük már, hogy tökéletesítette a holdmozgás elméletét, azonban a bolygómozgások ptolemaioszi rendszerét is találóbb volna apollónioszi rendszernek nevezni.



156. ábra



157. ábra



158. ábra

Amint EUDOXOSZnál láttuk, a szférák rendszere számos, a bolygókkal kapcsolatos kérdést nem tudott megválaszolni. Éppen ezért a több magyarázattal szolgáló apollónioszi rendszer terjedt el.

A bolygómozgás megértésére **Apollóniosz** kétféle elgondolást is javasolt. Az egyik, amelyet **Ptolemaiosz** is átvett, az epiciklusok rendszere, a másik az excentrikus körök rendszere volt. Az elsőnek a lényege az, hogy a *B* bolygó *(156. ábra)* a *C* középpontú *k* kör kerületén végez egyenletes körmozgást, miközben *C* a Föld középpontú *K* kört írja le ugyancsak állandó szögsebességgel. A *k* kört epiciklusnak, a *K* kört deferens körnek nevezik. A két körön a forgómozgás iránya megegyezik. - **Apollóniosz** másik elképzelése az excentrikus körök elmélete. E szerint a *B* bolygó a Földön kívüli *C* középpontú *k* körön kering *(157. ábra),* miközben a *C* centrum az *F* Föld körül végez egyenletes körmozgást a *K* körön. Amint látjuk, a két elgondolás között a szöveg nem tesz különbséget, csupán az ábrák érzékeltetik, hogy az első esetben az epiciklus sugara kisebb a deferens kör sugaránál, a második esetben pedig fordítva. **Ptolemaiosz** az epiciklusok rendszerét vette át és tökéletesítette tovább, bár megjegyezzük, hogy bizonyos továbbfejlesztést már **Apollóniosz** is végrehajtott. E rendszernél a sebességek alkalmas megválasztásakor a két körmozgás eredője eredményezhet olyan hurkolt mozgást is, amelyben lassuló és gyorsuló szakaszok váltakoznak. Ezt **Apollóniosz** számításokkal igazolta, melyeket **Ptolemaiosz** is

közölt nagy csillagászati és matematikai összefoglaló művében, az *Almagesztben*. Bizonyításához előrebocsátott egy segédtételt: A *158. ábra* *ABC* háromszögében legyen $AB > AC$. Mérjük fel az *AB* szakaszra az *AC*-nél nem kisebb *AD* távolságot. Igazoljuk, hogy

$AD : DB > \beta : \alpha$.

Az igazoláshoz válasszuk ki azt a határesetet, amelynél $AD = AC$. Rajzoljuk meg az ábrán látható *ADCE* paralelogrammát, valamint az *AE* és *BC* meghosszabbításával keletkezett *ABF* háromszöget, végül a C középpontú és *AC* sugarú *AEG* körívet. Nyilvánvaló, hogy az *ECF* háromszög területe nagyobb, mint az *ECG* körcikk területe, valamint az is, hogy az *ACE* háromszög területe kisebb az *ACE* körcikk területénél. Ezekből következik, hogy

$$\frac{\text{az } ECF \text{ háromszög területe}}{\text{az } ACE \text{ háromszög területe}} > \frac{\text{az } ECG \text{ körcikk területe}}{\text{az } ACE \text{ körcikk területe}}.$$

Ugyanez a területképletekkel:

$$\frac{EC \cdot m_1}{EC \cdot m_2} > \frac{EC^2 \pi \beta}{360} : \frac{EC^2 \pi \alpha}{360}.$$

Tekintve, hogy

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{EF}{AE}, \quad \text{azért} \quad EF : AE > \beta : \alpha.$$

Mivel azonban

159. ábra

EF : *AE* = *FC* : *CB* = *EC* : *DB* = *AD* : *DB,*

azért valóban $AD : DB > \beta : \alpha$, ami még inkább igaz, ha $AD > AC$.

Térjünk vissza ezután az epiciklusokhoz. **Az Apollóniosz** által igazolt tétel a *159. ábra* alapján a következő: Tegyük fel, hogy a *B* bolygóhoz tartozó látósugárnak az epiciklus belsejébe eső szakasza *AB,* a *C* pont szögsebessége φ, és a B bolygó szögsebessége az epicikluson ω. Ha teljesül az

$$\frac{AB}{2} : FA = \omega : \varphi$$

aránypár, akkor a bolygó az *A* helyen éppen az „előre”- és „hátra”-mozgás határán van, azaz az *A* pontban úgy látszik, mintha a bolygó állna.

A bizonyításhoz húzzuk meg az epiciklusnak az F-en átmenő átmérőegyenesét (*ECF*). Mérjünk fel az *A* pontból egy tetszőleges hosszú *AG* körívet, amely a rajzon most A-tól balra látható. Milyen irányban mozog a bolygó, miközben az epicikluson

megteszi a *GA* körívet? Rajzoljuk meg az *FGH, AC, GC* és *BG* szakaszokat is. Ekkor a *BGF* háromszögben $BA > BG$, tehát a segédtétel értelmében: $AB : AF > \alpha : \beta$ vagy $AB/2 : AF > \alpha : 2\beta$, azaz $AB/2 : AF > \alpha : \gamma$.

A feltevés azonban az, hogy

$$\frac{AB}{2} : AF = \omega : \varphi,$$

tehát

$\alpha : \gamma < \omega : \varphi$.

Így az ω szögsebességnek megfelelő α' nagyobb α-nál. Legyen ez a nagyobb α' az *AFK* szög. Miközben tehát a bolygó *t* idő alatt befutja a *GA* ívet, azalatt az epiciklus hátrafelé mozgatja azt a $\gamma = \omega t$ szögelfordulással, és a deferens előreviszi $\alpha' = \varphi t$ szögelfordulással. Mivel azonban a *GA* ívhez tartozó a negatív elforgási szög abszolút értékben kisebb, mint a bolygót magával ragadó epiciklus α' pozitív elforgási szöge, azért a bolygó a *C* pontnál ugyan lassabban, de pozitív irányban előremozog. - Ugyanígy látható be, hogy ha a *GA* ívet az *A* ponttól nem balra, hanem jobbra mérjük, akkor az *AG* ív befutása közben a bolygó visszafelé mozog. A pozitív és negatív irányú mozgást éppen az *A* pont választja el. Itt tehát a bolygó a Földről nézve állni látszik.

APOLLÓNIOSSZal kissé méltatlanul bánt az utókor. EUKLEIDÉSZ és Arkhimédész nevét Ptolemaioszéval együtt minden művelt ember ismeri, de APOLLÓNIOSZról kevesen hallottak. Ez talán azért van, mert a koordinátageometriával kapcsolatban rendszerint csak Descartes nevét emlegetjük és a geocentrikus világrendszert PTOLEMAIOSZhoz kapcsoljuk, teljesen megfeledkezve arról, hogy annak eredete APOLLÓNIOSZnál található meg. Szeretném, ha ez a néhány oldalas rövid ismertetés meggyőzte volna a kedves olvasókat arról, hogy az ókor nagy matematikusainak és csillagászainak névsorában Apollóniosz nem csupán nevének kezdőbetűje miatt áll az elsők közt.

MIÉRT ÁLLT MEG AZ ÓGÖRÖG MATEMATIKA FEJLŐDÉSE?

Eudoxosz, Eukleidész, Arkhimédész, Apollóniosz: az i. e. IV. és III. század nagy matematikusai. Ők tették ezt az időszakot a görög matematika aranykorává, amely nem esik egybe
Athénnak **Periklész** alatti virágkorával. Az ógörög matematika betetőzését kétségkívül az i. e. III. századi kortársak vagy majdnem kortársak: **Eukleidész, Arkhimédész** és **Apollóniosz** jelentik. Mindhármuk élete és tudományos működése jelentős mértékben kapcsolódik az alexandriai Muszeionhoz. Azt látva, hogy e nagyokat nem követték még nagyobbak vagy legalább ugyanakkorák, önkéntelenül arra gondolunk, hogy az okot az alexandriai iskola általános hanyatlásában kell keresnünk. Valóban, az alexandriai kultúra a III. században élte virágkorát. **Arkhimédész** és **Apollóniosz** barátjának, ERATOSZTHENÉSZnek a vezetése alatt a alexandriai Nagykönyvtár még mai mértékkel mérve is hatalmas irodalmi, művészeti és tudományos anyaggal rendelkezett. **Eratoszthenész** volt a könyvtár utolsó nagy költő-igazgatója. Utána a bizánci **Arisztophanész** következett, aki nem tévesztendő össze a vígjátékíró athéni **Arisz**TOPHANÉsszel, habár a hasonló nevű bizánci is irodalommal foglalkozott, de soha irodalmi művet nem írt. Az ő személyében jó kezekbe került a könyvtár, és az ott folyó munka lendülete sem tört meg. Nem volt azonban ilyen szerencsés az uralkodóváltás. III. **Ptolemaiosz Euergetészt** (a Jótevőt) i. e. 222-ben fia, IV. **Ptolemaiosz Philopatór** (Atyját szerető) követte a trónon. Uralkodása alatt kezdődött Egyiptom hanyatlása. A befolyásolható, gyengekezű uralkodó nehezen tudott megküzdeni a fejüket sűrűn felütő lázadásokkal, gazdasági és politikai nehézségekkel. Utódai alatt a helyzetet családi viszály is súlyosbította. Az i. e. 181. évben három testvér uralkodott: VI. **Ptolemaiosz Philométór** (Anyját szerető), a *„Fivér"* és nővérük, II. **Kleopátra,** aki **Philométór** felesége is volt. Ekkor a „világpolitikában” Egyiptomnak már nem volt szava. Az i. e. II. században Róma diktált. A testvérek trónviszálya folytán elmenekült **PHILOMÉTÓRt** is a rómaiak hozták vissza i. e. 163-ban, amikor is a *„Fivér"-nek* kellett menekülnie. Az ő napja akkor kelt fel újra, amikor **Philométór** elesett a szíriai hadjáratban. Ekkor TI. **Kleopátra** mindent elkövetett, hogy fia kerüljön a trónra. A trónörököst a hagyomány szerint a Nagykönyvtár igazgatója nevelte, az akkori szamothrakéi **Arisztarkhosz,** aki nem azonos a szamoszi ARISZTARKHOSSzal, a neves csillagásszal. A szamothrakéi **Arisztarkhosz** igen kiváló irodalmár és filológus volt, aki azonban

egyetlen költeményt sem írt. Amilyet szeretnék írni, olyan nem tudok - mondta - „amilyet tudnék, olyat meg nem akarok. Természetes, hogy a királyfi nevelője és vele az alexandriai művész és tudós társaság II. **Kleopátra** fiát támogatta. Alexandria polgárai azonban hazahívták a száműzetésében ugrásra kész *„Fivér”-t.* A polgárháború kitörését állítólag az éppen Alexandriában tartózkodó római követ gátolta meg úgy, hogy a "*Fivér*" VIII. **Ptolemaiosz** II. **Euergetész** néven király lett, feleségül vette nővérét, II. **Kleopatrát** és megölette új felesége fiát, aki VII. **Ptolemaiosz** néven egyetlen évig uralkodott. Miután a családi problémák ilyen megnyugtató megoldást nyertek, az új király hozzálátott megbosszulni mindazokat, akik nem az ő pártján állottak, ezek között elsősorban a Muszeion tudósait, művészeit. A tudós és idős **Arisztarkhosz** Küprosz szigetére menekült, és ott nemsokára meghalt. Az Egyiptomból száműzött tudósok és művészek Alexandria és a „Pocakos” számára - így gúnyolták a jó húsban levő királyt - nem a legjobb reklám voltak. VIII. **Ptolemaiosz** igyekezett rendbe hozni Egyiptom gazdasági viszonyait, de ehhez pénz kellett, és a háborúskodásban a kincstár vagyona amúgy is eléggé megcsappant. Az alexandriai iskola épületei, intézetei még álltak, de a hathatós anyagi támogatás megszűnt. Az alexandriai művészetek és tudományok aranykora véget ért.

Így lehetett ez másutt is. A királyok és fejedelmek mindig szerettek dicsekedni gazdagságukkal, fényes udvartartásukkal, székhelyük díszességével, nagyságuk megörökítésével, és kezdetben akarva-akaratlan megélhetést nyújtottak az építészeknek, szobrászoknak, festőknek, költőknek, zenészeknek, majd a filozófusoknak és más tudósoknak is. Aztán valamiféle versengés is kialakult közöttük a művészetek és tudományok pártfogásában. Így született meg Alexandria után Pergamonban az Attalidák kultúrközpontja, vagy így virágzottak fel **Periklész** Athénjában a művészetek, vagy így jutott gondtalan kutatáshoz II. **Hierón** király udvarában **Arkhimédész,** és így biztosított **Nagy Sándor** ARISZTOTELÉSZnek szinte a mai képzeletet meghaladó módon pénzt, eszközt, embert. A görög kultúra fejlődésében ezek lényeges lehetőségek voltak. Amikor azonban a gazdasági nehézségek és háborúk a kincstárt nagyon igénybe vették, akkor a tudományok anyagi támogatása megszűnt, és legtöbbször az irántuk való érdeklődés is. Ennek az állami támogatású tudományos életnek nagy előnye volt elsősorban maga a lehetőség, nagy hátránya az uralkodótól való függőség, amely például sok tehetséges költőt nem hagyott érvényesülni csak azért, mert nem tudták eléggé dicsérni kenyéradó gazdájukat. Természetesnek látszik tehát, hogy az i. e. III—II. század háborúktól terhes világában az anyagi és eszmei támogatás híján visszaesett a matematika fejlődése is.

Az alexandriai könyvtár elnéptelenedett, régi pezsgő élete megszűnt, és soha vissza nem tért. A hellenizmus időszaka lejárt, a római világ váltotta fel. A rómaiak pedig nem tudományművelő nép voltak. Nagyra vitték a technikában, a szervezésben, a művészetek közül érdeklődtek az építészet, szobrászat és irodalom iránt, de a természettudományok és a matematika általuk nem fejlődött. Egyetlen nagy római matematikust sem ismerünk. Róma nem lett a matematika új központja, a centrum továbbra is a hanyatló Alexandria maradt, de már a régi nagyok nélkül. Az alexandriai iskola megszűnését siettette az is, hogy i. e. 47-ben **Julius Caesar** a könyvtárt felgyújtana, és az értékes papirusztekercsek a lángok martalékává lettek. Azonban az „inter arma silent musae” (fegyverek közt hallgatnak a múzsák) római közmondás csak részben magyarázza a matematika hanyatlását. A külső okok mellett belsők is rejtőztek, magában a görög

matematikában.

Annak idején megokoltuk, hogy a görög matematika miért vált teljesen geometriai színezetűvé. Az algebrai szimbólumok, jelölések nem fejlődtek ki, pedig a babiloni matematikában ennek az iránynak megvoltak a csírái és lehetőségei. A babiloni számoló *a*b-t* nevezte ugyan *ab* téglalapnak, de nevezte szorzásnak is, használva a művelet ékírásos jelét. A görög matematikus már csak *ab* téglalapot mondott. Náluk az a^2 csak az *a* oldalú négyzetet, az a^3 csak az *a* élű kockát jelentette. Ugyanígy a √(*ab)-t* nem kiszámították, hanem megszerkesztették, tehát nem az *a* és *b* számok mértani középarányosát határozták meg, hanem megszerkesztették annak a négyzetnek az oldalát, amely négyzet területe akkora, mint az *ab* téglalapé. Babilonban nem okozott problémát az, hogy a mértani közép számára csak közelítő értéket kaptak. Viszont kidolgoztak egy olyan eljárást, amellyel a közelítést pontosítani lehetett. A gyakorlat számára ez teljesen elegendő volt. Náluk fel sem merült a görög „arrhéton” (kimondhatatlan, ma irracionális) számfogalma. A görög számfogalom és pontossági igény azonban beleütközött ebbe a fogas kérdésbe. Ők leszűkítették a szám fogalmát a természetes számokra, illetve nem terjesztették ki már a törtekre sem. Így aztán a mértani közepet, de már a számtani középarányost sem tudták mindig „számmal” kifejezni, de a megfelelő szerkesztést mindig végre tudták hajtani. A számfogalomra alapozott logikai szigor, vagyis az eleai filozófiára támaszkodás térítette el a görög matematikusokat a geometria felé. Ezért öltöttek náluk geometriai külsőt még a legalgebraibb jellegű feladatok is, amint erre a püthagoreusoknál és EUKLEIDÉSZnél is rámutattunk.

Ez azonban azzal járt, hogy a görög, ún. geometriai algebra akadályokat, korlátokat emelt önmagának. Ez két irányban is megmutatkozott. Egyfelől bizonyos algebrai feladatok geometriailag nem voltak értelmezhetők, másfelől a matematika geometriai, szimbólumokat nélkülöző nyelve körülményessé, nehezen érthetővé vált, a gondolatmenetet is szinte áttekinthetetlenné téve. Az első korlát nem volt túl tragikus, legfeljebb összeszűkült a matematika kutatási területe, hiszen az elsőfokú kifejezést tekinthették szakasznak, a másodfokút síkidomnak, a harmadfokút pedig testnek, de a negyedfokúhoz már nem találtak megfelelő geometriai

fogalmat. Így például foglalkozhattak még a geometriai alakba öltöztetett harmadfokú egyenlettel, de például a negyedfokú egyenlet számukra nem is létezhetett.

Ennél nagyobb akadálya volt a fejlődésnek a második jelenség: a matematikai nyelv bonyolultsága. Különösen a leírt szövegek, tételek, bizonyítások megértése roppant fáradságos, bogarászós munka; nemcsak azt kívánta meg az olvasótól, hogy tökéletesen eligazodjék a területátalakítások és az aránypárokkal való zsonglőrködés útvesztőjében, hanem kitartást is követelt. Az olvasónak nemcsak jó matematikusnak kellett lennie ahhoz, hogy megértse az írott szöveget, hanem türelmes embernek is. Ezt a nehézséget jól megérthetjük mi, akik az áttekinthető és könnyen kezelhető jelrendszerek birtokában különösebb matematikai tehetség nélkül is, aránylag jól tudjuk követni a kiváló matematikusok gondolatmeneteit. Az ismeretátadás szempontjából még ma is, de különösen az ógörög matematikában nagy könnyebbséget jelentett az élőszóval való közlés. A szóbeli magyarázat nemcsak szuggesztívebb, mint a szabatosan fogalmazott, de személytelen, írott szöveg, hanem bármikor félbe is szakítható. Megvan a lehetőség a közbekérdezésre. A mester és tanítvány közvetlen, eleven viszonyát sohasem pótolhatja a holt szöveg. Érthető tehát, hogy elég volt néhány olyan év vagy évtized, amikor egy-egy tudományos központban háború vagy más ok miatt lehetetlenné vált az ismeretek élőszóban való átadása, és a csak könyvekre utalt generáció elé a matematikai nyelv bonyolultsága miatt szinte leküzdhetetlen megértésbeli akadályok tornyosultak. Ilyen körülmények között nagy teljesítménynek számít az elődök alkotásainak puszta megértése is. A hellenizmus utáni időszak matematikusainak fő tevékenysége így szinte szükségszerűen arra korlátozódott, hogy a korábbi matematikai műveket kommentálják, magyarázzák. Tevékenységük nem lebecsülendő, működésük igen értékes volt a további fejlődés szempontjából.

A külső politikai, valamint a belső elvi (filozófiai) és módszertani okok együttese ad magyarázatot arra, hogy a geometriába burkolt algebrai gondolkodásmóddal EUKLEIDÉSZen, ARKHIMÉDÉSZen és APOLLÓNIOSZon már nem lehetett túljutni. Ők elértek az ógörög matematika útjának a végére. Ez az út tovább már járhatatlannak bizonyult. Sok tekintetben vissza kellett térni a

kiinduláshoz, hogy új utakat törve, az ógörög matematikánál tovább lehessen lépni.

Még ne kövessük azonban a fejlődés e további szakaszát. Eddig nem említettünk néhány olyan matematikust, akik érdemekben nem vetélytársai ugyan a legnagyobbaknak, de nélkülük jelentősen szegényebb lenne az ókori matematikáról festett kép. Jó részük előbukkan, ha áttekintjük az ógörög csillagászat fejlődését, hiszen a csillagászok nélkülözhetetlen eszköze a megfigyelésen kívül már akkor is a matematika volt. Püthagorasz a csillagászatot még egyenesen a matematika birodalmába utalta, de a későbbi csillagászok is egy kicsit, olykor nagyon is, megérdemlik a matematikus jelzőt mindmáig.

A GÖRÖG CSILLAGÁSZOK „TRIGONOMETRIÁJA”

A GÖRÖG CSILLAGÁSZAT KEZDETEI

Hérodotosz görög történetíró mondja el, hogy a lídek és a médek váltakozó sikerrel zajló harcában egyszer csak elsötétült a Nap, és a megrémült katonákat nem lehetett további küzdelemre serkenteni. Ez pedig történt az i. e. 585. évben, sejthetőleg május 28-án. **Hérodotosz** azt is megjegyzi, hogy ezt a napfogyatkozást a milétoszi **Thalész** előre megjósolta. A görög csillagászatról ez az első híradás, és ez arról árulkodik, hogy az i. e. VI. századi **Thalész** már tekintélyes mennyiségű megfigyelési adat birtokában lehetett, amelyet valószínűleg a babiloni csillagászoktól vett át, és tisztában volt a napfogyatkozás jelenségével. Bizonyára lehettek saját észleletei is. Ezt valószínűsíti az a legenda, amely szerint kinevették, midőn az eget vizsgálva nem vette észre lába előtt az árkot. Arról nem tudunk, hogy világképet alkotott volna, de a napfogyatkozást, úgy látszik, meg tudta magyarázni. Akkor pedig a Napot fényforrásnak tekintette, amely a sötét Hold árnyékát a Nap által megvilágított Földre vetíti.

A milétoszi Anaximandrosz, Thalész tanítványa, Püthagorasz kortársa, a földfelszín görbületéről, amelyet az észak-déli irányba haladó hajósok a csillagos ég változásából állapítottak meg, arra következtetett, hogy a Föld henger alakú, és az éggömböt kitöltő levegőben lebeg. Ez a levegő feljebb felhőkbe sűrűsödik, sőt még nagyobb magasságokban a földhengert körülölelő, gyűrű

alakú levegőcsöveket alkot, amelyek belsejét tűz tölti ki. Ezek a csövek itt-ott lyukasak, és e nyílásokon a Földről csillagokként észleljük a belsejükben lobogó lángokat. A két legközelebbi cső nyílásán kiömlő világosság a Hold és a Nap fénye. Ez az anaximandroszi világkép már a távolságokat is megbecsüli. E szerint a Hold tűzcsöve kétszer, a Nap gyűrűje háromszor, a csillagok csövei kilencszer messzebb vannak a Földtől, mint amekkora a földhenger sugara. Amikor a Nap képét létrehozó nyílás valami miatt eltömődik, akkor jön létre a napfogyatkozás.

Thalész és **Anaximandrosz** a ión filozófiai iskola más **tudósai**val együtt az égitestek rendszerének felépítését igyekeztek valamilyen, a megfigyeléseken alapuló természetes okra visszavezetni. Ez merőben más volt, mint az egyiptomi és a babiloni csillagászok törekvése. Ezek az istenként tisztelt égitestekkel kapcsolatban fel sem tettek olyan kérdéseket, amelyek hasonló elméletekhez vezethettek volna. Őket kielégítette a mitológiai magyarázat, és gondos megfigyeléseiket is csak azért végezték nagy szorgalommal, hogy naptárt készíthessenek, és segítségével pontosan megállapíthassák - többek között - az ünnepek idejét, így kedveskedve isteneiknek. Ezek a megfigyelések azonban felbecsülhetetlen értéket jelentettek a görögök kezében, akik bennük már a természeti törvényeket keresték.

A ión iskola kezdetleges elképzeléseitől részben előre-, részben hátralépést jelentettek az eleai filozófia világképei. Természettudományos szempontból visszalépés az, hogy az égitesteket isteni eredettel, tehát tökéletességgel ruházták fel, azaz bizonyos tulajdonságaikat mintegy eleve előírták, például azt, hogy csak egyenletes körmozgást végezhetnek. Ez azonban nem nagy tragédia, hiszen ez az elv az akkori misztikus buroktól megszabadítva, lényegében azt az igyekezetei mutatja, hogy a természettörvényeket lehetőleg egyszerű matematikai formában fogalmazzuk meg. Ez a törekvés pedig a legnagyobb fizikusok munkáiban végigkövethető mind a mai napig. Határozott előrelépés volt az eleai iskolára alapozott püthagoreusoknak az a szándéka, hogy mindent számokkal, azaz matematikai formában fejezzenek ki. Így született meg az első fizikai, pontosabban az első ismert hangtani kísérlet: a húr hosszának mérőszámával jellemezték a hangok közti viszonyt.

A püthagoreusi szemlélet hatott a csillagászatra, illetőleg a világkép kialakulására is. Az egész ókorban alapvető követelmény, szinte axióma volt az, hogy az égitestek csak körpályán mozoghatnak, és mivel örökkévalók, azért nem lehet oka sem lassulásuknak, sem gyorsulásuknak, azaz a körpályán egyenletesen mozognak. Még

Galilei is úgy képzelte el a vízszintes irányú tehetetlenségi mozgást, hogy az párhuzamos a Föld felszínével, tehát valójában körmozgás. Sőt még **Kopernikusz** sem tudott elképzelni nem körmozgásokkal leírható bolygópályát. **Kepler** volt az első, aki szakított ezzel a „kikötéssel”. A kezdeti püthagoreusi világkép szerint a Föld körül kering a Nap, a Hold és az akkor ismert öt bolygó: a Merkur, a Mars, a Vénusz, a Jupiter és a Szaturnusz. Egy későbbi elképzelés **(Philolaosz)** szerint a felsorolt égitestek a Földdel és egy ún. Ellenfölddel együtt különböző sugarú körpályákon keringenek egy központi tűz körül. Ezt mi a Földről nem láthatjuk, mert az Ellenföld úgy kering, hogy állandóan a Föld és a központi tűz között van. Nem láthatjuk az Ellenföldet sem, mert felénk mindig a sötét felét fordítja.

Platón és Arisztotelész a geocentrikus szemlélet hívei voltak, különösen azután, hogy annak elsődleges alakját sikerült tökéletesíteni. Mint láttuk, Eudoxosz volt az első, aki Föld-középpontú egyenletes körmozgások összetevésével - a szférák rendszerével - olyan világmodellt teremtett, amely már sok megfigyelt égi jelenséggel összhangban állt. APOLLÓNIOSZnál ennél is jobb geocentrikus rendszert láttunk - az epiciklusok és a deferens körök rendszerét -, amely még több helyes magyarázattal szolgált, és tovább is lehetett fejleszteni. Továbbfejlesztése vezetett el a ptolemaioszi világképhez, amely KOPERNIKUSZig, illetve KEPLERig biztosította a csillagos égen való tájékozódást a gyakorlati szükségleteknek megfelelően (időszámítás, hajózás stb.). Ptolemaiosz geocentrikus rendszere a maga epiciklusaival és excentrikusan keringő köreivel aránylag jó mechanikai leírását adta az égitestek mozgásának, és arra is képes volt, hogy előre megmondja valamely bolygó helyét egy megadott időpillanatban. Ugyanakkor nem árult el semmit a bolygómozgás dinamikájáról, azaz nem felelhetett arra a kérdésre, hogy miért úgy mozognak az égitestek, ahogy mozognak. Mozgásuk leírását azonban olyan tökélyre vitte, amilyen a geocentrikus elképzelés esetén egyáltalán

lehetséges. A gyakorlatban lényegesen megfelelőbb volt, mint az i. e. III. századi ARISZTARKHOSZnak a mai szemmel nézve korszerűbb, heliocentrikus elmélete.

A SZAMOSZI ARISZTARKHOSZ (i. e. 310?-230?)

Az ókor **KOPERNIKUSZA** Szamosz szigetén született. Még fiatalon eljutott Alexandriába, ahol a kor neves fizikusának, **SZTRATÓNnak** a tanítványa lett, és végképp letelepedett a Ptolemaioszok városában. Azt tanította, hogy a Nap és az állócsillagok nem mozognak, a Föld pedig a többi bolygóval együtt a Nap körül körpályán kering. Állította azt is, hogy a saját tengelye körül is forgó Föld keringési síkja és az égi egyenlítő síkja szöget zárnak be. Ezért az elméletért **Kleanthész** görög sztoikus filozófus felszólította a hellén világot, hogy **Arisztarkhoszt** mint vallástagadót helyezzék vád alá. A korai heliocentrikus világképet azonban nem vallási okok miatt nem fogadták el, hanem azért, mert a közvetlen megfigyelésekkel ellenkezett. Az ellenérvek között akkor még cáfolhatatlannak bizonyult az, amely szerint a Nap körül körpályán keringő Földről nézve az állócsillagok az égbolton kis köröket kell hogy leírjanak. Az állócsillagoknak ezt a mozgását (parallaxisát) azonban nem észlelték. Nem gondolhattak arra, hogy az állócsillagok parallaxisának észrevehetetlenségét megmagyarázza a Földpályától való elképzelhetetlenül hatalmas távolságuk és a megfigyelési lehetőségek korlátozott volta. Az állócsillagok parallaxisát először csak 1837-ben észlelte **Friedrich Wilhelm Bessel** (1784-1846) német csillagász. **ARISZTARKHOSZt** mégis az ókor legnagyobb csillagászai között tartjuk számon, mert heliocentrikus elméletén kívül más csillagászati érdemekkel is dicsekedhet. Ezeket azonban a görög trigonometria történetének keretei között szeretném felsorolni.

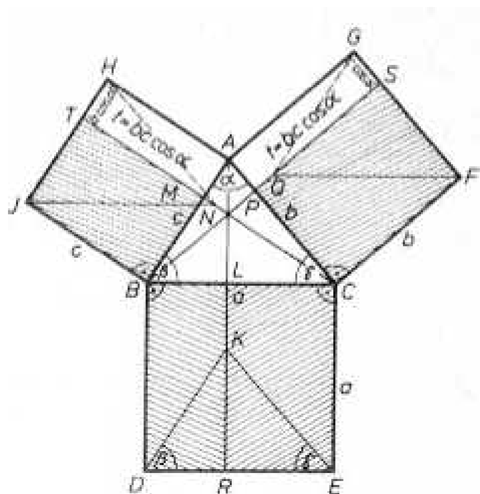
AZ ÓGÖRÖG TRIGONOMETRIA

Tisztában vagyunk azzal, hogy egy tudomány vagy tudományág megszületése általában nem egyetlen ember érdeme. A trigonometria csírái már a görögök előtti korszakban fellelhetők. A babiloni vagy az egyiptomi csillagászatban már számoltak a hasonló háromszögek oldalhányadosaival. Ebben a fejlődési szakaszban azonban, mivel a szög, a szögmérés fogalma és eszközei nagyon fejletlenek voltak, inkább trilaterometriáról (háromoldal-

mérésről), mint trigonometriáról (háromszög-mérésről) kell beszélnünk. Először a görögöknél találkozunk annak a rendszeres kutatásával, hogy milyen összefüggés van a körben a középponti szög és a hozzá tartozó húr hossza között. **Hippokratész** idejében már megszokott volt, hogy a körben a középponti és a kerületi szög nagyságát a hozzájuk tartozó húrral jellemezzék. Valószínű, hogy **Eudoxosz** a Föld méreteinek, valamint a Nap és a Hold viszonylagos távolságának a megbecsüléséhez szögmérést használt.

Érdekes megfigyelni, hogy a trigonometriai ismeretek milyen korán jelentkeztek az elemi geometria köntösében, szinte rejtetten. Erre kitűnő példa **Eukleidész** *Sztoikheiájában* a II. könyvből a 12. és a 13. tétel. A 13. tétel, amely hegyesszögű háromszögre vonatkozik, könnyebben átlátható, azért ezzel kezdem. **Eukleidész** tömör szövegétől elszakadva, a tétel így szól: Valamely *ABC* hegyesszögű háromszögnél a legnagyobb, a hegyesszöggel szembeni *BC* oldalra rajzolt négyzet területe kisebb, mint a másik két oldal fölé rajzolt két négyzet területösszege.

A különbség előállítható, ha megszerkesztjük azt a téglalapot, amelyet az *AB* (vagy az *AC)* oldal fölé rajzolt négyzetből a *C* (vagy a *B)* csúcshoz tartozó magasság egyenese vág ki. A szóban forgó különbség e téglalap területének a kétszerese. A *160. ábra* szerint tehát a tétel így fogalmazható:



160. ábra

$t_{BCED} = t_{ACFG} + t_{ABJH} - 2t_{MAHT}$

Az állítás helyessége az ábráról leolvasható:

$t_{DRLB} = t_{DKAB} = t_{BCNJ} = t_{BMTJ}$

Tehát

$t_{DRLB} = t_{BMTJ}$

Ugyanígy:

$t_{RECL} = t_{CFSP}$

Ezek szerint:

$t_{BCED} = t_{DRLB} + t_{RECL} = t_{BMTJ} + t_{CFSP} = t_{BAHJ} - t_{CFGA} - t_{PSGA}$.

Ezután vegyük tekintetbe, hogy QG || AB és HN || AC, ekkor

$t_{PSGA} = t_{BAGQ} = t_{HACN} = t_{MAHT}$

azaz

$t_{PSGA} = t_{MAHT}$.

Így valóban kimondható, hogy:

$t_{BCED} = t_{BAHJ} + t_{CFGA} - 2t_{MAHT}$.

E bizonyítás befejező szakaszában a területátalakítás helyett alkalmazzuk az akkor még nem ismert szögfüggvényeket:

Az *ABP* háromszögből: $AP = c * \cos \alpha$, és így $t_{PSGA} = bc * \cos \alpha$.

Az *ACM* háromszögből: $AM = b * \cos \alpha$, és így $t_{MAHT} = bc * \cos \alpha$.

A két utóbbi eredményt összehasonlítva: $t_{PSGA} = t_{MAHT}$.

Eukleidész idézett tételében pedig ráismerhetünk az

$a^2 = b^2 + c^2 — 2bc * \cos \alpha$

koszinusztételre.

A *Sztoikheia* II. könyvének 12. tétele ugyanezt fogalmazza meg tompaszögű háromszögre. Az előbbi gondolatmenetet értelemszerűen erre az esetre ismételve, a *161. ábra ABC* tompaszögű háromszögére beláthatjuk, hogy

$t_{BCED} = t_{ACFG} + t_{ABJH} + 2t_{MAHT}$.

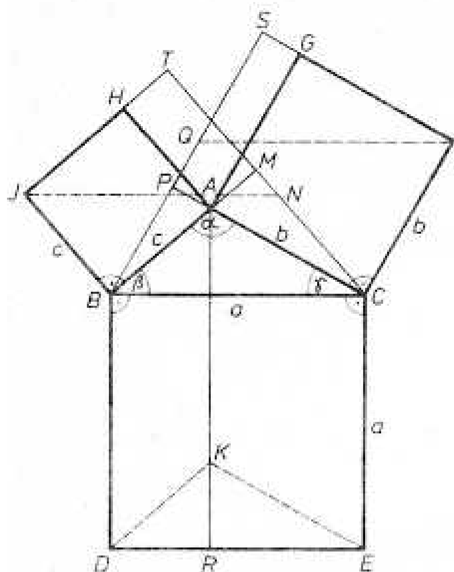
vagy trigonometrikus alakban:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc * \cos(180° - \alpha)$,

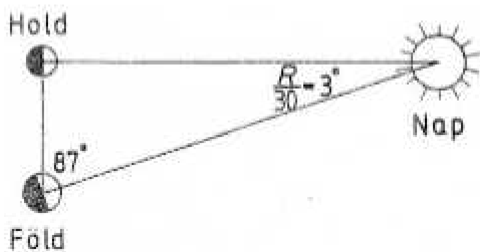
illetve:

$a^2 = b^2 + c^2 — 2bc * \cos\alpha$.

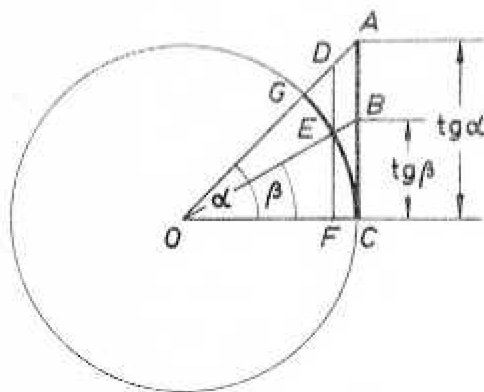
Amint látjuk, **Eukleidész** fenti két tételét nyugodtan tekinthetjük trigonometriai tételnek, bár akkor a trigonometria szó a mai értelmében még nem létezett. Úgy gondolom, felesleges felhívni a figyelmet arra, hogy speciális esetben a fenti két tétel, amikor ti. az α szög derékszög, a Pitagorasz-tételt szolgáltatja, illetőleg hogy a tárgyalt tételek a Pitagorasz-tétel általánosításai, aminthogy így szerepeltek már EUKLEIDÉSZnél is.



161. ábra



162. ábra



163/a ábra

Bizonyára még számos példát lehetne találni arra, hogy a görög geometria valamelyik tétele trigonometrikus formában is megfogalmazható, mégis az alexandriai csillagászok, nevezetesen ERA**toszthenész** és a szamoszi **Arisztarkhosz** foglalkoztak először következetesen azzal a kérdéssel, hogy mi az összefüggés a körben a központi szög és a hozzá tartozó húr között. Ez már mai szemmel nézve is igazi trigonometriai feladat.

ARISZTARKHOSZnak csak egyetlen kis tanulmánya maradt fenn, de ennek vitán felül matematikai értékei is vannak. Címe: *A Nap és a Hold méreteiről és távolságáról.* Ebben ma is helyesnek ismert módszerrel határozta meg a Föld-Nap és a Föld-Hold távolságok arányát. Abból a megfigyelésből indult ki, hogy amikor a Földről a holdfogyatkozás egy időpontjában a Holdnak éppen

a felét látjuk, akkor az a szög, amelyet a Hold-Nap távolság bezár a Nap-Föld távolsággal, éppen a derékszögnek a harmincad része. Eszerint a *162. ábrán* látható *HFN* szög 87°. **Arisztarkhosz** bebizonyította, hogy az *FNH* derékszögű háromszög átfogója nagyobb, mint a *HF* befogó 18-szorosa, de kisebb, mint a 20-szorosa. Ez lényegében a sin 3° megbecslése, hiszen a mai jelölésekkel azt mondja ki, hogy

$$\frac{1}{20} < \sin 3° < \frac{1}{18}.$$

-

A bizonyításhoz segédtételül használta az akkor már ismert

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

egyenlőtlenséget, ahol $90° > \alpha > \beta > 0$. Ezt ő nem is bizonyította.

Arisztarkhosz segédtételét beláthatjuk figyelve a 163. ábrát. Ennek *a)* része szerint

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{DF} = \frac{OC}{OF} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{EF}.$$

Így

$$\frac{DF}{EF} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{T_{OEC}}{T_{OEF}} > 1 > \frac{T_{OEG}}{T_{OED}},$$

ahol *T* az indexében szereplő síkidom területe. Átrendezve:

$$\frac{T_{OED}}{T_{OEF}} > \frac{T_{OEG}}{T_{OEC}}.$$

Mivel azonban

$$\frac{T_{OED}}{T_{OEF}} = \frac{ED}{EF} \quad \text{és} \quad \frac{T_{OEG}}{T_{OEC}} = \frac{\overparen{EG}}{\overparen{EC}},$$

azért

$$\frac{ED}{EF} > \frac{\overparen{EG}}{\overparen{EC}}.$$

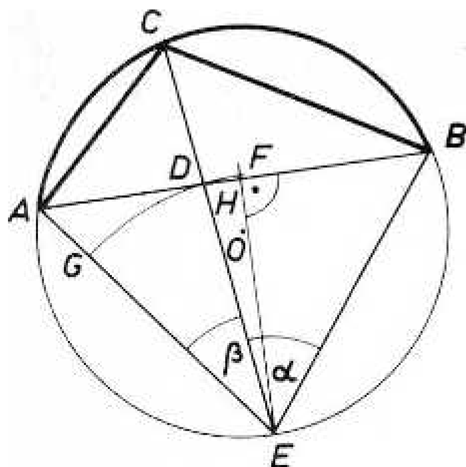
Mindkét oldalt növelve 1-gyel:

$$\frac{ED + EF}{EF} > \frac{\overparen{EG} + \overparen{EC}}{\overparen{EC}},$$

vagy

$$\frac{DF}{EF} > \frac{\overparen{CG}}{\overparen{EC}},$$

ahonnan



163/b ábra

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}>\frac{\alpha}{\beta},\quad \text{ha}\quad 90°>\alpha>\beta>0.$$

Ezzel kimutattuk a tétel első felét.

A tétel második része a *163. ábra b)* feléről olvasható le. Ez a részábra a következőképpen készült. Felrajzoltuk az *r* sugarú körbe a közös végpontú *BC* és *AC* húrokat, amikor is *BC*>*AC*. *Az ACB* szög felező egyenese metszi az *AB* húrt a *D* pontban és a kört az *E* pontban. Az *E* pontot összekötöttük az *A* és a *B* pontokkal *(EA*=*EB),* és merőlegest is állítottunk belőle az *AB* húrra, amelyel a *H* pontban metsz. Végül megrajzoltuk az *ED* sugarú *GF* körívet az E centrumból az *AE* és az *EH* meghosszabbítása közé. A nagysági viszonyokat tekintetbe véve:

$$\frac{T_{EDH}}{T_{EDG}}<\frac{T_{EDF}}{T_{EDG}}\quad \text{és}\quad \frac{T_{EDH}}{T_{EDG}}>\frac{T_{EDH}}{T_{EDA}},$$

tehát

$$\frac{T_{EDF}}{T_{EDG}}>\frac{T_{EDH}}{T_{EDA}},$$

vagy

$$\frac{\widehat{DF}}{\widehat{DG}} > \frac{DH}{DA}.$$

Mindkét oldalt 1-gyel növelve

$$\frac{\widehat{DF}+\widehat{DG}}{\widehat{DG}} > \frac{DH+DA}{DA}.$$

Mindkét oldal kétszerese:

$$\frac{2\widehat{GF}}{\widehat{DG}} > \frac{2AH}{DA} = \frac{AB}{DA}.$$

Az oldalakat 1 -gyel csökkentve

$$\frac{2\widehat{GF}-\widehat{DG}}{\widehat{DG}} > \frac{AB-DA}{DA},$$

vagy

$$\frac{\widehat{DF}+\widehat{GF}}{\widehat{DG}} > \frac{DB}{DA} = \frac{BC}{AC}.$$

Ebből

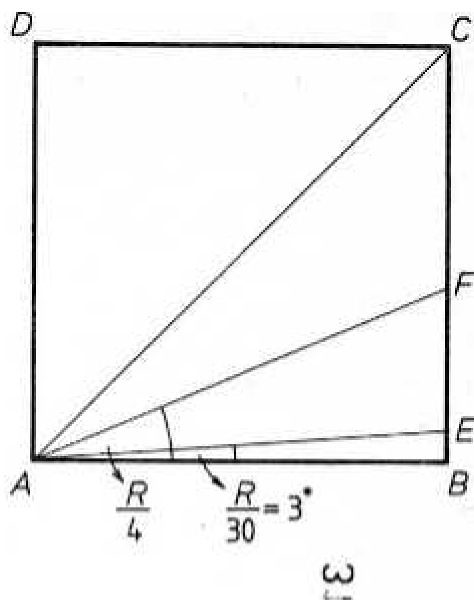
$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{BC}{AC}.$$

BC azonban 2r * sin α és *AC*=*2r* * sin β, tehát

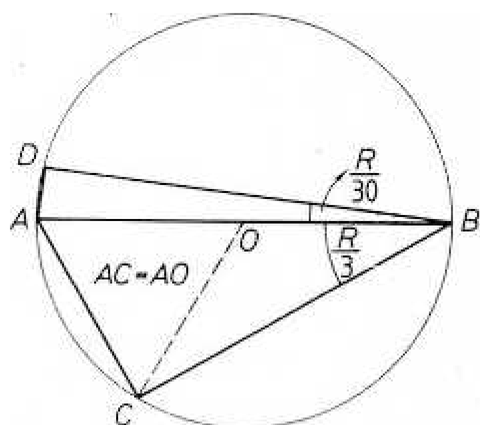
$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

összefoglalva:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} > \alpha > \beta > 0.$$



164. ábra



165. ábra

Az 1/20 < sin 3° < 1/18 egyenlőtlenség bizonyításához Arisztar**khosz** először a segédtétel bal oldali részét alkalmazta a derékszög negyed- és harmincadrészére. A két szöget ugyanabban a négyzetben tüntette fel a *164. ábra* szerint. Az egyszerűség kedvéért legyen ez egységoldalú négyzet.

Az ábrán az *AF* szakasz a *CAB* szög felezője, tehát az *FAB* szög a derékszög negyede, azaz R/4. Az *EAB* szög 3°-os, azaz R/30.

A segédtétel bal oldala szerint:

$$\frac{BF}{BE} > \frac{R}{4} : \frac{R}{30} = \frac{15}{2}. \qquad \text{(a)}$$

Az *ABC* háromszögre alkalmazott szögfelezőtétel értelmében:

$$CF : FB = AC : AB = \sqrt{2} : 1 = \sqrt{50} : 5,$$

tehát

CF : FB > *7* : 5.

Ebből:

(CF+FB) : FB > *(*7+5) : 5,

azaz

$$\frac{CB}{FB} > \frac{12}{5}. \qquad \text{(b)}$$

Az (a) és (b) egyenlőtlenségek szorzatából:

$$\frac{CB}{BE} > 18.$$

Ugyanaz aránypárral: *AB : BE* > 18 : 1, mivel *CB*=*AB.*

Ha ezt az eredményt a *162. ábra* derékszögű háromszögére vonatkoztatjuk, akkor

$HN : FH > 18 : 1$,

és akkor még inkább igaz, hogy $FN : FH > 18 : 1$, ami a bizonyítandó állítás első része.

Az állítás második részének igazolásához Arisztarkhosz a segédtétel egyenlőtlenségének a jobb oldalát alkalmazta a 165. ábrán feltüntetett R/30 és R/3 kerületi szögekre. A rajzon AB a kör átmérője. Legyen ez az egyszerűség kedvéért egységnyi. Így

$$AC : AD < \frac{R}{3} : \frac{R}{30} = 10 : 1.$$

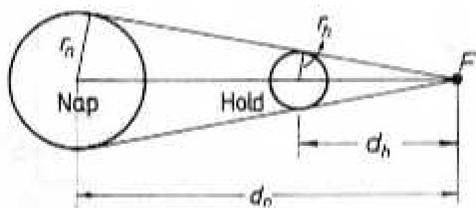
Mivel $AB = 2AC$, azért a legutóbbi arányegyenlőtlenségből:

$AB : AD = 2AC : AD < 20 : 1$.

Ha eredményünket ismét a *162. ábrára* vonatkoztatjuk, akkor $FN : FH < 20 : 1$,

ami pedig a bizonyítandó állítás második része.

A gondolatmenet lényege tehát a sin 3° megbecslése volt. Annak ellenére, hogy a számítás elvileg kifogástalan, az eredmény a mai méréseink szerint mégsem fogadható el, mert az *FHN* derékszögű háromszög F-nél levő szöge nem 87°, hanem 89° 50', tehát a Föld-Nap távolság kb. 400-szor akkora, mint a Föld-Hold távolság.



166. ábra

Arisztarkhosz azt is tudta, hogy amilyen az arány a Föld-Nap távolság és a Föld-Hold távolság között, ugyanakkora a Nap sugara és a Hold sugara között is. Ez abból a megfigyelésből

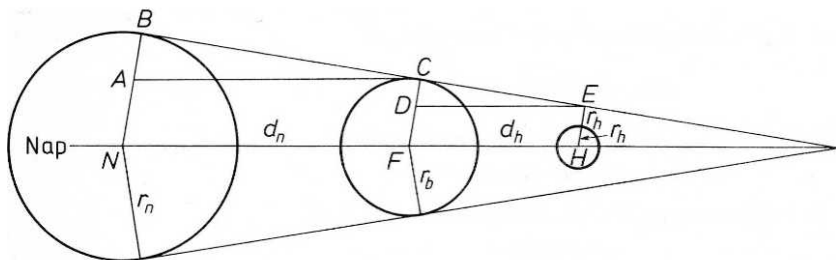
következik, hogy a Földről a Nap is, a Hold is megközelítően ugyanakkora szögben látszik *(166. ábra).* **Arisztarkhosz** ezt a szöget nagyon pontatlanul 2°-nak mérte a helyes 0,5° helyett. A megfigyelés szerint tehát a Nap sugara (r_N) úgy aránylik a Hold sugarához (r_H), mint a Napnak a Földtől való távolsága (d_N) a Holdnak a Földtől való távolságához (d_H). Ehhez csatlakozott még **ARISZTARKHOSZnak** az az észlelete, hogy a Hold távolságában a Földnek a Nap által vetett árnyékkúpja kb. kétszer olyan átmérőjű, mint a Hold átmérője. Ha a *167. ábrán* elképzeljük azt a helyzetet, amelyben a Föld éppen a Nap és a Hold között van, akkor az *ABC* és a *DCE* hasonló háromszögekből:

$(r_F - 2r_H) : (r_N—r_F) = d_H : d_N.$

Arisztarkhosz becsléséhez igazodva, megközelítően legyen $d_N = 19d_H$, akkor $r_N = 19r_H$. Ilyen adatokkal $r_H = 20/57*r_F$ és $r_N = 20/3*r_F$. Ezeket az értékeket **Arisztarkhosz** két korlát közé szorítással közelítette meg. Így az ő becslései: $38/6 < r_N < 43/6$ és $19/60 < r_H < 43/108$.

A mai mérések szerint: $r_N = 109r_F$ és $r_H = 0,27r_F$.

Ha ismernénk a Föld sugarát, r_F-et, akkor a közölt összefüggések lehetővé tennék a Nap és a Hold sugarának, valamint távolságuknak a meghatározását. Az első helyes gondolatmenetű mérés, amely megadta a Föld sugarát, illetve a Föld délkörének a hosszát, **Eratoszthenész** nevéhez fűződik.



167. ábra

A KÜRÉNÉI ERATOSZTHENÉSZ (i. e. 276:-196?)

A hellenizmus korának tipikus tudósa volt: széles érdeklődésű,

tehetséges és szorgalmas, ugyanakkor tökéletes világfi; **Arkhimédész** és **Apollóniosz** kortársa, NIKOMÉDÉSZnek **(124.** oldalon), a konhoisz feltalálójának nagy vetélytársa. **Arkhimédész** neki írta a ma *Módszer* néven ismert levelet. Nemcsak matematikus, hanem csillagász, fizikus, geográfus, filozófus, történész és költő is volt. Az afrikai Kürénében született. Kezdetben Alexandriában tanult KALLIMAKHOSZtól. Húszéves korában Athénba ment, ahol számos tudóssal ismerkedett meg, de főként a sztoikus **Arisztón** és az Akadémiához tartozó **Arkeszilaosz** tanítványa volt. Negyvenéves lehetett, amikor i. e. **235** táján Alexandria akkori uralkodója III. **Ptolemaiosz Euergetész** hazahívta, és megbízta az alexandriai Nagykönyvtár vezetésével. Ebben a hivatalában régi mesterét, **Kalli**MAKHOSZt követte. Ötvenéves korában III. **Ptolemaiosz** rábízta fiának a nevelését. Az uralkodó nehezen választhatott volna jobban. **Erasztoszthenész** hihetetlen sokoldalú és ennek ellenére eredményes tudós és művész volt. Ennek a szorgalmas, lelkiismeretes és ugyanakkor tehetséges polihisztornak még arra is jutott ideje, hogy a költészettel és a zenével is sikeresen foglalkozzék. Irigyei a Nagy Bétának nevezték. A görög ábécé második betűjével, amely egyszersmind a 2 jele is volt, azt akarták kifejezni, hogy e sok tudományt művelő férfiú minden területen csak a második tudott lenni az alexandriai tudósok versenyében. Tiszteletteljesebben céloz széles működési területére második melléekneve, a „Pentathlosz” (öttusázó), amelyet annak köszönhetett, hogy öt tudomány területén is jelentős eredményeket ért el. Öregkorára elfáradt és megvakult. Ezt annyira tragikusan vette, hogy öngyilkos lett: önkéntes éhhalállal vetett véget életének.

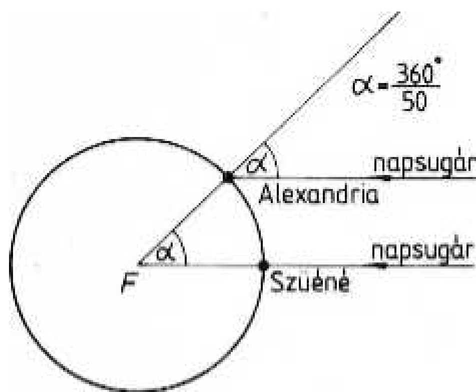
Munkáinak csak kis töredéke maradt fenn. Fő műve a *Geographika,* amelyben lerakta a tudományos földrajz alapjait. Matematikai munkásságát főleg a *Platónikosz* című dialógusa őrizte meg, amelyben a déloszi problémával, valamint filozófiai és zenei kérdésekkel foglalkozott. Közismert ERATOSZTHENÉsznek az az eljárása, amelyet *Eratoszthenész* szitájának neveznek, mert segítségével a prímszámokat mintegy ki lehet szitálni a természetes számok közül. Ennek lényege az, hogy sorban felírjuk a páratlan számokat, azután bekarikázzuk az első prímszámot, a 3-at, és áthúzzuk az összes 3-mal osztható számot. Ugyanígy járunk el az 5-tel, majd a 7-tel stb. Az eljárást folytatva, végül a felírt számok közül csak a bekarikázott prímszámok maradnak meg.

Természetesen ezekhez még hozzá kell számítanunk a 2-t. Tehát **Eratoszthenész** szitája így néz ki:

3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~,
23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41,
43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53, ~~55~~, ~~57~~, 59, 61,
~~63~~, ~~65~~, 67, . . .

Kronológiai műve alapvető volt. Először követte a történetírásban azt az elvet, hogy csak az ellenőrzött, hiteles eseményeket és adatokat jegyezte fel. Ha pontos évszámot nem tudott, akkor azokat körültekintő módon és megokoltan becsülte meg.

Őt is mélyen érdekelte a három ókori probléma (körnégyszögesítés, szögharmadolás és kockakettőzés). Olyan eszközt is szerkesztett, amellyel - a 121. oldalon leírt módon - a kocka kettőzése megoldható. Tudunk még arról, főleg **Papposz** *Szünagógé* (Gyűjtemény) című könyvéből, hogy **Eratoszthenész** nagyban fejlesztette a különböző közepekről szóló elméletet, és írt egy kétkötetes könyvet *Peri mezotéton* (A közepekről) címmel, amelyben már megtalálható több olyan, a közepekre vonatkozó tétel, amelyet **Papposz** is tárgyal, **Eratoszthenész** ebben a könyvében közepekkel kapcsolatos mértani helyeket is vizsgált, amelyek valószínűleg a kúpszeletek lehettek.



168. ábra

Nagy lelkiismeretességgel határozta meg a Föld egy délkörének, illetőleg a Föld egyenlítőjének a hosszát. Egy napon azt tapasztalta, hogy a Nap Szüénében (Asszuán, Dél-Egyiptomban) éppen megvilágította egy mély kútnak a vizét. Az észlelés napja a nyári napforduló idejére esett. Ekkor tehát Szüénében a Nap a zeniten állt. Ugyanakkor Alexandriában, amely Szüénétől majdnem északra feküdt, tehát csaknem ugyanazon a meridiánkörön (három fok eltérés), úgy mérték, hogy a Nap a zenittől a teljes szög ötvenedrészével hajlik el *(168. ábra).* A hivatalos lépésszámláíók adatai szerint Szüéné Alexandriától 5000 sztadionra van (a lépéssztadion = 148 m; az egyiptomi sztadion= 174,5 m; a sztadion attikon = 177,6 m; a népi ptolemaioszi sztadion =190 m; a lábsztadion = 198 m; a királyi ptolemaioszi sztadion = 221,6 m). Ezek szerint az 5000 sztadion a Föld kerületének 50-ed része, tehát a Föld kerülete 250 000 sztadion. Az akkori mértékegységek zűrzavarából azonban ma már nem lehet kitalálni, hogy Eratoszthenész melyikkel számolt, azért a kapott eredmény pontosságáról sokat nem mondhatunk. Ha a helyes 40 000 km kerületből visszaszámolunk, megtartva az 5000 sztadion távolságot, akkor egy sztadionra 160 m jön ki. Ilyen sztadionértékről pedig nincs tudomásunk. Ha az attikai sztadion szerint számolunk, akkor 44 400 km, ha pedig a lépés-sztadion szerint, akkor 37 000 km az eredmény, tehát nagyságrendileg biztosan helyes. Ha figyelembe vesszük, hogy Alexandria és Szüéné nem azonos meridiánkörön fekszik, akkor sem kapunk **ERATOSZTHENÉSZétől** lényegesen eltérő eredményt *(169. ábra).* A kortársak **Eratoszthenész** eredményét túl nagynak találták. **Ptolemaiosz Klaudiosz** csak 30 000 km-nyire becsülte a Föld egyenlítőjét. Ezt az adatot valószínűleg **POSZEIDÓNIOSZtól** vette át.

Eratoszthenész térképe

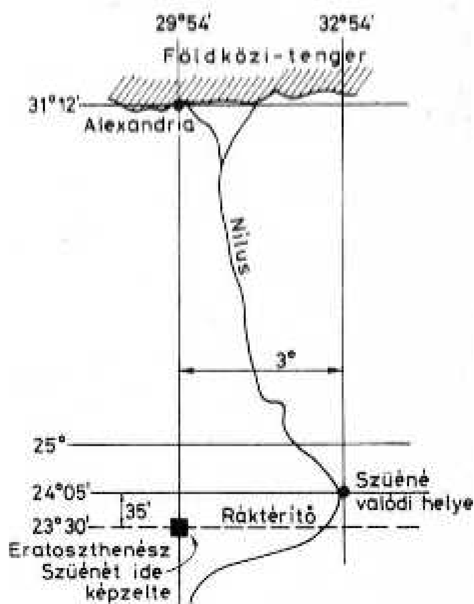


POSZEIDÓNIOSZ (i. e. 135-51)

Arameus (szír) származású athéni csillagász volt, aki geográfiával, történetírással és filozófiával is foglalkozott. Mint sztoikus filozófus nagy befolyást gyakorol. **Cicero** és **Seneca** nézeteire. Kb. i. e. 97-től Rhodosz szigetén élt és dolgozott. Itt végzett az **Eratoszthené**széhez hasonló fokmérést. Ő azonban nem a Nap, hanem a Canopus csillag segítségével mért és számított. Ezt a fényes csillagot használták a görög hajósok az éjszakai tájékozódásra. Alexandriától Rhodosz északra van, tehát a két város ugyanazon a délkörön fekszik. **Poszeidóniosz** úgy mérte, hogy amikor a Canopus csillag Rhodoszban a horizonton látszik, akkor Alexandriában 7,5°-kal a horizont fölött ragyog. Ugyanúgy okoskodott, mint **Eratoszthenész.** A *1,5*° a 360°-nak 48-ad része, tehát az Alexandria-Rhodosz távolság is a délkör 48-ad része. Az elvileg helyes mérésbe most is belecsúszott két hiba. **Poszeidóniosz** nem vette figyelembe, hogy a látóhatár közelében a levegő fénytörése miatt nem ott van a csillag, ahol látszik, tehát a 7*,5*° nagyon pontatlan érték. Ehhez járult még, hogy a két város közt hullámzó tenger igen megnehezítette és megbízhatatlanná tette a két hely távolságának mérését.

Ennek a mérésnek az az érdekessége - és azért is említettem meg -, hogy közvetve szerepe volt Amerika felfedezésében. **Kolumbuszhoz** 1492-ben **PTOLEMAioszon** keresztül ez a valódinál jóval kisebb földkerület-adat jutott el, és erre alapozta számításait. E szerint Spanyolországból nyugat felé Indiáig hajózni jóval reálisabb célnak látszott, mint ahogy ezt a valódi távolság indokolná. (Nem

beszélve a közbeeső Amerikáról.) Valószínű, hogy **Eratoszthenész** méréseire támaszkodva a Santa Maria sohasem vitorlázott volna nyugatnak indiai úticéllal.



169. ábra

Poszeidóniosznál valamivel előbb élt és szintén Rhodosz szigetén működött az ókor legnagyobb csillagásza, hipparkhosz.

HIPPARKHOSZ (i. e. 180?-125)

Nikaiában (Nicaea, most Iznik, Törökország északnyugati részén) született. Alexandriában tanult, de már fiatalon, i. e. 160-ban Rhodosz szigetén telepedett le. Itt berendezett egy csillagvizsgálót, amelyben saját maga által tervezett megfigyelési eszközöket is használt. Életéről mindössze ennyit tudunk. Sajnos még művei sem maradtak fenn. Arra, hogy a hellén kor legnagyobb csillagásza volt, főleg más szerzők utalásaiból, elveszett könyveinek méltatásaiból következtethetünk. Mindenesetre, felsorolható eredményei szintén emellett tanúskodnak. Mint csillagásznak fő törekvése volt, hogy olyan világképet szerkesszen, amely matematikailag pontosan leírható. Alapul vette **Apollóniosz**

geocentrikus rendszerét, amelyben az epiciklusok középpontjai a Föld körül excentrikus körpályán keringenek. Újabb epiciklusok beiktatásával a bolygók mozgásának a megfigyelésekkel igen jól egyező matematikai leírását adta. Az ő javított apollónioszi rendszerét tökéletesítette tovább a már többször szóba került **Ptolemaiosz Klaudiosz.**

Megfigyelései során i. e. 134-ben meglepődve vette észre egy új csillag megjelenését a Skorpió csillagképben. Ez a felfedezés indította arra, hogy csillagkatalógust készítsen. Így a jövő csillagászai könnyen megállapíthatják egy új csillag megjelenését vagy eltűnését, esetleg elmozdulását. A csillagászat történetében talán ő volt az első, akinek eszébe ötlött, hogy az állócsillagok talán nem is „állnak". Maga készítette műszereivel mintegy 850 csillag helyét határozta meg. Ezzel azonban még nem elégedett meg; a katalogizált csillagokat fényük szerint hat nagyságrendbe sorolta. Ezzel lehetővé tette a fényességváltozások észlelését is. Csillagkatalógusában tehát két, a csillagászat szempontjából fontos felismerést tett. Feltételezte, hogy az állócsillagok is változtathatják helyüket és fényüket, valamint felismerte, hogy számos égi jelenség megfigyelésére emberöltők kellenek, tehát a csillagászat komoly eredményeit csak a csillagászok egymást követő nemzedékeinek végeláthatatlan sora együttesen tudja létrehozni. Valószínű, hogy katalógusának összeállításakor felhasználta a babiloni csillagászat észlelési adatait is.

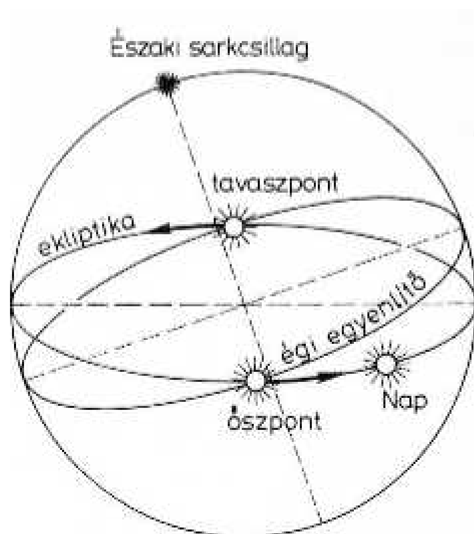
Erre alkalma nyílhatott, mert Görögországban is éltek babiloni csillagászok, akik közül különös módon egyedül csak **Bérósszosz** nevét ismerjük. Ő Kósz szigetén működött. Katalógusának Hip**parkhosz** már maga is hasznát látta. A régi észleleti adatokat összehasonlítva a sajátjaival, mintegy 150 évvel tudott visszatekinteni, és így felfedezte a napéjegyenpont eltolódását. Mint már említettük, az égi egyenlítő és az ekliptika (nappálya*)* síkja szöget zár be *(170. ábra)*. Az égi egyenlítő és az ekliptika két helyen metszik egymást. A Nap az egyik metszéspontba március 21-én, a másikba szeptember 23-án érkezik. Az első metszéspont neve tavaszpont, a másodiké őszpont. Közös nevük napéjegyenpont. **Hipparkhosz** tehát felfedezte, hogy ez a két pont az ekliptikán vándorol. A napéjegyenpont elmozdulását a ma helyes 50" helyett 36"-nek találta. Közben helyesbítette az ekliptika

és az égi egyenlítő síkjának hajlásszögértékét is. Kiszámította az év időtartamát a mai értéktől 6 percnyi eltéréssel. Elődeinél pontosabban határozta meg a Hold-Föld távolságot és a Hold sugarát.

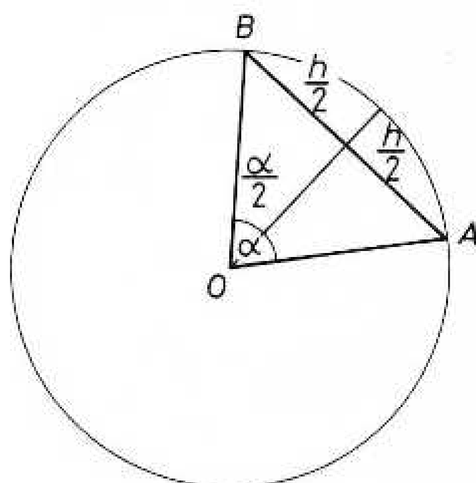
Felsoroltuk **Hipparkhosz** ismert csillagászati érdemeit. Ezekhez hozzászámíthatjuk, hogy a földrajzi helyek meghatározására bevezette a hosszúsági és szélességi köröket, tehát elsőként használt a mai értelemben koordináta-rendszert. Ez már a matematika számára is használható módszer. Legnagyobb matematikai érdeme mégis az, hogy húrtáblázatot készített, azaz egy meghatározott sugarú kör középponti szögeinek és a hozzájuk tartozó húroknak összefüggését táblázatba foglalta. Ez már trigonometria, hiszen a *171. ábra* szerint mindegy, akár azt mondom, hogy az α szög húrja *h* (cord $\alpha = \mathrm{h}$), akár azt, hogy az $\alpha/2$ szög szinusza h/2($\sin \alpha/2 = \mathrm{h}/2$) .

Hipparkhosz tehát azzal, hogy táblázatba foglalta számos a esetére a megfelelő húr hosszának értékét, alapjában véve szinusztáblázatot készített, a történelem során először. Úgy vélem, hogy ettől az időtől kellene számítanunk a trigonometria megszületését, habár ez olyan csendben történt, hogy alig vette észre valaki. Csak egy táblázat született a csillagászok kényelmére.

Matematikai szempontból fontos kérdés, hogy miként született meg az első „szinusztáblázat”? Theón, az utolsó említésre érdemes ógörög matematikusok egyike igazít útba bennünket. Tőle tudjuk, hogy HIPPARKHOSZnak volt egy tizenkét kötetes, a kör húrjairól szóló könyve. Ez elveszett ugyan, de Theón szerint a húrtáblázat készítésének hipparkhoszi módszere fellelhető Ptolemaiosz Klaudiosz nagy összefoglaló művében: az Almageszt ben. Bizonyára nem sértjük meg Hipparkhosz emlékét, ha húrszámítási módszerét az Almageszt ismertetése közben vázoljuk. Annyit azonban még megjegyzünk a nagy csillagásszal - és ha már annyi atya van, miért ne legyen eggyel több -, a trigonometria atyjával kapcsolatban, hogy ő már szögmértékegységül a teljes szög 360-ad részét, vagyis a fokot használta. Lehetséges, hogy az ötlet a *Sztoikheiával* kapcsolatban már említett Hüpsziklésztől származik, aki időmértékegység gyanánt a nap 360-ad részét használta, minden bizonnyal a babiloni 60-as számrendszer hatására.



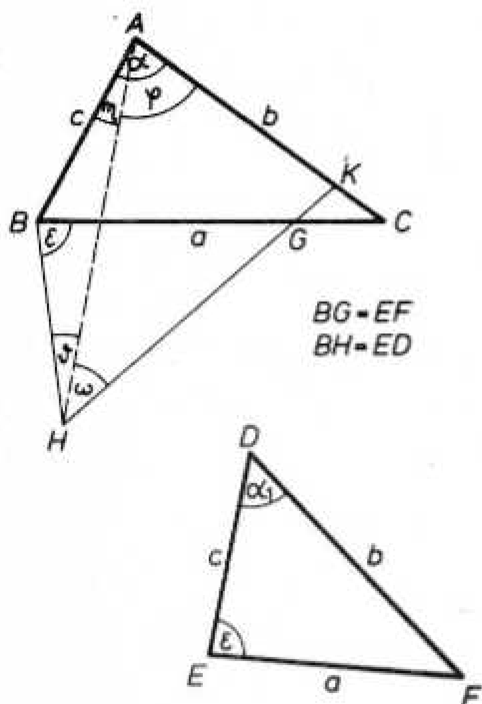
170. ábra



171. ábra

Mielőtt még **a ptolemaiosz** címszó alatt visszatérnénk a húrtáblázat-készítésre, célszerű megismerni **Menelaosz** munkásságát, nemcsak azért, mert időben is közbeékelődik, hanem mert matematikai tanulmányai a csillagászat és a trigonometria köréhez kapcsolódnak.

AZ ALEXANDRIAI MENELAOSZ (i. sz. 100 körül)



172. ábra

Görög matematikus és csillagász. Életéről vajmi keveset tudunk. Nevének jelzője elárulja, hogy főként Alexandriában dolgozott. Ismeretes azonban, hogy **Traianus** uralkodásának első éveiben, tehát 98-tól, csillagászati megfigyeléseket végzett Rómában. Hatkötetes könyvét a kör húrjairól az alexandriai **Theón** említi. Ez bizonyára tartalmazta a szinusztáblázatnak megfelelő húrtáblázatot is. A hat kötetből azonban egy se maradt ránk. Arab forrásokból tudjuk, hogy írt csillagászati műveket, egy elemi geometriát és egy hidrosztatikai munkát is. A *Geometria elemei* című könyvét Szábit **ibn Kurra** bagdadi arab matematikus fordította le *Könyv a háromszögekről* címmel. Sajnos ez is elveszett. Az eredeti írásból azonban **Proklosz** megőrzött egy kis bizonyítást, amely azt illusztrálja, hogy **Menelaosz** jobban szerette a direkt bizonyítást, mint az indirekt eljárást. Ez a kis emlék tulajdonképpen az *Elemek I.* könyvének a 25. tételét igazolja, amely szerint, ha két

háromszögnek két-két oldala egyenlő, de a harmadik oldalak különböznek, akkor a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög található. Ezt **Menelaosz Eukleidész** indirekt igazolása helyett a következőképpen bizonyította *(172. ábra.)*

Legyen $AB=DE$, $AC=DF$ és $BC>EF$, akkor állítjuk, hogy $\alpha > \alpha_1$. Mérjük fel ugyanis a *BC* oldalra az EF-fel egyenlő *BG* szakaszt, továbbá az ábra szerint az ε szöget, és ennek szárára a $BH=ED$ távolságot. A *HG* egyenese kimetszi az *AC*-ből a *K* pontot.

Rajzunk szerint a

$BGH\Delta \approx EFD\Delta$,

tehát

$HG=DF=AC$.

Viszont

$HK > HG = AC > AK,$

és ezért az *AHK* háromszögben

$\varphi > \omega$

Az $AB = ED = BH$ miatt

$\eta = \vartheta,$

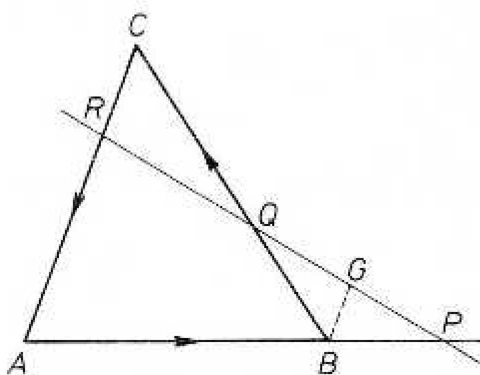
tehát

$\varphi + \eta > \omega + \vartheta$

vagyis

$\alpha > \omega + \vartheta = \alpha_1$

Menelaosz egyetlen megmaradt könyve az arab nyelvre fordított, 3 kötetes *Szphairika,* amelynek tárgya főként a gömbháromszögtan. Ennek első kötetében a szerző **Eukleidész** axiomatizáló módszerével lefekteti a gömbháromszögtan alapjait. A gömbháromszög definíciójától („A gömbháromszög az a hely, amelyet a gömbfelületen a legnagyobb körök ívei zárnak be”, ha „ezek az ívek mindig kisebbek, mint a félkör.”) a mű első részében eljut addig, hogy két gömbháromszög egybevágó, ha megfelelő szögeik egyenlők. Bizonyítja továbbá, hogy a gömbháromszög szögeinek összege nagyobb két derékszögnél. Megjegyezzük, hogy **Menelaosz** volt az első, aki tudatosan és következetesen megkülönböztette a gömbháromszöget a síkháromszögtől. A gömbháromszöget mindig „tripleuron”-nak, a síkháromszöget pedig „trigónon”-nak nevezte. A második kötet az addig tárgyalt anyag csillagászati alkalmazásait mutatja be.



173. ábra

A harmadik kötet tartalmazza, többek közt, a szerzőről elnevezett síkbeli Menelaosz-tételt. Ez nem az ő felfedezése, ami abból is látszik, hogy könyvében hivatkozik rá, de nem bizonyítja, tehát mintegy ismertnek tételezi fel. Azt, hogy a tételt róla nevezték el, kiérdemelte azzal, hogy ő bizonyította először gömbháromszögekre.

A síkbeli Menelaosz-tétel a következő: Ha az *ABC* háromszög oldalainak egyeneseit valamely *RQP* egyenessel metsszük *(173. ábra),* akkor az irányított szakaszokra teljesül, hogy

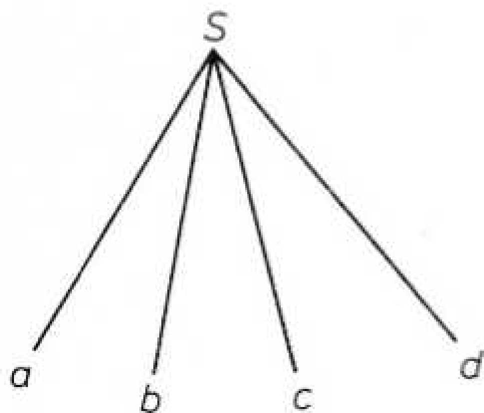
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1.$$

A tétel bizonyításához nem kell bővítenünk a szokásos görög matematikai apparátust. Rajzoljuk meg az AC-vel párhuzamos *BG* szakaszt. Így az *APR és BPG* hasonló háromszögekből:

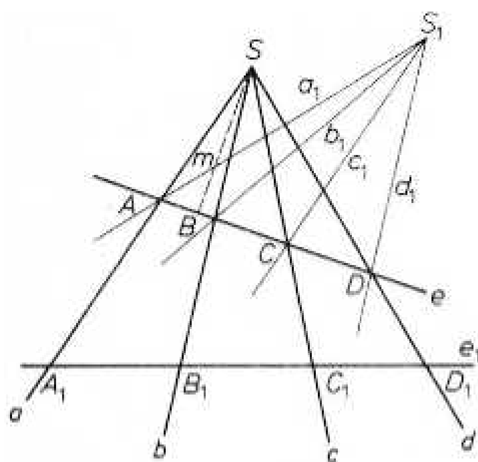
$$\frac{AP}{PB}=\frac{AR}{GB}.$$

A *BQG* és a *CQR* hasonló háromszögekből pedig:

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{GB}{RC}.$$



174. ábra



175. ábra

A két aránypár szorzata:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{AR}{RC}.$$

A szakaszok előjelét is figyelembe véve:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1.$$

Ennek a tételnek igen szép bizonyítását mutatja be LÁNCZOS KORNÉL, a világhírű, magyar származású matematikus *A geometriai térfogalom fejlődése* című könyvében. A bizonyításhoz a kettősviszony fogalmát használja fel, amelyről megjegyzi, hogy már EUKLEIDÉSZnél is megtalálható, sőt a görög geométerek már azt is tudták, hogy a kettősviszonyt a vetítés és a metszés változatlanul hagyja. Hogy ez valóban így van, azt beláthatjuk a következőképpen: Négy pont kettősviszonyának a fogalmával már találkoztunk a 227. oldalon. Eszerint: az *e* egyenesre illeszkedő *A, B, C* és *D* pontok kettősviszonya:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Ezt most kiegészítjük az *S* ponton átmenő *a, b, c,* és *d* egyenesek kettősviszonyának a meghatározásával *(174. ábra).* Ha e négy egyenes kettősviszonyát *(abcd)-vel* jelöljük, akkor:

$$(abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)},$$

ahol (*ac)* az *a* és *c* egyenesek előjeles hajlásszögét jelenti, *(cb)* a *c* és *b* egyenesekét stb.

A kettősviszony vetítésnél és metszésnél nem változik. Tekintsük ugyanis a *175. ábrát.* Ezen az *S* pontból kiinduló *a, b, c* és *d* sugarakat metszi a tetszőleges *e* egyenes az *A, B, C* és *D* pontokban. Az *S* vetítési pontból az *e* egyenesre állított merőleges szakasz hossza *m.* Így az ismert háromszögterület-képletek

$$\left(t = \frac{am}{2} = \right.$$

$$= \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2} \Big)$$

alapján igaz, hogy

$AC * m = SA * SC * \sin (ac)$,

$CB * m = SB * SC * \sin (cb)$,

$AD * m = SA * SD * \sin (ad)$,

$DB * m = SB * SD * \sin (db)$.

Ezekből:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)}$$

és

$$\frac{AD}{DB} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{\sin (ad)}{\sin (db)} .$$

Tehát:

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin (ac)}{\sin (cb)} : \frac{\sin (ad)}{\sin (db)} = (abcd).$$

Ha az *e* egyenes helyett az e_1 egyenes metszi az *S* pontból kiinduló *a, b, c, d* sugársort az A_1, B_1, C_1 és D_1 pontokban, akkor minden bizonnyal:

$(A_1B_1C_1D_1) = (abcd)$,

tehát

$(A_1B_1C_1D_1) = (ABCD)$.

Hasonlóképpen, ha az S_1 pontból az *A, B, C* és *D* pontokon átmenő a_1, b_1, c_1 és d_1 sugarakat tekintjük, akkor igaz, hogy

$(a_1b_1c_1d_1) = (ABCD) = (abcd)$.

Láthattuk tehát, hogy sem az *S* tartójú sugárnégyesnek, sem az *e* tartójú pontnégyesnek a kettősviszonya nem változik sem a vetítéssel, sem a metszéssel.

A Lánczos Kornél által bemutatott bizonyításhoz már csak azt kell tudomásul vennünk, hogy ha az

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$$

kettősviszonyban szereplő *D* pont az *e* tartóegyenes végtelen távoli pontja, akkor az AD/DB hányados értékét 1-nek kell venni.
Ekkor tehát:

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}.$$

Ez után az előkészítés után lássuk, hogyan képzelte el Lánczos Kornél a Menelaosz-tétel ókori bizonyítását.

Vetítsük hát a 176. ábra szerint az a egyenes A, B, P és G pontját a Q ponton át a b egyenesre. A b egyenes megfelelő pontjai A, C, R és D. Igaz, tehát, hogy

$(ABPG) = (ACRD)$ vagy

$$\frac{AP}{PB}:\frac{AG}{GB}=\frac{AR}{RC}:\frac{AD}{DC}.$$

Ha most az *a* egyenesen a *G* pontot a végtelenbe távolítjuk *(177. ábra),* akkor AG/GB = 1 lévén

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AR}{RC}:\frac{AD}{DC}.$$

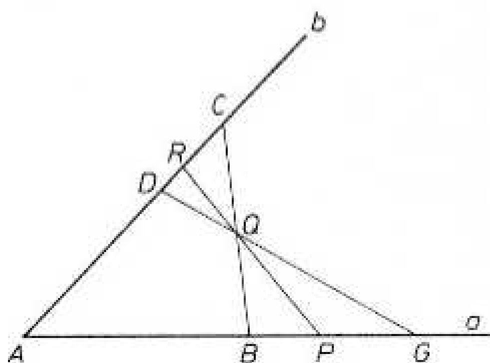
A párhuzamos szelők tétele szerint azonban:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{BQ}{QC},$$

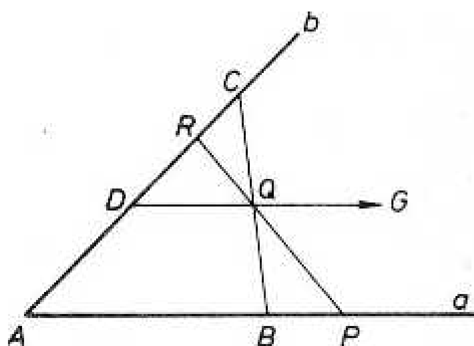
tehát

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1,$$

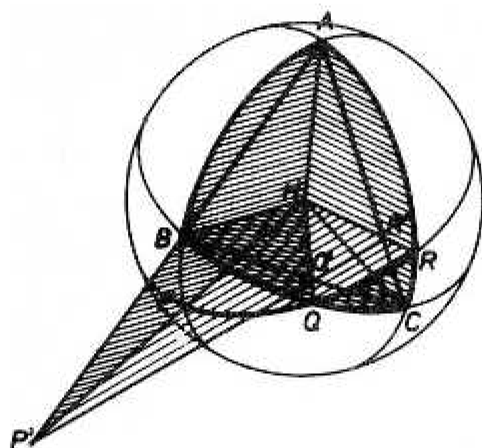
ami éppen az *ABC* háromszögre és az *RQP* szelőre vonatkozó Menelaosz-tétel. E tételt a későbbi évszázadokban elnevezték „regula sex quantitorum”-nak, azaz a hat mennyiség szabályának.

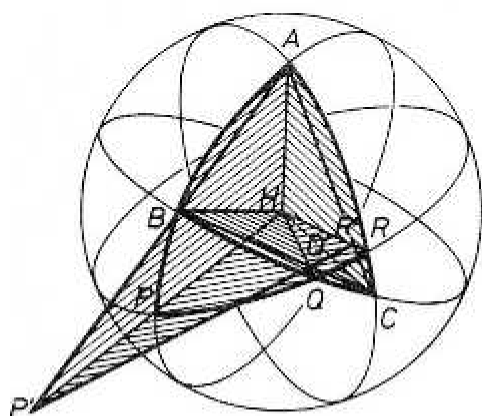


176. ábra

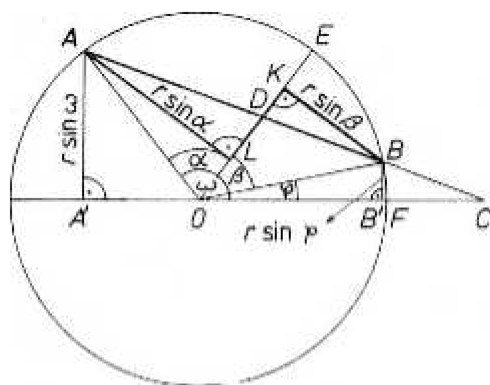


177. ábra





178. ábra



179. ábra

Amint már említettem, **Menelaosz** volt az első, aki egy gömb középpontjából való vetítéssel rávitte a tételnek megfelelő síkbeli alakzatot a gömb felületére, és így nyerte a gömbháromszögre vonatkozó analóg állítást, amely így szól:

Ha az *ABC* gömbháromszög oldalainak főköreit metszi a *PQR* főkör, és a szereplő körívek mindegyiké kisebb a félkörnél *(178. ábra),* akkor:

$$\frac{\sin \widehat{AP}}{\sin \widehat{PB}} \cdot \frac{\sin \widehat{BQ}}{\sin \widehat{QC}} \cdot \frac{\sin \widehat{CR}}{\sin \widehat{RA}} = -1.$$

A bizonyításhoz előrebocsátjuk az ugyancsak a harmadik kötetben leírt, de nem igazolt, viszont a *179.* ábráról könnyen leolvasható tételpárt.

Az egyik következik az *LDA* és a *KDB* hasonló háromszögekből:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \widehat{AE}}{\sin \widehat{EB}}.$$

A másik az *AA'C* és *BB'C* hasonlóháromszög-párból adódik:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} = \frac{\sin \widehat{AF}}{\sin \widehat{FB}}.$$

Legyen ezután a *178. ábrán H* a gömbnek, tehát mindegyik főkörnek is a középpontja. *HP, HQ* és *HR* a *HPQR* körcikken a gömb sugarai. Hasonlóan : *HA, HR* és *HC* a *HARC* körcikken, továbbá *HB, HQ* és *HC* a *HBQC* körcikken, végül *HP, HB* és *HA* a *HPBA* körcikken a gömb sugarai.

Vegyük észre, hogy az *AB* és a *HP* egyenesei közös síkban, a *HPBA*

körcikk síkjában vannak, tehát mivel nem párhuzamosak, metszik egymást a gömbfelületen kívüli *P’* pontban.

AC metszi *HR-et* a *HCRA* sík *R‘* pontjában. Ugyanúgy a *BC* metszi *HQ-t* a *HCQB* sík *Q‘* pontjában.

Az *ABC* sík és a *HPQR* sík közös pontjai az *R', Q'* és *P',* tehát ezek a pontok egyazon egyenesen vannak.

Észrevételeink alapján az *ABC* síkháromszögre és a *P’Q'R'* szelőre érvényes a Menelaosz-tétel, azaz:

$$\frac{AP'}{P'B}\cdot\frac{BQ'}{Q'C}\cdot\frac{CR'}{R'A}=-1.$$

Segédtételeink értelmében azonban:

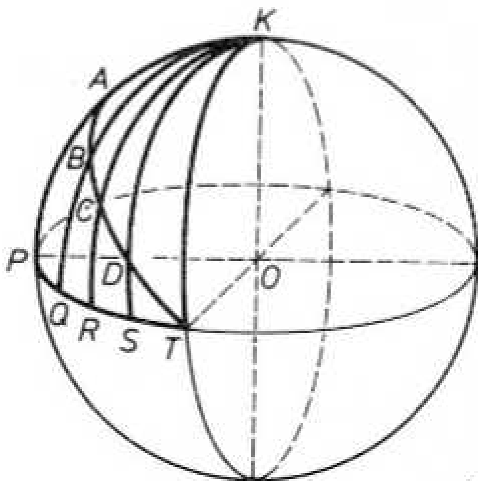
$$\frac{AP'}{P'B}=\frac{\sin\overset{\frown}{AP}}{\sin\overset{\frown}{PB}},$$

$$\frac{BQ'}{Q'C}=\frac{\sin\overset{\frown}{BQ}}{\sin\overset{\frown}{QC}},$$

$$\frac{CR'}{R'A}=\frac{\sin\overset{\frown}{CR}}{\sin\overset{\frown}{RA}}.$$

Tehát:

$$\frac{\sin\overset{\frown}{AP}}{\sin\overset{\frown}{PB}}\cdot\frac{\sin\overset{\frown}{BQ}}{\sin\overset{\frown}{QC}}\cdot\frac{\sin\overset{\frown}{CR}}{\sin\overset{\frown}{RA}}=-1.$$



180. ábra

Ugyancsak a *Szphairika* harmadik kötetében olvasható a gömbháromszögtani Menelaosz-tételnek egy meglepő következménye. Lehetséges, hogy **Menelaosz** valamelyik elveszett könyvében igazolta is ezt a tételt, és ezért ezen a helyen csak a közlésére szorítkozott:

Ha egy gömbfelület *K* pontján átmenő négy gömbi főkört másik két főkör metsz az *A, B, C, D,* illetve a *P, Q, R, S* pontokban *(180. ábra),* akkor igaz, hogy

(ABCD) = *(PQRS)*.

Az igazolás közben, a rövidség kedvéért, átmenetileg jelöljük a sin *AB-t AB-vel*, és értelemszerűen a többi szinuszt is.

Írjuk fel a Menelaosz-tételt az *APT* gömbháromszögre és az *RK* szelőre:

$$\frac{PK}{KA} \cdot \frac{AC}{CT} \cdot \frac{TR}{RP} = -1.$$

Az *APT* gömbi háromszögre és *SK* szelőjére:

$$\frac{PK}{KA} \cdot \frac{AD}{DT} \cdot \frac{TS}{SP} = -1.$$

A bal oldalak egyenlősége az egyszerűsítés után:

$$\frac{AC}{CT} \cdot \frac{TR}{RP} = \frac{AD}{DT} \cdot \frac{TS}{SP}. \qquad \text{(a)}$$

Hasonlóan: a *BQT* gömbháromszögre és *RK* szelőjére:

$$\frac{QK}{KB} \cdot \frac{BC}{CT} \cdot \frac{TR}{RQ} = -1.$$

A *BQT* gömbháromszögre és *SK* szelőjére:

$$\frac{QK}{KB} \cdot \frac{BD}{DT} \cdot \frac{TS}{SQ} = -1.$$

A bal oldalak egyenlősége az egyszerűsítés után:

$$\frac{BC}{CT} \cdot \frac{TR}{RQ} = \frac{BD}{DT} \cdot \frac{TS}{SQ}. \qquad \text{(b)}$$

Az (a) és (b) egyenlőségek hányadosa:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{RQ}{RP} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{SQ}{SP},$$

vagy:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{PR}{RQ} : \frac{PS}{SQ},$$

azaz

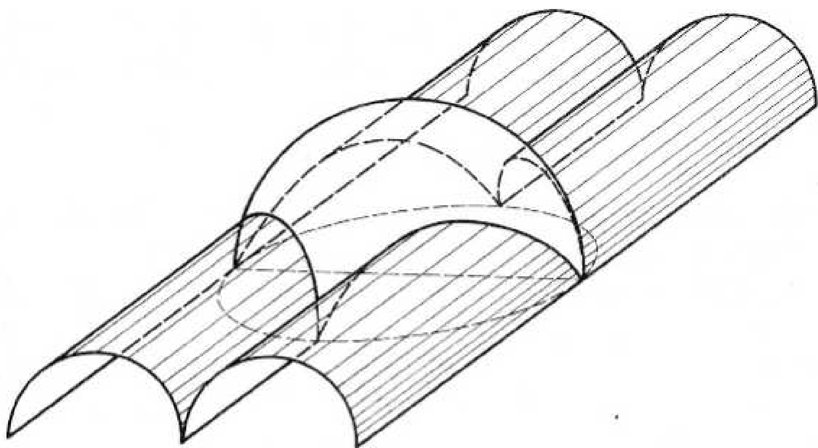
$$\frac{\sin AC}{\sin CB} : \frac{\sin AD}{\sin DB} = \frac{\sin PR}{\sin RQ} : \frac{\sin PS}{\sin SQ}.$$

Végül is:

(ABCD) = (PQRS).

Ez pedig azt jelenti, hogy a gömbfelületen egy pontból az azon átmenő főkörökkel való vetítéskor (illetőleg a főkörökkel való metszéskor) a kettősviszony nem változik.

181. ábra



Papposz szerint Menelaosz felfedezett egy új görbét is, amelyet

„paradoxiális” görbének nevezett. Paul Tannery matematikatörténész szerint a paradoxiális görbe azonos azzal a görbével, amelyet 1692-ben Galilei tanítványa, Viviani kapott a következő feladat megoldásául: Egy félgömb alakú kupolából négy egybevágó ablakot vágjunk ki úgy, hogy a megmaradt gömbfelület „négyzet” legyen, azaz olyan négyszög, amelyet négy egybevágó ív határol. Viviani megoldása szerint a félgömbből a megfelelő ablakokat két, egymással az egyik alkotójuk mentén érintkező félhenger metszi ki, ha ezek átmérője a félgömb sugarával egyenlő, amint ezt a 181. ábra szemlélteti. A maradék felület valóban négy egybevágó görbével határolt „négyzet”. A határoló görbét nevezik paradoxiális görbének.

Menelaosz munkássága kétségkívül nagyban hozzájárult a trigonometria kibontakozásához, és különösen a gömbi trigonometria megalapozásában van nagy érdeme. Ő az első matematikus, aki a trigonometriát önálló matematikai ágként kezelte. Az ókorban azonban a trigonometria fejlődésére a legnagyobb hatást Ptolemaiosz műve, a máris sokat emlegetett Almageszt gyakorolta.

PTOLEMAIOSZ KLAUDIOSZ (i. sz. 100 körül-170 táján)

Görög csillagász, matematikus és geográfus. Életéről alig tudunk valamit. Alexandriában működött, neve megtévesztő, mert nem az uralkodó Ptolemaiosz családjából származott, hanem egy olyan faluból, amelyet a királyi család valamelyik tagjáról neveztek el. Valószínű, hogy Ptolemaisz Hermeiuról van szó, amelynek romjai Mensich mellett porladoznak. Születési évét sem tudjuk. Talán 100 körül látta meg a napvilágot. Halálának éve is csak annak alapján becsülhető, hogy egyesek szerint 78 éves korában halt meg. Az biztos, hogy 127 és 155 között Alexandriában csillagászati megfigyeléseket végzett. **Szuidasz,** a 960 körül élt görög lexikoníró szerint, aki még meríthetett ma már nem létező forrásokból, **Marcus Aurelius** uralkodása idején, tehát 161 és 180 között **Ptolemaiosz** még élt.

Hírnevét a már többször idézett, nagy, 13 kötetes, összefoglaló csillagászati és matematikai művének köszönheti. Ennek eredeti címe: *Megalé szüntaxisz tész asztronomiasz* vagy - mint **Ptolemaiosz** maga is nevezte - *Mathematiké szüntaxisz.* Az első

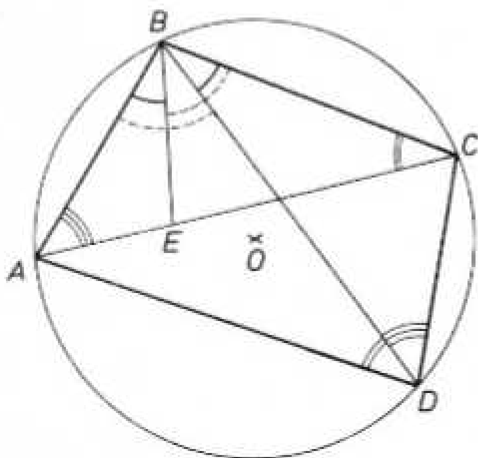
magyarul azt jelenti, hogy „A csillagászat nagy összefoglalása”, a rövidebbnek a jelentése pedig „Matematikai összefoglalás”. Valószínűleg azért látták el a „megiszté” (legnagyobb) jelzővel, hogy megkülönböztessék **Arisztarkhosz** kisebb terjedelmű, de hasonló tárgyú művétől. Az idők múltával aztán a művet már csak *Megiszté szüntaxisz* néven emlegették, még később csupán *Megiszté* néven. A IX. századi arab fordító a megiszté szót kissé elferdítette, és az arab „al” névelővel látta el. Így lett végül is a nagy csillagászati mű címe *Almageszt.* Ezzel a címmel, arab fordításban maradt ránk. 1175-ben a cremonai **Gherardo** lefordította latin nyelvre. Így terjedt el Európában, hogy évszázadokra megszabja a csillagászati világképet.

182. ábra

Ptolemaiosz nem csupán átvette **Apollóniosz** bolygórendszerét, hanem tökéletesítette is. Miért volt erre szükség, és miben állt a változtatás? **Ptolemaiosz** előtt, a már továbbfejlesztett Apollóniosz-féle Naprendszerben *(182. ábra)* a *B* bolygó az epiciklusnak nevezett körpályán *(e)* keringett egyenletesen, miközben az epiciklus *C* középpontja az *F* Föld körüli körpályán mozgott állandó szögsebességgel, de ennek a *d* deferens körnek az *O* középpontja a Földön kívülre esett. Ezen elmélet szerint az epiciklus *C* középpontjának egyenlő idők alatt egyenlő hosszú íveket kellett befutnia. A tapasztalat viszont azt mutatta, hogy a Föld közelében a *C* pont gyorsabban, a Földtől távol pedig lassabban mozog. Az elméletnek és a megfigyelésnek ezt az eltérését „egyenlítette” ki **Ptolemaiosz** azzal, hogy bevezette az ún. kiegyenlítő pont fogalmát. Az *E* kiegyenlítő pont a *DG* átmérőn úgy helyezkedik el, hogy teljesüljön az $OE = OF$ egyenlőség.

Az *E* kiegyenlítő pont egy képzeletbeli, tetszőleges sugarú *k* körnek a középpontja. **Ptolemaiosz** ennek segítségével a következő módosítást tette: A *B* bolygó epiciklusának *C* középpontja a *d* deferens körön mozog ugyan, de ez a körmozgás nem az *O* pontból nézve egyenletes, hanem az *E* kiegyenlítő pontból. Az epiciklus *C* centrumának a mozgását tehát úgy kapjuk meg, hogy a *k* körön állandó szögsebességgel keringő (képzeletbeli) pont mozgását az *E* pontból rávetítjük a deferens körre. Az *O* középpontú deferensen mozgó *C* pont tehát csak az *E* pontból nézve mozog állandó szögsebességgel. A Földről nézve azonban a Földhöz közeli pályarészen a C-hez tartozó rádiuszvektor ugyanannyi idő alatt nagyobb szögtartományt súrol, mint a Földtől távol. - Igen természetes, ha az utolsó mondat nyomán eszünkbe jut **Kepler** 2. törvénye, sőt a *182. ábra* láttán a *d* és a *k* körök egyesítésének a gondolata is, azaz **Kepler 1.** törvénye.

Ez a módosított, tehát ptolemaioszi bolygómozgás bizony már csak nagy erőfeszítéssel tudja betartani Platón előírását, hogy ti. a bolygó csak egyenletes körmozgással mozoghat, illetve olyan mozgással, amely egyenletes körmozgásokból összetehető. Éppen ez az erőltetettség szúrt szemet KOPERNIKUSZnak, aki a platóni bolygómozgási axióma megsértését látta Ptolemaiosz kiegyenlítő pontjának bevezetésében. Ptolemaiosz új elméletének tehát kettős haszna volt. Az egyik az, hogy évszázadokra jól használható, azaz az észlelésekkel összeegyeztethető elméletet adott, a másik pedig az, hogy Kopernikusz gondolatait elindította abba az irányba, amely a heliocentrikus Naprendszer jóval egyszerűbb elméletéhez vezetett. E téma befejezéseként felhívjuk a figyelmet arra is, hogy a ptolemaioszi bolygórendszer már alig is felel meg a geocentrikus világszemléletnek, hiszen szerinte a bolygók már egyáltalában nem a Föld-középpontú pályán keringenek, hanem a „valóságban” olyan epiciklusokon, amelyek középpontja sem a Föld körül kering, hanem a pálya alakját tekintve az O pont, a szögsebességre nézve pedig az E pont körül. Ptolemaiosz „geocentrikus” bolygóelméletében beszélhetünk tehát többféle középpontról, de ezek egyike sem a Föld.



183. ábra

Matematikai szempontból az Almageszt főleg azért fontos, mert megtaláljuk benne a húrtáblázat-készítésnek azt a módszerét, amely valószínűleg még HIPPARKHOSZtól ered, és amely a trigonometria fejlődésében és alkalmazási lehetőségében óriási lépést jelentett. Az Almagesztben leírt húrszámítás főként az ún. „Ptolemaiosz-tételen" alapszik. E tétel azt mondja ki, hogy az ABCD húrnégyszögben a szemben fekvő oldalak szorzatának összege egyenlő az átlók szorzatával (183. ábra), vagyis

AB*DC+BC*AD=AC*BD.

A bizonyításhoz rajzoljuk meg a *BE* szakaszt úgy, hogy az *ABE* szög egyenlő legyen a *DBC* szöggel, és vegyük észre, hogy az *AEB* háromszög hasonló a *DBC* háromszöghöz, tehát:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}, \quad \text{vagyis} \quad AB \cdot DC=AE \cdot BD.$$

Ugyanígy az *ECB* és *ADB* hasonló háromszögekből:

$$\frac{BC}{EC}=\frac{BD}{AD}, \quad \text{azaz} \quad BC \cdot AD=EC \cdot BD.$$

A két egyenlőség összege:

*AB*DC+BC*AD=AE*BD+EC*BD=BD(AE+EC),*

tehát valóban:

AB*DC + BC*AD = AC*BD.

Írjuk fel most **Ptolemaiosz** tételét arra a különleges esetre *(184. ábra),* amelynél a *BD* átló éppen a kör átmérője: *2r.* Használjuk a mai trigonometriai jelöléseket, tehát legyen a *COD* szög $= 2\alpha$ és a *DOA* szög $= 2\beta$. Most a

$BD*AC = AB*DC + BC*AD$

egyenletben fejezzünk ki minden mennyiséget az r, az α és a β segítségével. Ekkor:

$BD = 2r$, $AC = 2r*\sin(\alpha + \beta)$, $AB = 2r*\sin(90^\circ—\beta)$, $CD = 2r*\sin \alpha$, $BC = 2r*\sin(90^\circ— \alpha)$, és $AD = 2r*\sin \beta$.

A behelyettesítés és a $4r^2$-tel való egyszerűsítés után:

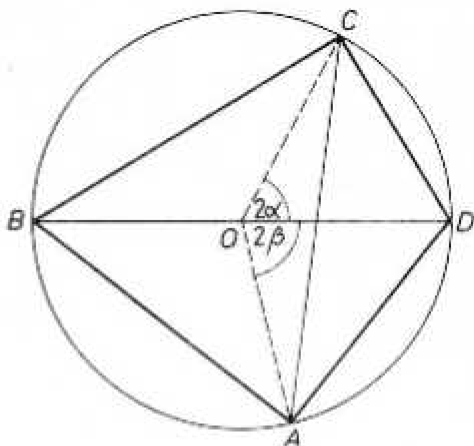
$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha * \sin (90^o\text{-}\beta) + \sin (90^\circ\text{-}\alpha)* \sin \beta$,

vagy:

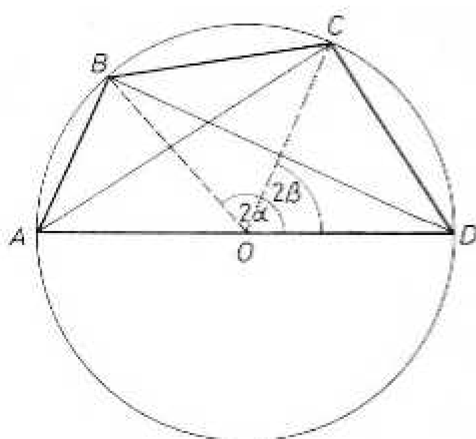
$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha * \cos \beta + \cos \alpha * \sin \beta$.

Amint látjuk, tétele segítségével Ptolemaiosz meg tudta határozni az (α + β) szög húrját, azaz szinuszát, az α és a β szögeknek, valamint azok pótszögeinek a húrjával.

Tekintsük most a tételnek azt a speciális esetét, amelynél a húrnégyszög egyik oldala, például az AD oldal, a kör átmérője (185. ábra). Most a BOD szöget jelöljük 2α-val és a COD szöget 2β-val.



184. ábra



185. ábra

Ismét fejezzünk ki az

AD*BC + AB*DC = BD*AC

egyenletben minden húrt az r, az α, a β és ezek pótszögeinek a húrjával, illetve szinuszával. Tehát:

AD = 2r, *BC = 2r**sin (α—β), AB = 2r*sin(90°—α),

*DC = 2r**sin β, BD = 2r*sin α és *AC = 2r**sin(90°—β).

A behelyettesítés és a $4r^2$-tel való egyszerűsítés után:

sin(α-β) = sin α * sin(90°-β)-sin (90°-α) * sin β,

vagy

sin (α—β) = sin α * cos β — cos α * sin β.

Ptolemaiosz rendelkezett még a félszögek szinuszának a „képletével" is. Ezt a következőképpen nyerte: Az AD átmérőjű körben a BC = CD (186. ábra). Mérjük fel az AD átmérőre az AB = AE szakaszt, és állítsunk a C pontból merőlegest ED-re. Ekkor FD = EF, mert EDC egyenlő szárú háromszög. A rajz szerint:

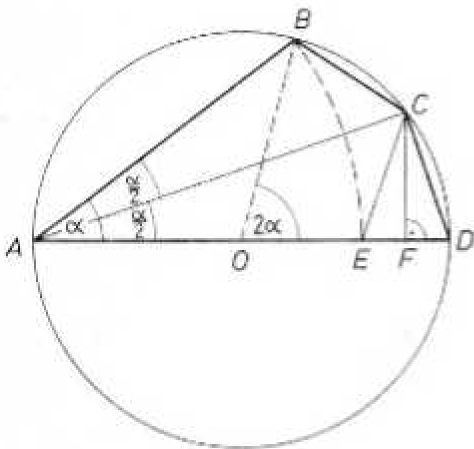
$$FD = \frac{1}{2}(2r - AE) = \frac{1}{2}(2r - AB).$$

Az *ADC* derékszögű háromszögből: $DC^2 = FD*AD = r(2r-AB)$. Ha most a *BOD* szöget 2α-val jelöljük, akkor:

DC = 2r*sin α/2 és *AB* = *2r**sin (90°—α) = 2r * cos α.

Így a DC^2 kifejezés a mai alakban

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$



186. ábra

Ugyancsak a táblázat céljait szolgálta, hogy **Ptolemaiosz a** 720 oldalú szabályos sokszög segítségével nagyon jó közelítéssel meghatározta a 0,5° középponti szöghöz tartozó húr hosszát. Ezzel közelítőleg a π nagyságát is megadta, amely szerint π ~ 377/120. Ez az érték tizedes tört alakban: 3,141 666...

Ptolemaiosz tehát, rendelkezve a szögösszeg, a szögkülönbség és a félszög húrjainak kiszámítására alkalmas formulákkal, valamint a 0,5° húrjainak meglehetősen pontos értékével, olyan

táblázatot állított össze, amelyben 0,5° szögnövekedésekkel 0°-tól 180°-ig meg lehetett találni a szögekhez tartozó húrértékeket. Az *Almageszt* I. könyvének nagy részét ez a táblázat töltötte ki, amely a csillagászoknak nélkülözhetetlen segédeszköze lett, több mint egy évezredig. **Ptolemaiosz** a teljes szöget 360 egyenlő részre osztotta, tehát szögmértékegységül fokokat használt. A babiloni 60-as számrendszer mintájára a fokot 60 első percre, és az első szögpercet 60 szögmásodpercre osztotta. Az *Almageszt* többi, 12 könyvében részletes ismertetését találjuk a geocentrikus Naprendszernek, amelyet **Apollóniosz** alapozott meg, **Hipparkhosz** fejlesztett tovább, és hosszú évszázadokra maradandóan tökéletesített **Ptolemaiosz.** A nagy csillagász foglalkozott az euklideszi 5. posztulátum bizonyításával is.

Az *Almageszten* kívül írt **Ptolemaiosz** még egy másik alapvető művet is, a *Geographiát,* teljes címén *Geographiké hüphégésziszt* (Geográfiai útmutató), amely sokáig olyan bibliája volt a geográfusoknak, mint az *Almageszt* a csillagászoknak. Ebben bevezette, illetve HIPPARKHOSZtól átvette a földrajzi szélesség és hosszúság fogalmát. E lényegében Földhöz rögzített koordináta-rendszerben meghatározta mintegy 8000 város, folyó és más földrajzi objektum helyét. Ismerte a térképkészítésnek azt a módszerét, amely a 3, egymásra merőleges síkra, vagyis egy térbeli derékszögű koordináta-rendszer síkjaira való leképezést alkalmazta. Korábban már említettük, hogy **Ptolemaiosz** nem **Eratoszthenész** fokmérési eredményét, hanem POSZEIDÓNIoszét fogadta el, és ezért távolságadatai igen pontatlanok. Az akkor ismert Eurázsia kiterjedését több mint 180°-nak vette a valódi kb. 130° helyett, és ez különösen a hajósok szemléletét hamisította meg. Ezért gondolta **Kolumbusz** is, hogy a tengeren nyugatnak indulva, hamar el fogja érni Indiát. Ebben a reményében - mint tudjuk - alaposan csalódott. **Ptolemaiosz** művében kétféle térképészeti projekciós eljárást írt le. Az egyiket, a Hipparkhosz-félét, már említettük. A másik a sztereografikus projekció. Ennél a gömbfelület pontjait a gömb egy rögzített pontjából - a pólusból - vetítjük egy síkra. **Ptolemaiosz** vetítési pontnak a Föld északi pólusát választotta, a vetület síkjának pedig az egyenlítő síkját. Erről a transzformációról tudta, hogy a póluson átmenő kört egyenesbe viszi át, a többi kör képe pedig ismét kör. Azzal is tisztában volt, hogy ez a projekció konform, azaz szögtartó. Magát a sztereografikus projekciót nem **Ptolemaiosz,**

hanem **Apollóniosz** fedezte fel, de térképészeti alkalmazása **Ptolemaiosz** nevéhez kapcsolódik. Módszerét több mint ezer évig használták.

Fizikai tárgyú művei közül említésre méltó az *Optika,* amelyben a látás fizikájával, a geometriai optikával, ezen belül főleg a fénytöréssel foglalkozott. Korát megelőzve ügyes fénytörési kísérleteket végzett egy olyasféle eszközzel, amelyet ma fénytani korongnak szokás nevezni. Kísérleteiből azonban azt a helytelen következtetést vonta le, hogy a törési szög arányos a beesési szöggel.

A *Tetrabüblosz* (Négy könyv) című munkájában a csillagjóslás „tudományát" ismertette. Érdekes párhuzamot vonni a *Tetrabüblosz* és az *Almageszt* matematikája között. A magas színvonalú *Almageszt* követi az **Arkhimédész** és **Apollóniosz** által kicsiszolt magas színvonalú matematikai módszereket, a Tetrabüblosz pedig, ez a minden sorában babiloni hatásról tanúskodó csillagjóslástan, matematikájában is visszaesik a babiloni számítástechnikára, megelégedve a közelítő értékekkel.

Ptolemaiosz írt még könyvet az időjárásról, a napóráról, a zenéről, és összeállította a királyok névjegyzékét Nabonasszartól Antonius Piusig. A görög ókor e legnagyobb csillagásza volt az utolsó nagy görög matematikus, aki - szinte püthagoreusi felfogásban - együtt művelte a geometriát, a számok tudományát, a csillagászatot és a zenét, ő tette fel a koronát Apollóniosz csillagászati, Hipparkhosz trigonometriai és Eratoszthenész geográfiai eredményeire.

A GÖRÖG MATEMATIKA HANYATLÓ KORA

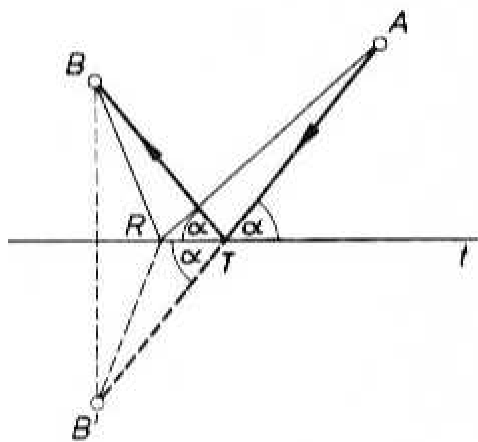
A GÖRÖG HÉTKÖZNAPOK MATEMATIKÁJA

Amióta PÜTHAGORASZtól elindulva kezdtünk magunknak képet alkotni a görög matematikáról, azóta mindig a legkimagaslóbb alkotásokhoz látogattunk el. Úgy jártunk, mint a hegygerincen kapaszkodó turista, aki mind magasabb és magasabb csúcsokra jut. Közben, fáradozásának jutalmául, csodálatos, csillogó kristályokat, talán ritka virágokat is talál, de biztosan szép kilátásban gyönyörködhet, viszont a mélyen alatta húzódó hegylábat már homály fedi. Az élet azonban mégiscsak a völgyben zajlik. A szédítő

magaslatokról előbb-utóbb le kell szállnia, és észre kell vennie, hogy a hegyek közti réteken, ha nem is a magasságok ritka virágai nyílnak, de színes tarkaságban pompáznak a mezők, sőt tudomásul kell vennie, hogy hazavivő útján hatalmas táblákban tenyésznek az igénytelen külsejű, de az életet tápláló haszonnövények.

Túlzás lenne azt állítanunk, hogy az ógörög matematika eddig megismert eredményeire az akkori mindennapi életnek szüksége lett volna, de azért a hétköznapok sem szűkölködtek megoldásra váró matematikai problémákban. Ezt az igényt párhuzamosan a minden csodálatunkat megérdemlő, felfelé ívelő fejlődéssel szintén ki kellett elégíteni. Meg is voltak minden kornak a számolómesterei, akik számoltak és számolni tanítottak élőszóval vagy írásban. E szerényen munkálkodók nevei, művei nemigen maradtak fenn. A matematikatörténet aligha fog emlékezni 100-200 év múltán egy mai képletgyűjteményre, hiszen még a nagy vívmányok közül is csak a legnagyobbakat tarthatja számon, azokat, amelyek valamilyen módon a fejlődés fontos láncszemeivé lettek. Nem szabad azonban lebecsülnünk a mindennapok munkásait sem, akik a maguk korában és helyén előmozdították a gyakorlati matematikai ismeretek terjesztését. Róluk emlékezünk, amikor ismertetjük az

AZ ALEXANDRIAI HÉRÓN (I. század)



187. ábra

munkásságát. Mérnök volt, feltaláló és gyakorlati matematikus. Biztosra vehetjük, hogy Alexandriában élt és dolgozott, de működésének éveit is csak bizonytalanul határolhatjuk körül. Az 1814-ben megtalált *Dioptra* című művében leírt egy napfogyatkozást, amelyet egyszerre figyeltek meg Alexandriában és Rómában. Minden valószínűség szerint ez az égi jelenség i. sz. 62-ben folyt le, tehát a szóban forgó HÉRÓN - a tudománytörténet mintegy 21 Hérón nevű tudóst tart nyilván - az I. században, NERO idejében élhetett. A két városban egyszerre észlelhető napfogyatkozást felhasználta arra, hogy kiszámítsa az Alexandria és Róma közötti időeltolódást. A *Dioptra* általában a földmérés módszereit és eszközeit ismerteti. A „dioptra" szó is egy földmérő eszköz neve. Ugyancsak mérnöki könyvnek minősíthető a *Pneumatika,* amelynek tárgya az általa szerkesztett, lég- vagy gőznyomáson alapuló készülékek és szerkezetek leírása (gőzkürt, templomajtónyitó, éneklő madár, Hérón-labda, „gőzgép", vízóra stb.). A töredékeiben fennmaradt *Mekhanika* az egyszerű gépeknek (emelő, lejtő, ék, csavar, kötél) matematikai leírását adja. A *Katoptrika* című fénytani munkájában kimutatta, hogy az *A* pontból a *t* tükörre beeső fénysugár, amely visszaverődés után a *B* ponton megy át, mindig olyan *ATB* utat fut be, amely az összes elképzelhető *ARB* utak között a legrövidebb *(187. ábra).* A fénytan törvénye szerint az egyíves a szögek egyenlők. Ekkor valóban az *ATB* út kisebb, mint a tetszőleges *R* ponthoz tartozó *ARB* út. Legyen ugyanis B-nek a t-re vonatkozó tükörképe *B'.* Ekkor írhatjuk, hogy:

$$ATB = ATB' < AR + RB' = AR + RB = ARB.$$

Sokáig úgy tudtuk, hogy HÉRÓNnak nem volt kimondottan matematikai tárgyú könyve. 1896-ban azonban előkerült Konstantinápolyban a *Metrika* című könyvének egy 1100-ban készült kéziratos másolata, amely nem tudományos igényű munka. Szerzője nem is annak szánta, hanem inkább gyakorlati tankönyvnek. A maga korában olyan lehetett a szerepe, mint a ma is sokszor használatos, feladatgyűjteménnyel összekapcsolt képlettáraknak. Nem új felfedezésekkel akarja meglepni az olvasót, hanem azt kívánja, hogy fáradságos munkával gyakorolja, sulykolja be a számítási eljárásokat. Ezért aztán nagyon hasonlít a régi egyiptomi és babiloni számítási receptekhez. Hasonló célú és színvonalú a *Geometrika* című munkája is.

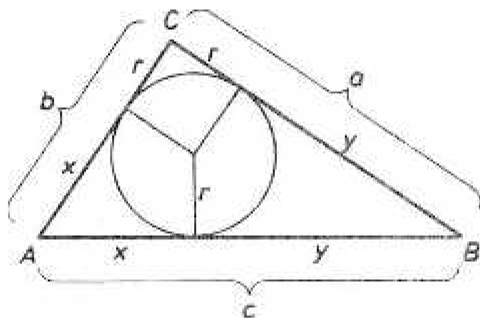
Ebben bukkan fel a matematikatörténet folyamán írásban először az *a, b, c* oldalú háromszög területének kiszámítására szolgáló, a középiskolából ismert „Hérón-képlet”, amely szerint a háromszög *t* területe:

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{ahol} \quad s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Az arab **al-Bírúni** (973-1048) *A húrok könyvében* azt írja, hogy az idézett képletet már **Arkhimédész** is használta. Ha így is van, a pillanatnyilag ismert első írásbeli közlés érdeme akkor is **HÉRÓNé.** Nem kell soká kutatnunk, hogy könyvében hibákra, illetve hiányosságokra találjunk. Jellemzésül kísérjük figyelemmel egyik példáját:

Egy derékszögű háromszög területének és kerületének összege 280. Mekkorák a háromszög oldalai? A megoldási utasításban Hérón a $t=rs$ területképletet használja, ahol r a háromszögbe írható kör sugara, s pedig a háromszög félkerülete. A feladatot tartalmazó egyenletet ma így írnánk fel:

rs + 2s = 280.



188. ábra

Hérón megoldása szerint: s(r + 2) = 280, és mivel 280 = 35*8, azért $r=6$ és s = 35. A háromszög területe tehát: rs = 210. Mivel a háromszög derékszögű, azért (a *188. ábra* segítségével) az átfogó: c = s—r = 29, és a két befogó összege: $a+b=s+r=41$. Végül a = 20 és $b=$ 21.

E feladatban **Hérón** gátlás nélkül hozzáadja a háromszög területét a kerületéhez, tehát területhez hosszúságot. Nem jut eszébe az sem, hogy 280-nak esetleg más szorzatra bontása is lehetséges, még akkor is, ha csak egész megoldásokra szorítkozunk. Szóval hibákat találhatunk, de erényeket is.

Hérón a *Metrikái* definíciókkal kezdi. Ezekben főleg **Eukleidész**hez alkalmazkodik, de akadnak meglepetések is. Ilyen például a „mennyiség" meghatározása: Mennyiség az, amit végtelenül meg lehet nagyobbítani és végtelen kis részekre lehet osztani. A mennyiség fajtái: a szakasz, a terület és a test. Persze a fogalmazásba most is beleköthetnénk, de ez a nem egészen kifogástalan definíció tartalmaz valami újat vagy legalábbis mást a tudós matematikusok számfogalmához képest. A meghatározás ugyanis számnak tekinti a törtet, sőt az irracionális számot is. **Hérón** nem csinál problémát az irracionalitásból, illetve az összemérhetetlenségből. Erre jó az a példa, amelyben éppen a Hérón-képlet alkalmazását mutatja be:

Legyen egy háromszög oldalainak a mérőszáma rendre: $a=1$, $b=8$, $c=9$. Mekkora a területe? A megoldás végső lépéseként - $s = 12$ lévén - a $\sqrt{720}$-at kell kiszámítani. **Hérón** tudja, hogy $\sqrt{720}$ nem fejezhető ki racionális számmal, ezért azt mondja, hogy számítsuk ki a $\sqrt{720}$-at a lehető legkisebb hibával, és erre meg is ad egy olyan iterációs módszert, amelyet akár mai számítógépeink is használhatnak.

Ez pedig a következő: 720-hoz a legközelebbi négyzetszám a 729, aminek a négyzetgyöke 27. Osszuk el a 720-at 27-tel:

$$720 : 27 = 26\frac{2}{3}.$$

Vedd - mondja HÉRÓN receptje - a 27 és a 26 2/3 számtani közepét:

$$\frac{1}{2}\left(27+26\frac{2}{3}\right)=26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Ez már a 27-nél jobb közelítés, hiszen

$$\left(26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=720\frac{1}{36}.$$

Az eljárás nyilván ismételhető, és így a √720 tetszőleges pontossággal megközelíthető. HÉRÓN tehát a babiloni vagy egyiptomi számolás híve, és mint gyakorlati ember nem is lehet más. Az egyiptomi hatás megmutatkozik abban is, hogy a √720 közelítő értékét egységtörtekkel fejezi ki:

$$26+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Biztosan igaza van Van der WAERDENnek, az ismert matematikusnak, amikor az Egy tudomány ébredése című könyvében azt írja, hogy „... a példák és a számítási szabályok történetét bajos lenne kikutatni. Az ilyesmit évszázadokon át változatlanul adják tovább. Néha hozzájön valami új, amire igazi matematikus jött rá, egészen kivételesen még a feltaláló nevét is megemlítik, de ez az átörökítés többnyire névtelen.” Kissé keménynek találom azonban a későbbi sorait: „Érdekesek az emberiség nagy gondolatai, nem ezeknek a gondolatoknak a felhígulása iskolakönyvekben és feladatgyűjteményekben”, majd: „... ne sajnálkozzunk a számtalan elveszett, HÉRÓNéhoz hasonló számtankönyvecskén”. Véleményem szerint ezek a „számtankönyvecskék” valamely kornak igen jellemző emlékei lehetnek, mint ahogy HÉRÓNé is az. Az emberiség „nagy gondolatait” mégiscsak ezek a szerény tankönyvek közvetítik a „nem tudós” emberekhez, a laikus érdeklődőkhöz, az iparhoz és nem utolsósorban a gyermekekhez. A tankönyvek folytonos javításának a követelése - tartalmi, érthetőségi, népszerűsítő, esztétikai stb. szempontból - minden korban jogos, de csak azért, mert kultúraátadó szerepük, tehát kulturális értékük is elvitathatatlan, és a kor képétől elválaszthatatlan. Ilyen szemszögből nézve mégiscsak örülnünk kell, hogy Hérón, ez a nem alkotó matematikus, de tehetséges mérnök és feltaláló, aki kiérdemelte a „nagy mechanikus” melléknevet, írt gyakorlati matematika-kézikönyvet, és jó, hogy ezt mi is megismerhettük. Könyvei nélkül szinte semmit sem tudnánk például az ókori földmérés módszereiről. A római-görög világ tudományának kb. 200-tól kezdődő szakasza két olyan alexandriai matematikust adott,

akik még képesek voltak jelentős mértékben gazdagítani az ógörög matematikát. Ezek egyike **Diophantosz,** a másik pedig **Papposz.**

AZ ALEXANDRIAI DIOPHANTOSZ (III. század)

Életéről csak annyit tudunk, amennyiről egy tréfás rejtvény értesít bennünket, az *Anthologia Palatinában.* Ez ókori görög versek gyűjteménye, amelyet **Konsztantinosz Kephalosz,** a bizánci udvar főpapja foglalt egységbe i. sz. 917-ben. A 15 kötetes gyűjtemény nevét azért kapta, mert a Pfalzi Fejedelemségben találták meg, amelynek latin neve Palatinatus. Az antológia szerint **Diophantosz** sírfelirata így szól:

Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,

Megtanította a sírt: mondja el élte sorát.

Évei egyhatodát tölté ki a gyönge gyerekkor,

Még feleannyi lefolyt, s álla szakálla kinőtt.

Egyheted eltelt még, és nászágy várta a férfit,

Elmúlt újra öt év, és fia megszületett.

Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefenn, mint

Atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.

Őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantosz:

Négy évvel később ő is elérte a célt.

Mondd, hány esztendőt élt hát meg gyászban, örömben

S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír?

Amennyiben hitelt lehet adni a találós kérdés adatainak, **Diophantosz** szép életkort ért meg, 84 éves korában hunyt el. Nevét megörökítette az *Arithmetika* című 13 kötetes könyve, amelyből 6 kötet maradt fenn. Ez a mű tárgyköre szerint nem illik a geometriai jellegű klasszikus görög matematikai alkotások közé.

Módszerében ugyan főként geometriai, de tartalma teljesen az egyenletmegoldásra korlátozódik, ami pedig a korábbi görög matematikusokat nemigen érdekelte. Hagyták ezt a babiloni és az egyiptomi matematikusoknak. Amint azonban **Hérón** esetében láttuk, a görög geometriával párhuzamosan mindig fellelhető volt a babiloni matematika irányzata is, elsősorban a gyakorlati számításokban. **DIOPHANTOSZnál** azonban a keleti matematika a felszínre tört, és ez új vonás. Úgy hiszem, érdemes megmaradt hat könyvének 189 feladata közül néhányat szemügyre venni.

Az első könyvben határozott, a többiben főként határozatlan egyenletek megoldásait mutatja be. A mű a maga nemében magas színvonalú, és főleg azért jelentős, mert szakít a geometriai algebrával. Nem területátalakításokkal dolgozik, hanem igyekszik formailag is algebrai módszereket használni. Távol áll még a mai algebrai jelölésrendszertől, de már külön jele van az egyenlőségre, a kivonásra, az ismeretlenre, a nevezetlen egységre, különböző hatványokra és azok reciprokaira. Az összeadást egymás mellé írással jelölte. Az algebra fejlődésében három korszakot szokás megkülönböztetni. Azt, amelyben algebrai jeleket még nem használtak, és az összefüggéseket csupán szavakkal írták le, az algebra „retorikus” szakaszának nevezik. A szinkopikus algebra már használt rövidítéseket, szimbólumokat is, de még lényeges szerephez jut a szóbeli közlés. A szimbolikus algebrában már mindent szimbólumokkal fejezünk ki: ismeretleneket, műveleteket, ítéleteket.

Az elmondottak szerint **Diophantosz** algebrája még az átmeneti jellegű szinkopikus algebrához tartozik. Nagy valószínűséggel tételezhetjük fel, hogy az az algebra, amelyet **Diophantosz** *Arithmetikájában* találunk, már egy korábbi fejlődés eredménye, azonban a görögországi előzményekről alig maradt fenn írásos emlék. Az amerikai Michigan Egyetem 1921 óta őriz egy olyan iratot, amely a **Diophantosz** előtti időkből származik. Ebben már előfordulnak a **Diophantosz** által használt algebrai jelek. A diophantoszi algebra kétségkívül babiloni hatást mutat, de már fejlettebb, nemcsak jelölésrendszerében, hanem olyan vonatkozásban is, hogy a babiloni matematikusok megelégedtek az egyenlet gyökeinek közelítő értékével, **Diophantosz** azonban már csak pontos megoldást fogad el, igaz, hogy csupán pozitív racionális

értékeket. Az, hogy a törteket is számoknak tekinti, szintén babiloni, illetve egyiptomi hatásra vall, egyszersmind szakítást is jelent azzal a görög felfogással, hogy csak a természetes szám a szám.

DIOPHANTOSZ ALGEBRAI JELÖLÉSRENDSZERE:

ι vagy $\iota\sigma o\varsigma$ (iszosz) = egyenlő.

ς (a szóvégi sz) = az ismeretlen jele.

$\varsigma\varsigma$ (az előbbi jel kettőzve) = az ismeretlen többes száma. Ha például az ismeretlennek az 1-től különböző együtthatója van: $8x = \varsigma\varsigma\bar{\eta}$, ahol $\bar{\eta} = 8$.

$\overset{\circ}{\mu}$ vagy $\dot{M}$ (a monasz = egység szó kezdőbetűje és indexként a második betűje) = a megadott nevezetlen egység jele például $\dot{M}\bar{\iota}\bar{\alpha} = 11$, ahol $\bar{\iota} = 10$ és $\bar{\alpha} = 1$.

Δ^{Y} (dünamisz) = az ismeretlen négyzete. Például $\Delta^{Y}\bar{\varepsilon} = 5x^2$.

K^{Y} (kübosz) = az ismeretlen köbe. Például: $K^{Y}\bar{\beta} = 2x^3$.

$\Delta^{Y}\Delta$ (dünamodünamisz = négyzetszer négyzet) = az ismeretlen negyedik hatványa. Például: $\Delta^{Y}\Delta\bar{\gamma} = 3x^4$.

ΔK^{Y} (dünamokübosz = négyzetszer köb) = az ismeretlen ötödik hatványa. Például: $\Delta K^{Y}\bar{\delta} = 4x^5$.

$K^{Y}K$ (kübokübosz = köbször köb) = az ismeretlen hatodik hatványa. Például: $K^{Y}K\bar{\varepsilon} = 5x^6$.

⋔ = a kivonás jele.

Ezekkel a jelekkel például a

$4x^3 + 3x^2 - 2x + 12 = 25$

így írható le:

$$K^{Y}\bar{\delta}\ \ \Delta^{Y}\bar{\gamma}⋔\ \ \varsigma\varsigma\bar{\beta}\ \ \ \dot{M}\bar{\iota}\bar{\beta}\ \ \iota\ \ \dot{M}\bar{\varkappa}\bar{\varepsilon}.$$

Az *Arithmetika* első könyve a „tiszteletre méltó **Dionüsziosz”-**nak való ajánlás után a fenti jelrendszer bevezetésével kezdődik. **(Dionüsziosz** valószínűleg Alexandria egyik püspöke volt.) A jelölések ismertetését az „El volt fogadva, hogy..." kezdetű mondat vezeti be. Erről szintén arra lehet következtetni, hogy az ismertetett jeleket már **Diophantosz** előtt is használták.

Az első könyv olyan feladatokat tartalmaz, amelyek az

$ax=b$ vagy az $ax^2=b$

alakú határozott egyenletekre vezetnek. E kötetben **Diophantosz** jelzi, hogy tárgyalni fog olyan másodfokú egyenleteket, amelyek

$ax^2+bx=c$,

$ax^2+c=bx$

és

$bx+c=ax^2$

alakúak. (A negatív számok ismerete nélkül a felsorolt egyenletek mind más-más típusúak, egymástól különböző megoldási eljárásokkal.) Ezekkel azonban valószínűleg könyvének elveszett részében foglalkozott.

A második könyv 9. feladata a következő: Egy adott számot, amely két négyzetnek az összege, bontsunk fel két másik négyzet összegére! **Diophantosz** megoldásul a következő gondolatmenetet közli:

Legyen az adott szám 13, amely 2-nek és 3-nak a négyzetösszege. A keresendő két négyzet közül az egyiknek az oldala (alapja) legyen $x+2$, és a másiké x valamely többszörösénél 3-mal kevesebb, például: 2x—3. Ekkor az egyik négyzet: x^2+4x+4, a másik pedig: $4x^2$—12x4-9. E kettő összege: $5x^2$—$8x+13$. Ennek kell 13-mal egyenlőnek lennie, tehát:

$5x^2$—$8x+13=13$,

vagy

$5x^2+8x=0$,

ahonnan

$x=8/5$

(A 0 megoldást nem vette figyelembe.) A keresett két alap tehát:

$$x+2=\frac{18}{5} \quad \text{és} \quad 2x-3=\frac{1}{5}.$$

Négyzetük összege valóban:

$$\frac{324}{25}+\frac{1}{25}=13.$$

Diophantosz az ismeretlenek jelölésénél arra vigyázott, hogy a feladat megoldását szolgáltató másodfokú egyenlet konstans tagja zérus legyen, és hogy a megoldások között negatív szám ne forduljon elő, hiszen ő a negatív számot még nem ismerte. Egy másik lehetséges megoldást adott volna például, ha az egyik alapot $(x+2)$-nek és a másikat $(3x—3)$-nak választjuk. Ekkor $x=7/5$, és a két négyzet 289/25 és 36/25.

Tanulságos ennek a kötetnek a 20. feladata is: Keresendő két olyan szám, amelyek egyikének a négyzete a másik számmal megnövelve ismét négyzetszámot ad. Most **Diophantosz** az egyik számot x-szel jelölte, és a másikat $(2x+1)$-gyel. Ez utóbbinak a négyzetét növelte az elsővel: $4x^2+5x+1$. Ennek ismét négyzetnek kell lennie, és ennek a négyzetnek az oldalát $(2x—2)$-vel jelölte, tehát:

$4x^2+5x+1=4x^2—8x+4$,

ahonnan:

$x=3/13$

Ekkor $2x+1=19/13$, és valóban: $19^2/13^2 + 3/13 = 400/169 = (20/13)^2$.

A két példa nyomán észrevehetjük, hogy **Diophantosz** abban az esetben, amelyben az ismeretlennek egynél több feltételt kell kielégítenie, úgy választja meg az ismeretlen mennyiségeket, hogy egy kivételével minden feltétel teljesüljön. Ekkor az utolsó feltétel szolgáltatja az egyenletet. Az egyenlet felállítása előtt még számtalan megoldási lehetőség nyílik, de az egyenlet már csak

egyetlen megoldást ad. Más megoldást nyerhetünk, ha az egyenlet felírása előtt az ismeretlen mennyiségeket más, de olyan algebrai kifejezésekkel azonosítjuk, amelyek az összes követelményt kielégítik, az utolsó kivételével. A másodfokú egyenlet esetén az ismeretlenek megválasztásával **Diophantosz** úgy ügyeskedik, hogy kiessék vagy az egyenlet konstans tagja - mint az első példánkban vagy pedig a négyzetes tag - mint a második példában. Így mindig racionális megoldáshoz jut.

A két ismertetett példa szemlélteti, hogy Diophantosz nem adja meg a határozatlan egyenletek elméletét, még a legegyszerűbb esetekben sem, de olykor bámulatos ügyességgel talál egyedi, célravezető megoldási módszereket.

A negyedik könyv 31. feladatát Diophantosz az egyiptomi és a babiloni feladatoknál már látott és a későbbi időkben is kedvelt „regula faisi” (a hamisság szabálya = a hamis feltevés szabálya) módszerével oldja meg. Ennek a lényege az, hogy az ismeretlent olyan számnak választja, amely a feltételek egy részének megfelel, azután pedig megvizsgálja, hogyan kell a választott számot úgy megváltoztatni, hogy a többi követelmény is teljesüljön. A módszer tehát a próbálgatásnak egy ügyes formája. Ahhoz, hogy a jelzett feladat megoldásának gondolatmenetét megérthessük, tudnunk kell, hogy Diophantosz ismerte az

$$ax^2 = 2bx + c$$

alakú egyenlet megoldási eljárását (képletét), tehát hogy az egyenlet együtthatóiból a megoldás az

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}$$

képlet előírásainak megfelelő módon nyerhető. Tudta még azt is, hogy racionális megoldást csak akkor remélhet, ha $b^2 + ac$ racionális szám négyzete. Ezek után lássuk magát a feladatot:

Bontsuk az egységet két részre, és adjunk mindegyikhez egy-egy adott számot - például 3-at és 5-öt -, hogy a szorzatuk négyzet legyen.

Jelöljük az egyik részt x-szel, akkor a másik: $1 - x$. Az elsőhöz adjuk a 3-at, a másodikhoz az 5-öt: $x+3$ és $6-x$. Ezek szorzata: $3x + 18 - x^2$. Ennek négyzetnek kell lennie. Most jön a találgatási rész: Legyen ez a négyzet $4x^2$. Ekkor tehát:

$$3x + 18 - x^2 = 4x^2,$$

vagy

$$3x+18=5x^2.$$

Diophantosz - tudván, hogy racionális megoldást csak úgy kap, ha b^2+ac racionális számnak a négyzete, így okoskodik: A $4x^2$ megválasztásánál a 4 együttható nem helyes érték, mert így az egyenletben a $4x^2$-hez hozzáadódik még $1x^2$, és ekkor az 5 együtthatóval már nem lehet teljesíteni azt a feltételt, hogy a

$$b^2+ac=\left(\frac{3}{2}\right)^2+(4+1)\cdot 18$$

racionális szám négyzete legyen. A 4 helyett tehát egy olyan négyzetet szükséges választani - jelöljük ezt y^2-tel -, hogy

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2+(y^2+1)\cdot 18=\frac{9}{4}+18y^2+18=18y^2+\frac{81}{4},$$

vagy ami ugyanaz, ennek a négyszerese: $72y^2+81$ racionális szám négyzete legyen. Ezt a négyzetet **Diophantosz** $(8y+9)^2$-nek választja, hogy a felállítandó másodfokú egyenletben a konstans tag kiessék. Így:

$$72y^2+81 = 64y^2+144y+81,$$

ahonnan

$$y = 18.$$

Ahhoz tehát, hogy az eredeti, x ismeretlenű egyenletnek racionális megoldása legyen, az kell, hogy a 4 helyett a $18^2= 324$-et válasszuk. Ekkor

$3x+18-x^2 = 324x^2$

vagy

$3x+18=325x^2$,

és így

$$b^2+ac=\left(\frac{153}{2}\right)^2,$$

tehát

$x=6/25$.

A keresett számok egyike tehát 6/25, a másik pedig

$$1-\frac{6}{25}=\frac{19}{25}.$$

Ellenőrzésképpen:

$$\left(\frac{6}{25}+3\right)\cdot\left(\frac{19}{25}+5\right)=\frac{11\,664}{625}=\left(\frac{108}{25}\right)^2.$$

Ma már lehetetlen megítélnünk, hogy **Diophantosz** *Arithmetiká*jában mennyi az eredeti feladat, és mennyit vett át előttünk ismeretlen, elveszett feladatgyűjteményekből. Mindenesetre az ő könyve az egyetlen, amelyből képet alkothatunk a görög ókor nem geometriai matematika irányzatáról, a korai algebra kialakulásának egy fontos szakaszáról.

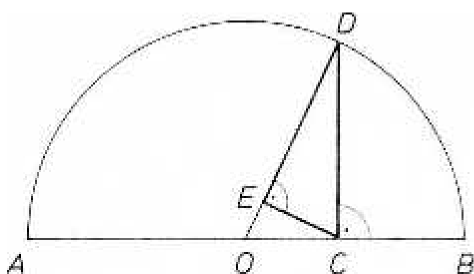
Az *Arithmetika* feladatai számos számelméleti tételt rejtenek. Algebrai jelrendszerének továbbfejlesztésére sokáig nem akadt vállalkozó. Az új, célszerű szimbólumok bevezetése csak a reneszánsz idején kezdődött **(Viéte).**

Diophantosz írt még egy kisebb jelentőségű könyvet is a sokszögszámokról a püthagoreusi hagyományok szellemében.

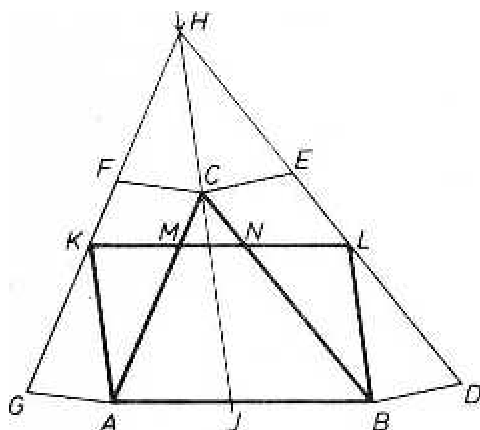
ALEXANDRIAI PAPPOSZ (i. sz. IV. század)

A késői alexandriai korszak másik nagy matematikusa **Papposz** volt. Csillagászattal és geográfiával is foglalkozott. Életéről csak egyetlen megbízható évszám tudósít: Megfigyelte és leírta az i. sz. 320-ban észlelt napfogyatkozást. Eszerint **Diocletianus** (uralkodott 284-305) és **Nagy Constantinus** (uralkodott 307-337) idejében élhetett.

Főként a régebbi görög matematikusok műveit magyarázta és egészítette ki. Jelentős kommentárokat írt **Eukleidész** és **Ptolemaiosz** műveihez. Legfontosabb munkája a *Szünagógé* (Gyűjtemény), amelyben nagy szakértelemmel gyűjtötte össze a nagy elődök kimagasló eredményeit, ugyanakkor közölte saját felfedezéseit is. A *Szünagógé* eredetileg nyolc kötetből állt, ebből azonban elveszett az első és a másodiknak az eleje, valószínűleg a görög aritmetika összefoglalása. A harmadik könyvben ismertette a kockakettőzés és a szögharmadolás történetét, és maga is adott önálló megoldást. A három híres ókori problémáról kimondta, bár bizonyítás nélkül, hogy azok csupán körzővel és vonalzóval nem megoldható feladatok. A gömbbe írható szabályos testek megszerkesztésére új eljárást mutatott. A negyedik könyvben olyan szerkesztési feladatokkal foglalkozott, amelyek térgörbékre és felületekre vonatkoznak. E kötetben több olyan rész található, amely **Arkhimédész** egyes eredményeinek továbbfejlesztése.



189. ábra



190. ábra

Ugyanitt sok érdekes apróssággal is tarkítja a régi művek ismertetését. Ezek közül szabad legyen kettőt megemlítenem. Az első igazán könnyen belátható a *189. ábra* alapján: Az *ABD* félkör *AB* átmérőjére emeljünk merőlegest egy tetszőleges *C* belső pontjában: *CD.* Ez metszi a félkört a *D* pontban. Rajzoljuk meg a *D* ponthoz tartozó *OD* sugarat, és állítsunk erre merőlegest a *C* pontból. Ekkor igaz, hogy az *AC* és a *CB* szakaszok számtani közepe *OD,* mértani közepe *CD* és harmonikus közepe *ED.*

A másik pihentető feladat a következő: Illesszünk az *ABC* háromszög két oldalához egy-egy paralelogrammát a *190. ábrán* látható módon. Szerkesztendő egy olyan paralelogramma, amelynek egyik oldala a háromszög harmadik oldala, a területe pedig akkora, mint a két másik oldalhoz illesztett paralelogrammáé összesen. A megoldás:

Hosszabbítsuk meg az előre megrajzolt két paralelogrammának a *DE* és a *GF* oldalát. Ezek találkoznak a *H* pontban. Húzzunk most a *HCJ* egyenessel párhuzamost az *A* és a *B* pontokból. Így kapjuk az *AK* és *BL* párhuzamos szakaszokat, amelyek mindegyike a *CH* szakasszal egyenlő, tehát *AK* párhuzamos és egyenlő *BL*-lel, vagyis az *ABLK* négyszög paralelogramma. A területről pedig észrevehetjük, hogy:

$t_{ACFG} + t_{BDEC} = t_{ACHK} + t_{BLHC} = t_{KHL} + t_{AMK} + t_{BLN} — t_{MNC}$

és

$t_{ABLK} = t_{ABC} + t_{AMK} + t_{BLN} - t_{MNC}$.

Mivel azonban

$t_{KLH} = t_{ABC}$

azért valóban:

$t_{ACF} + t_{BDEC} = t_{ABLK}$

és így az *ABLK* négyszög a kívánalmaknak megfelel.

Az ötödik könyv a szabályos testekről szól. Ugyanitt ismerteti a szerző ZENODÓROSZnak (i. e. 180 körül) az izoperimetrikus (egyenlő kerületű) alakzatokról írt könyvét.

Ezt az alkalmat kihasználva, talán érdemes közbevetőleg idézni ZENODÓROSZ néhány megállapítását. Ilyenek:

Két egyenlő kerületű szabályos sokszög közül annak nagyobb a területe, amelynek nagyobb az oldalszáma.

A szabályos sokszög mindig kisebb területű, mint a vele egyenlő kerületű kör.

Az egyenlő kerületű n-oldalú sokszögek között legnagyobb területű a szabályos.

Mindegyik szabályos test kisebb térfogatú, mint az ugyanolyan felületű gömb.

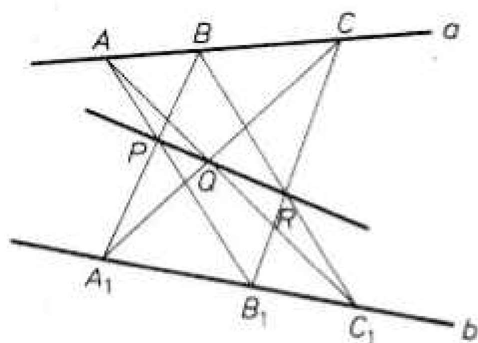
Az egyenlő kerületű síkidomok közül legnagyobb a kör területe.

Az egyenlő felszínű testek között legnagyobb térfogatú a gömb.

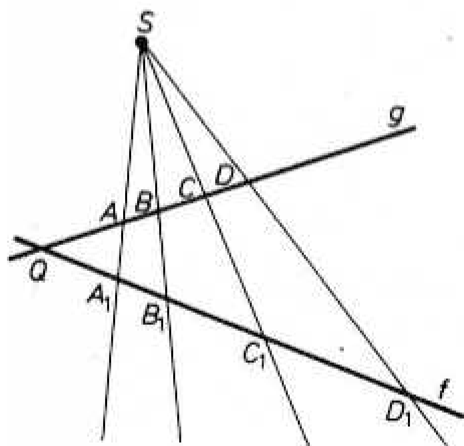
Ezekkel és más ilyen jellegű problémákkal már Arkhimédész is foglalkozott. A hasonló feladatokból nőtt ki a variációszámítás.

A *Szünagógé* hatodik és a nyolcadik könyvét PAPPOSZ a csillagászatnak és a fizikának szentelte. A mű legterjedelmesebb és legkiválóbb része a hetedik kötet, amelyben PAPPOSZ számos elveszett matematikai írás összefoglalását közölte. Itt találjuk a róla

elnevezett Papposz-féle feladatokat is. Ezek azt kívánják, hogy adott egyenest vagy kört adott pontjában érintő olyan kört szerkesszünk, amely még más követelményeket is kielégít. Például: Szerkesztendő egy adott kört és adott egyenest az egyenes adott pontjában érintő kör. Egy másik: Szerkesztendő két adott kört, de az egyiket adott pontjában érintő kör.



191. ábra



192. ábra

A *Szünagógé* nem csupán részletes áttekintést ad szinte az egész görög matematikáról, és nemcsak önálló eredményeket közöl, hanem számos kidolgozásra érdemes problémát, ötletet vet fel. Ezek a későbbi matematikusokra **(Descartes, Fermat)** ösztönző hatással voltak. Ösztönzőnek bizonyult a híres Papposz-tétel is,

amely a projektív geometria megalapozásában jutott fontos szerephez. A tétel így hangzik:

Két egyenes egyikén (a) vegyünk fel tetszőlegesen három pontot, *A-t, B-t* és *C-t (191. ábra).* Tűzzünk ki a *b* egyenesen is három pontot, ezek: A_1, B_1 *és* C_1. Rajzoljuk meg az AB_1 BA_1 BC_1 CB_1, CA_1 és AC_1 egyeneseket. Ekkor az AB_1 *és* BA_1 metszéspontja, a BC_1 és CB_1 egyenesek közös pontja és a CA_1 és AC_1 találkozási pontja egyazon egyenesre illeszkedik. A tétel bizonyításánál eltérünk **Papposz** eredeti gondolatmenetétől (lásd **Van der Waerden**: *Egy tudomány ébredése,* 458-463. oldal).

Az igazolást úgy végezzük el, hogy kissé bepillanthassunk a projektív geometriába, a geometriának abba az ágába, amelynek megszületésében e tétel közrejátszott. A projektív geometria neve is jelzi, hogy alapművelete a projiciálás, vagyis a vetítés. A geometriai alakzatoknak azokkal a tulajdonságaival foglalkozik, amelyek a vetítésnél nem változnak. Egy ilyen tulajdonságot már megismertünk a Menelaosz-tételnél, a 258-259. oldalon. Láttuk, hogy valamely sugárnégyesnek a kettősviszonya vagy valamely egyenes pontnégyesének a kettősviszonya vetítéssel, illetve egyenessel való metszéssel nem változik.

Legyen *g és f a* sík két, egymást metsző egyenese, valamint S egy rajtuk kívüli pont *(192. ábra).* Vetítsük a *g* egyenes *A, B, C, D,* ... pontjait az S pontból az *f* egyenesre. Az *f* egyenes megfelelő pontjai rendre: A_1 B_1 C_1 D_1 ... Azt mondjuk, hogy a két egyenes pontjai perspektív kapcsolatban vannak. Az *S* pontból való vetítés a *g* és az *f* egyenes pontjai között kölcsönös és egyértelmű kapcsolatot létesített. Az *S* vetítési pontot a perspektivitás centrumának, a *g* és *f* egyeneseket a perspektivitás tartóinak nevezzük. Azt, hogy a *g* egyenes *A, B, C, D,* ... pontjainak perspektív képei az *f* egyenesen rendre az A_1 B_1 C_1 D_1 ... pontok, úgy szokás jelölni, hogy:

$$A, B, C, D, \ldots, \overset{S}{\overline{\wedge}} A_1B_1C_1D_1 \ldots$$

vagy rövidebben, a tartóegyenesek segítségével:

$$g \frac{S}{\overline{\wedge}} f.$$

Ez a szimbólum tehát azt jelenti, hogy az *f* egyenes a *g* egyenesnek perspektív képe az *S* centrumra nézve.

A *g* és az *f* egyenesek metszéspontja *(Q)* a perspektivitás kettős pontja, azaz olyan, amely önmagának képe. A kettős pont létezése a perspektivitás transzformáció jellemző tulajdonsága. Mondhatjuk tehát, hogy egy egyenes pontjainak valamely másik egyenesre való olyan projektív leképezése, amely *egy* pontot önmagába visz át: perspektivitás.

Ha egy alakzatot egymás után többször alávetjük a perspektivitás transzformációjának, akkor ezen transzformációk együttesét általános projektivitásnak hívjuk. Részletesebben: Vetítsük az *a* egyenes pontjait az *S* pontból az a_1 egyenesre, majd az így nyert pontokat az S_1 centrumból az a_2 egyenesre, és így tovább, azaz legyen

$$a \frac{S}{\overline{\wedge}} a_1, \quad a_1 \frac{S_1}{\overline{\wedge}} a_2, \quad a_2 \frac{S_2}{\overline{\wedge}} a_3, \quad \ldots,$$

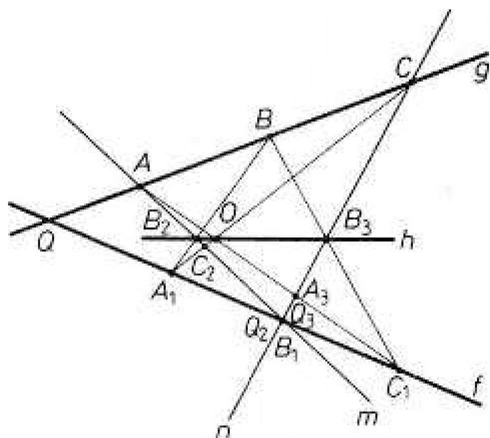
vagy rövidebben:

$$a \frac{S}{\overline{\wedge}} a_1 \frac{S_1}{\overline{\wedge}} a_2 \frac{S_2}{\overline{\wedge}} a_3 \ldots$$

Ha most kiválasztunk a szereplő a, a_1, a_2, a_3, ... egyenesek közül tetszőlegesen kettőt, például a_1-et és a_3-at, akkor azt mondjuk, hogy az a_1 és az a_3 pontjai egymással projektív viszonyban állnak. Ennek jelölése: $a_1 \hat{} a_3$. Összefoglalva:

$$\text{Ha } a \frac{S}{\overline{\wedge}} a_1, \text{ akkor } a_1 \frac{S}{\overline{\wedge}} a.$$

$$\text{Ha } a \frac{S}{\overline{\wedge}} a_1 \text{ és } a_1 \frac{O}{\overline{\wedge}} a_2, \text{ akkor } a \wedge a_2.$$



193. ábra

E vázlatos ismertetés után tűzzünk ki a *193. ábra g és f* egyenesén tetszőlegesen három-három pontot. Legyenek a *g* ezen pontjai *A, B* és C, az *f* pontjai pedig A_1, B_1 és C_1. Tekintsük A_1-et perspektivitási centrumnak, és ebből vetítsük a *g* egyenes pontjait az $AB_1 = m$ egyenesre, azaz legyen

$$g \overset{A_1}{\underset{\wedge}{-}} m.$$

A *Q, A, B* és *C* pontok képe az *m* egyenesen rendre: B_1, *A*, B_2 *és* C_2.

Tekintsük ezután perspektivitási középpontnak C_1-et, és ebből vetítsük a *g* egyenes pontjait a $CB_1 = n$ egyenesre, azaz legyen

$$g \overset{C_1}{\underset{\wedge}{-}} n.$$

A *Q, A, B* és *C* pontok képe az *n* egyenesen sorban:

B_1, A_3, B_3 és C.

Mivel

$$m \overset{A_1}{\underset{\wedge}{-}} g \quad \text{és} \quad g \overset{C_1}{\underset{\wedge}{-}} n, \quad \text{azért} \quad m \wedge n,$$

azaz az *m* és az *n* egyenes pontjai egymással projektív kapcsolatban vannak.

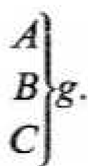
Vegyük észre, hogy mind a két perspektivitás a *Q* pontot a B_1 pontba vitte át (Q_2 és Q_3). Ez azt jelenti, hogy az *m* egyenes Q_2 pontjának az m^*n* projektivitásban az *n* egyenesen a Q_3 pont felel meg, azaz a $Q_2 = Q_3 = B_1$ pont az *m^n* projektivitás kettős pontja, tehát ez a projektivitás perspektivitás, azaz m(O/^)*n.*

Ennek a perspektivitásnak az *O* centruma megtalálható, ugyanis az *m* egyenes A pontjának az *n* egyenes A_3 pontja felel meg, továbbá az *m* egyenes C_2 pontjának a képe az *n* egyenes *C* pontja. A *192. ábrára* vetett pillantás meggyőz bennünket arról, hogy a perspektivitás két megfelelő pontpárja - például *A,* A_1 és *B,* B_1 - az *S* centrumot már meghatározza. Ugyanígy a *193. ábra m* és *n* egyenesein az AA_3 és C_2C egyenesek kijelölik az *O* centrumot. Most pedig lássuk meg, hogy az m(O/^)*n* perspektivitásban B_2 és B_3 megfelelő pontok.

Akkor pedig e két pont és a perspektivitás *O* centruma egyazon *h* egyenesen van.

Ha tehát *a g* és *f* egymást metsző (vagy párhuzamos) egyeneseken akárhogyan kijelölünk három-három pontot, a *g* egyenesen az *A, B* és C, az *f* egyenesen pedig az A_1 B_1 és C_1 pontokat, akkor az AB_1 és BA_1 egyenesek B_2 metszéspontja, a BC_1 és CB_1 egyenesek B_3 metszéspontja, valamint a CA_1 és C_1A szakaszok *O* közös pontja egy egyenesre esnek.

Szokás az AB_1 és BA_1 egyenesek metszéspontját az AB_1 * *BA,* szimbólummal jelölni. Azt pedig, hogy például az *A, B* és *C* pontok a *g* egyenesen vannak, kapcsos zárójellel jelölik, ilyen módon:



E jelölésekkel **Papposz** tétele:

$$\left.\begin{matrix} AB_1 \cdot BA_1 \\ BC_1 \cdot CB_1 \\ CA_1 \cdot AC_1 \end{matrix}\right\} h, \quad \text{ahol} \quad \left.\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\} g \quad \text{és} \quad \left.\begin{matrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{matrix}\right\} f.$$

Az ókor görög matematikusai az általuk vizsgált síkgörbéket kétféle módon származtatták. Az egyik eljárásnál valamely ismert felületet egy síkkal elmetszettek. Ilyen síkmetszetként állították elő például a kúpszeleteket. A másik módszer pont mozgásként definiálta a görbét. Ekkor rendszerint a két összetevőből eredő harmadik mozgás pályájaként jelentkezett a vizsgálandó síkgörbe. Erre láttunk példát az arkhimédészi spirális, a kvadratrix és a cisszoid esetében. **Apollóniosz** *Kónika* című művének a III. kötetében találjuk az első példát arra, hogy valaki görbét mértani helyként határoz meg, azaz mint közös tulajdonságú pontok összességét. **Apollóniosz** büszke volt arra, hogy a kúpszeleteket elsőként definiálta mértani helyként, mégpedig a következőképpen: Keressük meg az egy síkban fekvő három adott egyeneshez a sík azon *P* pontjainak az összességét, amelyekre igaz, hogy *P* egyik egyenestől mért távolságának a négyzete arányos a másik két egyenestől való távolságának a szorzatával.

Oldjuk meg a feladatot középiskolás módszerekkel. Legyen a három egyenes egyenlete:

$y = m_1x + b_1,$

$y = m_2x + b_2,$

$y = m_3x + b_3,$

és a *P* pont koordinátái: x_0 és y_0. A $P(x_0; y_0)$ pontnak az egyenesektől mért távolságai rendre:

$$d_1 = \frac{y_0 - m_1 x_0 - b_1}{\sqrt{m_1^2 + 1}},$$

$$d_2 = \frac{y_0 - m_2 x_0 - b_2}{\sqrt{m_2^2 + 1}},$$

$$d_3 = \frac{y_0 - m_3 x_0 - b_3}{\sqrt{m_3^2 + 1}}.$$

Az előírás szerint:

$d^2{}_1 = a * d_2 * d_3$,

ahol *a* arányossági tényező.

Így

$$\frac{(y_0 - m_1 x_0 - b_1)^2}{m_1^2 + 1} = a \cdot \frac{(y_0 - m_2 x_0 - b_2)(y_0 - m_3 x_0 - b_3)}{\sqrt{m_2^2 + 1}\,\sqrt{m_3^2 + 1}}.$$

A további számolás felesleges, hiszen látjuk, hogy az előállott egyenlet x_0-ban és y_0-ban másodfokú, tehát kúpszelet egyenlete.

APOLLÓNIOSZ VIZSGÁLTA MÉG AZT AZ ESETET IS, AMELYBEN NÉGY EGYENES ADOTT, ÉS A *P* ponttól való távolságok közül kettőnek a szorzata arányos a másik kettő szorzatával. PAPPOSZnak jutott eszébe először ennek a feladatnak az általánosítása négynél több egyenesre, de ő is megállt hat egyenesnél. Ekkor a hat egyenest magába foglaló síkon azon *P* pontok összességét kereste, amelyekre igaz, hogy a *P* pont három egyenestől mért távolságának a szorzata arányos a másik három egyenesig tartó távolságok szorzatával. Ekkor harmadfokú görbét kapott. Ennek még - a görög hagyományok szerint - látta értelmét a háromdimenziós térben, de a háromnál magasabb fokú görbéket már lehetetlennek tartotta. Megjegyezte ugyan, hogy ismert valakit, aki ezzel nem törődött. A

feladat teljes általánosításának a gondolata (ami majd csak DESCARTEs-nál teljesedik ki) újszerű, analitikus geometriai szemléletről tanúskodik. Újdonságában hasonló ahhoz a merészséghez, amellyel Diophantosz bevezette a harmadfokúnál magasabb fokú ismeretleneket: a négyzetszer négyzetet, a négyzetszer köböt, a köbször köböt. A most ismertetett feladatok APOLLÓNIOSZnál és DIOPHANTOSZnál még általánosabb formában jelentkeztek. Ők a *P* pont és valamely egyenes távolságán nem feltétlenül a merőleges távolságot értették (e feladat keretében), hanem a *P* pontból az egyenesig húzott, ahhoz adott szögben hajló szakasz hosszát.

APOLLÓNIOSSZal kapcsolatban megjegyzem, hogy **Papposz** állítása szerint **Apollóniosz** *Kónikája* összesen 487 tételt tartalmazott. A megmaradt részben azonban csak 382 tétel található, a többi elveszett.

Emlékezzünk meg végül PAPPOSznak egy olyan felfedezéséről, amelyre igen büszke volt, és jogosan. Ma a szóban forgó tételt vagy inkább tételcsoportot Gouldin-tételnek nevezik arról az itáliai matematikusról, aki a XVII. században igazolta. Az ide vonatkozó Papposz-féle tételek:

Ha egy síkidomot megforgatunk a síkjában fekvő valamely olyan tengely körül, amely a síkidomot nem metszi, akkor a leírt forgástest térfogatát úgy is kiszámíthatjuk, hogy a síkidom területét megszorozzuk annak a körnek a kerületével, amelyet a megforgatott síkidom súlypontja ír le. - Az olyan forgástest felszínét, amelynek alkotója nem metszi a forgástengelyt, megkaphatjuk, ha az alkotó hosszát megszorozzuk annak a körnek a kerületével, amelyen az alkotó súlypontja forog.

Papposz *Szünagógéja* nemcsak tudósít bennünket a görög ókor legkiemelkedőbb matematikai felfedezéseiről, sok olyanról, amelyről csak tőle értesülhettünk, hanem örök érvényű példát is ad az értelmes, aktív olvasásra, tanulásra. A kiszemelt műveket nem csupán elolvasta és megértette, hanem szinte minden tételhez hozzá tudott tenni valami jelentősét: hiányosságot pótolt, általánosított, következményeket vett észre, új bizonyításokat talált. Így vált egyszerű, passzívan befogadó olvasóból, tanulás közben, kiváló alkotó matematikussá. Nevéről nem szabad

megfeledkeznünk, ha a projektív geometriáról esik szó, de akkor sem, ha az analízis vagy az analitikus geometria alapjait kutatjuk.

AZ ANTIK GÖRÖG MATEMATIKA SZÍNPADÁN LEGÖRDÜL A FÜGGÖNY

Az i. e. VI. századtól az i. sz. V. századig több mint ezer év telt el. Ezalatt a görög nép a keleti babilonitól és egyiptomitól merőben más jellegű kultúrát teremtett. A földhöz kötött paraszti életmód helyett hajózott és kereskedett; az időtlenséget sugárzó merev képzőművészetbe belopta a mozgást, az elevenséget; a mindennapok technikáját természettudománnyá emelte; a gyakorlati élethez tapadt számolást matematikává nemesítette. Olyan kultúrát bontakoztatott ki ez az évezred, amely biztosította a görög szellem örökkévalóságát. Ma, több mint 1500 év múltán a görög gondolatokat gondoljuk tovább, a görög szépet szépítjük szebbé és a görög jót igyekszünk jobbá javítani. Persze mai kultúránk számtalan más szálból is szövődik, de az új színek tarkasága mögött mindig ott sejlik a görög alapozás.

És ez a megállapítás vonatkozik a matematikára is. Amint láttuk, a görög matematika az eleai filozófia talajából nőtt ki. Ezt ma már sokszor elfeledjük. Megfeledkezünk ugyanis a matematika és a filozófia kapcsolatáról. A történelem folyamán a filozófia irányváltozásait rendszerint, ha olykor késve is, de követi a matematika szellemének megváltozása és fordítva. Bizonyára voltak korszakok, és a mostani is olyan, amelyben az atyáknak új a fiak matematikája, és megelőzőleg a szülőknek új volt a gyermekek filozófiája, világnézete.

Az egyiptomi és a babiloni matematika gyakorlati volt, de ennek a gyakorlatnak fő részét nem a technikai, mérnöki tudományok, hanem a mágia világába kell képzelnünk. Erre legátlátszóbb példa a csillagjóslás, de a templomépítés vagy a piramisemelés matematikája is közvetve kultikus célokat szolgált.

A görög társadalom berendezkedésében, szellemében, törekvéseiben lényegesen különbözött az egyiptomitól vagy a babilonitól. A görög mitológia nem igényelte a varázslatot, a mágikus tevékenységeket. A görögök más isteneknek hódoltak, és más módon. Az i. e, VI. században **Xenophanész,** majd **Parmenidész** eljutnak egy teljesen

elvont egyisten fogalomhoz, éppen az antropomorf mitológia kritikája révén. Nem véletlen, hogy ekkor születik meg a püthagoreusok jóvoltából egy, a régitől teljesen különböző matematika. Ez a mágia terhétől megszabadult tudomány még sok misztikus jegyet visel, de a mágikus receptek, a gépies eljárások helyett már bizonyít, és nem kevesebbet akar, mint az egész mindenséget megmagyarázni.

Az eleai idealista filozófia azonban nem az egyedüli irányzat volt. Mellette működött a korábbi, erőteljesen materialista milétoszi iskola. Az i. e. V. századi, mindinkább terjedő demokrácia egyidejűleg a társadalmi ellentéteket is kiélezte. Ezzel párhuzamosan folyt az idealista és a materialista filozófia versengése. Anaxa**gorasz** először veti fel az atomista filozófia alapgondolatait, amelyek DÉMOKRITOSZnál (i. e. 460?-370?) öltenek határozott formát. **Démokritosz** matematikával is foglalkozott. Kár, hogy ilyen tárgyú művei nem maradtak ránk. Ekkor, az V. században már sokan nem hittek az Olümposz isteneiben. A matematika pedig, főleg a püthagoreusok révén, a hétköznapi gyakorlattól elszakadva, hatalmasat fejlődött.

Ugyancsak ebben a században léptek fel a szofisták: **Prótagorasz, Periklész** barátja, aki azt tanította, hogy „minden dolognak mértéke az ember”, és **Gorgiasz,** aki a megismerés lehetetlenségét igyekezett bizonyítani, valamint **Hippiasz,** akit mint matematikust is méltattunk. Ekkor vitázott éppen a szofistákkal **Szókratész,** az erkölcsi idealizmus nagy képviselője, majd IV. századi tanítványa, a görög idealista filozófia nagy rendszerbe foglalója, **Platón, Eudoxosz** mestere. Róla már megemlítettük, hogy lényeges szerepe volt a püthagoreusi matematika továbbfejlődésében. **Arisztotelész,** az ókori idealista filozófia legnagyobb hatású képviselője már nem hitt mesterének ideavilágában, mert nem elégedett meg a puszta spekulációval. Neveltjének, **Nagy** SÁNDORnak jóvoltából hatalmas tapasztalati tudásra tehetett szert, és igyekezett mindig a valóságra építeni, a jelenségek összefüggését keresni. Aminthogy **Platón** és **Arisztotelész** jelentik az antik idealista filozófia csúcsát, úgy az i. e. III. században, tehát a hellenizmus korában **Eukleidész, Apollóniosz, Arkhimédész** virágoztatják ki teljes pompájában az addig is felfelé ívelő, akkor még joggal elméletinek mondható

matematikát. Ugyanekkor működött a kor legnagyobb materialista gondolkodója, **Epikurosz** is, és hirdette tanait az athéni Tarka Csarnokban (Sztoa Poikilé) a sztoikus iskola atyja, a küproszi **Zénón.**

A görög szellem tüze még magasan lobogott, de a görög világ már hanyatlóban volt. A háborúkat, lázadásokat, társadalmi bajokat kísérte a filozófiák zűrzavara, az emberek kiábrándultsága. A római uralom átvette a lenézett görög tudományt, de nem fejlesztette. Dicséretére mondhatjuk, hogy a hatalmas Római Birodalom légiói és közigazgatási apparátusa szinte egész Európába eljuttatott valamit a görög kultúrából, tehát létrehozott „fertőző gócokat”, amelyek később a további fejlődés forrásaivá válhattak. A görög filozófia az időszámításunk első évszázadaiban még egyszer fellángolt az újplatonizmusban, kísérve az újjáéledt püthagoreizmustól. Az újplatonizmus azonban már egy még újabb szellemi éra előkészítője volt: a kereszténységé. A görög istenvilágból kiábrándult és a filozófiáktól megcsömörlött kor az élet új alapjait, új eszméit várta és kapta meg a kereszténységben. A görög filozófia hanyatló korából két neves matematikust ismertettünk: **Diophantoszt** és **PAPPOSZt.** Mindkettőnél kiemeltük az új utak keresésének szándékát. Ők már nem mindig tartották tiszteletben a nagy elődök tabuit.

A történelmi ókor végét az i. sz. 476. évszám, a Nyugat-római Birodalom bukása jelzi. A matematika ókora kissé előbb lezárult. **Diophantosz** és **Papposz** voltak az utolsó nagy fellobanás. **Papposz** maga is már inkább kommentátor volt, annak viszont a legjobb. Utána már csak néhány görög matematikust kell éppen csak megemlítenünk:

A géraszai **Nikomakhoszról** (100 körül) már beszéltünk a tökéletes számokkal és a sokszögszámokkal kapcsolatban. Ez a Jeruzsálemtől nem messze élő újpüthagoreus írt egy könyvet *Bevezetés az aritmetikába* címmel, amelyben elemi szinten tárgyalta a számok tulajdonságait.

A **szmürnai Theón** (125 **körül)**

újplatonista filozófus írt egy aritmetikai kompendiumot, amelyben az aritmetikával együtt zene és csillagászat is szerepelt. A mű

legértékesebb része a csillagászat történetének összefoglalása.

Az alexandriai Theón (i. sz. IV. század)

a IV. század második felében Eukleidész Elemeit és PTOLEMAIOSZt kommentálta. Talán meg sem kellene említenünk, ha nem lett volna egy matematikus leánya:

Hüpatia (kb. 370?-415)

matematikus és filozófus. Ő a matematikatörténet első nőalakja. **Diophantosz** és **Apollóniosz** műveihez írt ügyes, magyarázatos ismertetéseket. Filozófiai tanulmányait Athénban végezte. Onnan tért haza Alexandriába, ahol filozófiát és matematikát tanított. Az újplatóni és az arisztotelészi filozófia összhangba hozásán fáradozott. Tudásával igen nagy tiszteletet vívott ki, tanácsait a legmagasabb körökben is értékelték. Annak ellenére, hogy hű maradt a pogány hellenizmushoz, **Szünésziosz,** a későbbi püspök „anyám, nővérem és tisztelt tanítóm”-nak nevezte. Az ugyancsak keresztény **Orestes,** a római prefektus is tisztelői és barátai közé tartozott. Talán ez lett **Hüpatia** halálának oka. A kereszténységében türelmetlen, sőt kegyetlen **Kürillosz** püspöknek egyik ellenfele volt **Orestes. Kürillosz** úgy vélte, hogy **Hüpatia** uszítja a prefektust a püspök ellen. 415-ben a püspök által felizgatott fanatikus tömeg a hazatérő asszonyt kocsijából kirángatta, egy közeli templomba hurcolta, és ott megölte. Egyesek szerint keresztre feszítették, más híradás szerint „szent” **Cirill** szerzetesei vadállatok elé vetették. HÜPATIÁnak, az első matematikus nőnek a halála lett ilyen módon az alexandriai matematikai iskola elmúlásának szörnyű szimbóluma.

xanthoszi Proklosz (410-485)

Nem sokkal később, 426-ban II. **Theodosius** parancsára a kereszténység védelmének ürügyén az alexandriai iskola még megmaradt létesítményeit is megsemmisítették. Ekkor Athénban még működött **Platón** Akadémiája, a pogány görög világ tudósainak utolsó mentsvára. Ide menekült Alexandriából a Lükiában született **Proklosz** is, és nemsokára az újplatóni iskola vezetője lett. Inkább mint filozófus jelentős, de a matematikatörténet hálás az *Elemekhez* írt kommentárjáért, mert annak bevezetésében

kivonatosan közölte **Arisztotelész** tanítványának, **EUDÉMOSZnak** *A geometria története* című, sajnálatosan elveszett művét.

Nemsokára azonban az athéni iskola sorsa is megpecsételődött. 529-ben **Justinianus,** a bizánci császár bezáratta az Akadémiát, az ókori görög filozófia és tudomány utolsó centrumát. A hellén szellem képviselőinek egy része a fővárosba, Bizáncba, új nevén Konstantinápolyba ment át, néhány matematikus is. Köztük volt az aszkaloni **Eutokiosz (480?-?),** aki a ma már romokban heverő Aszkalonban, Palesztina egyik tengerparti városában született. **Arkhimédész** néhány tanulmányát és **Apollóniosz** *Kónikáját* magyarázta. A *Kónika* kommentárját a

tralleszi ANTHEMiosznak (?—534)

ajánlotta. **Anthemiosz** a híres Hagia Szófia templom egyik építője volt. Írt egy könyvet a gyújtótükörről, amelyben a parabola fokális tulajdonságait is tárgyalta. Ugyancsak a Hagia Szófia templom építésén dolgozott vele együtt a

milétoszi Iszidórosz (530 körül),

aki pályafutását Alexandriában kezdte. Úgy látszik, ő volt a hellén matematikusok sereghajtója. Alexandriából Athénba menekült. Itt a platóni Akadémia utolsó vezetőjének tisztét töltötte be. Az Akadémia megszűntével költözött Konstantinápolyba. Ő is olvasta **Eutokiosz** kommentárjait, és ezek keltették fel érdeklődését **Apollóniosz** és **Arkhimédész** művei iránt. Parabolaszerkesztési feladatokkal foglalkozott. Valószínűleg ő vagy egyik tanítványa írta a *Sztoikheia* XV. könyvét a szabályos testekről.

Ennek a kis konstantinápolyi hármasnak köszönhetjük, hogy **Arkhimédész** műveinek és **Apollóniosz** Kónikájának első négy könyve görög nyelven ránk maradt.

Az ókori matematika fejlődésének a végére érve szinte szégyellem leírni mindazt, amit oly sokan és oly sokszor leírtak már: hogy mai kultúránk egy részének alapjait tekinthettük át, hogy már néhány ezer évvel előbb éppen olyan okosak voltak az emberek, mint ma, hogy csak csodálni tudjuk az ókori eredményeket stb. stb. Ezek helyett szeretném kiemelni azt, ami számomra és - úgy gondolom -

másoknak is tanulságos lehet. Véleményem persze biztosan kiegészítésre szorul, és talán szubjektív is. Rám a görög szellem - természetesen nem csupán matematikáján keresztül - főleg azért hatott erősen, mert kétirányú nyitottságot érzek benne: kapukat tár a múlt felé és építi a jövő útját. Nem restelli átvenni az elődök örökségét, azt nagyra becsüli, de már új lehetőségeket fürkész. A hagyományok tiszteletével építi a jövőt. Újít, de nem mindenáron. Szívesen tanul, de nem passzív módon csupán befogad, hanem alapít, átformál, továbbfejleszt. Tanul, tanít és alkot egyszerre. Nem iparosként „csinálja" a tudományt és a művészetet, hanem szívét-lelkét, hitét beleadva alkot. Az alkotás lázában, örömében és kínjában talán észre sem veszi, hogy teremtményeibe életet lehel, olyan életet, amely alkotójának halála után is hat, lelkesít és termékenyít, azaz örök.

KÍNA

TÖRTÉNELMI VÁZLAT MATEMATIKAI VONATKOZÁSOKKAL

Az Ősi kínai monda szerint az özönvíz után két mitológiai lény - félig ember, félig kígyó - hozta újra rendbe a világot. Ez a két lény, NYUIVA és FUSZJ látható egy, az i. e. V. századból származó falfestményen. Számunkra ez azért érdekes, mert a képen NYUIVA körzőt és Fuszi szögmérőt tart a kezében, a matematika, egyszersmind a rendcsinálás jelképeit. NYUIVA javította ki az égboltot, hogy ne essék több eső. Követ olvasztott, és betömte azokat a lyukakat, amelyeket egy szörny okozott. A helyrehozott égbolt azonban kissé ferdére sikerült, és ezért a csillagok most elhajlanak északnyugat felé. Az ellenkező irányban, tehát délkeleten egy mély gödör maradt. Ide folytak össze a patakok és folyók, így keletkezett a tenger.

195. ábra

cien	szun	li	gen	dui	kan	csen	kun
ég	szél	tűz	hegy	mocsár	víz	dörgés	föld
alkotás	szelídség	fogság	csend	vidámság	elmélyedés	izgatás	fogantatás

Fuszi megtanította az embereket a tűz használatára, megismertette velük a halászat és a vadászat fogásait, megmutatta, hogyan lehet zeneszerszámokat készíteni. Matematikatörténeti szempontból ez a monda azért figyelemre méltó, mert benne jelentkezik először a kínai számmisztika. *Fuszi* ugyanis rajzolt az embereknek 8 háromvonalas ábrát *(195. ábra)* a következőképpen:

A hármas vonalcsoportokban vagy megszakítás nélküli, vagy két részre osztott szakaszok szerepelnek, mégpedig az összes lehetséges sorrendben (két elem harmadosztályú ismétléses variációja). Mind a nyolc vonalhármas az emberi lét ősalapjait és a velük kapcsolatos cselekvéseket, állapotokat jelképezi. Ezek: ég - alkotás, szél -

szelídség, tűz - fogság, hegy - csend, mocsár - vidámság, víz - elmélyedés, dörgés - izgatás, föld - fogantatás. Ezt a jelképrendszert később kibővítették, finomították. E jelek akár kezdetleges írásnak is tekinthetők, de a vonalak számával való játék még jóslásra is alkalmasnak mutatkozott. Mint érdekességet említem meg, hogy hasonló, de kétsoros ábrákat láthatunk a kínai porcelánok finomságjelzéseiként.

Fuszi és **Nyuiva** legendája talán még az 500 000 évvel előbbi pekingi ősemberre vonatkozik, de ismerünk az időben közelebbi meseszerű hagyományokat is. Biztos, hogy Kína szintén az ősi kultúrák egyik bölcsője. Történelmében számunkra egyik nagy csoda, hogy ezen az Európa nagyságú területen egységes kultúra és egységes állam alakulhatott ki, mi több: ez a mai napig fenn is maradt. Ezt csak részben magyarázza a távol-keleti ország földrajzilag elszigetelt volta. Hozzájárult még az uralkodó dinasztiák állandó és tudatos egységesitő törekvése is. Kezdetben ezen az óriási területen éppen úgy törzsi élet folyt, mint másutt. A törzsek közül elsőként az i. e. 3. évezred végén a Hoang-ho (Sárga-folyó) felső folyásának vidékén élők alkottak egységes és a többieket felülmúló civilizációt. **Sze-ma Csien** (i. e. II. század) *Történelmi feljegyzései* szerint az i. e. 3. évezred elején (2700?, 2600?) fecske alakjában az égből szállt alá **Huang-ti,** a Sárga Császár. Ő fogta egységbe a sárga lösz medrű Sárga-folyó földművelő népét. Megtanította őket a házépítésre, a kocsikészítésre, a hajózásra, és mindenekfölött arra, hogy az életet adó nagy folyót gátak közé szorítsák, és így megmenekedjenek az időszakos pusztító árvizektől. Felesége pedig, Si **Ling-hi** császárné 2640 körül meghonosította a selyemhernyótenyésztést. Ennek a legendás Hszia-dinasztiának egyik minisztere, **Li** Sou 9 számot adott a népnek, írja **Sze-ma Csien.** Ha ez a 9 szám a kilenc számjegyet jelenti, akkor ez a legenda a 10-es számrendszer bevezetéséről ad hírt. Valószínű, hogy ebből a korból származnak az első kínai csillagászati megfigyelések. A 10-es számrendszernek kézzelfogható nyomai jelentkeznek az i. e. XIV. századból.

Ebből az időből származnak az első kínai írásos és egyben számírásos emlékek: a hívőknek az áldozati teknősök páncéljára karcolt kérései, fohászai, amelyeket isteneikhez intéztek. Ekkor azonban már a Sang-dihasztia, illetve az utána következő Jin-

dinasztia uralkodott. A Sang-Jin-korszakban (i. e. 1550-1050) kialakult az öntözéses földművelésre alapozott első városi civilizáció, amely a Jangce folyóig (Kék-folyó) terjedt. Ez a már joggal államnak nevezhető szervezet a két nagy folyó közén határozott fölényben volt a környező törzsekkel szemben. Biztosította ezt fejlett mezőgazdaságuk, a lóhúzta kocsi, eszközeik, fegyvereik hatékonysága, az írástudás és nem utolsósorban a nagyobb szervezettség.

A kínai írás akkor még teljesen képszerű volt. A leírandó tárgy nevét az arra legjellemzőbb alaki tulajdonságokat mutató rajzzal rögzítették. Ebből, az akkori kezdetleges, igen sok jelű képírásból fejlődött ki a mai hieroglifikus szótagírás. Ekkor keletkezett például - és ez a városi élet nagyobb jelentőségét is tükrözi - a város szót jelentő „king” írásjel, amelynek hangértéke ma is felfedezhető Peking, Nanking, Csungking, Anking, Siking és más kínai városok nevében. A Jin-korszak utolsó éveiben - a jóslócsontokra írtak bizonysága szerint - már kialakult a kimondottan „értelmiségi” réteg: orvosokból, elöljárókból, naptárkészítőkből, papokból és jósokból.

A Sang-Jin-korszaknak a környezethez viszonyított jóléte és fejlettebb civilizációja természetesen hatással volt a szomszédos népekre is, részben úgy, hogy azok maguk is fejlődtek, részben pedig úgy, hogy idővel vetélytársakká váltak. Az i. e. XI. században a Hoang-ho nyugati folyása mellett élő csou törzsek igázták le a kialakult „Mennyei Birodalmat”. A Csou-dinasztia (i. e. 1050-221) idején az egységesítés tovább folytatódott, és a kultúra is tovább fejlődött. I. e. 1100-1000 táján állt össze könyvvé a *Csou-pi szuan-csing* (Számítási könyv a napóráról). Óvatosabb becslések végleges formájának megszületését későbbi időpontokra teszik. Valószínű, hogy a könyv anyaga nem egyszerre és nem is egy helyütt keletkezett. Erre mutat az is, hogy a mű két részből áll. Mindkettő párbeszédes formájú. Az elsőben CSOUGUNG DAN kormányzó beszélget a számolás tudományában igen járatos miniszterével: SANG HAÓval. A második részben, hat évszázaddal később, CSEN-CE és tanítványa, ZSUNG FANG között folyik az eszmecsere.

A mű címében a csou szó a Csou-dinasztia királyainak fővárosát

jelenti (ma Lojang), a pi szó pedig azt a függőleges rudat, amelynek árnyéka jelzi az időt. A két szó egybeolvadva, vagyis a csou-pi, a napórának és minden, azzal összefüggő jelenségcsoportnak, így a csillagászatnak is a neve. A *Csou-pi* valóban csillagászati mű, de a korábban keletkezett első részében közli a szükséges matematikai ismereteket is, mint például a törtekkel való számolást, a Pitagorasz-tételt és olyan számításokat, amelyek valamely megközelíthetetlen távolság meghatározására alkalmasak. Ez utóbbit a második rész fel is használja a Hold-Föld távolság kiszámításánál.

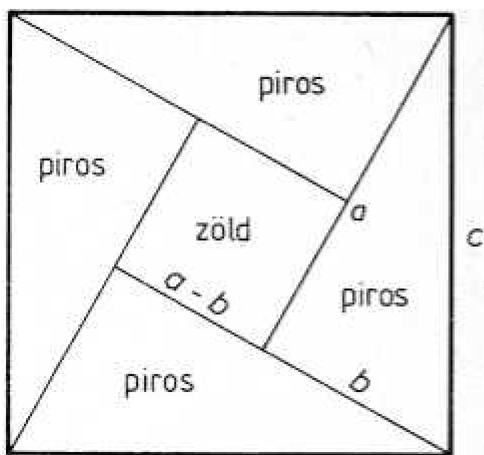
A *Csou-pi* bevezetőjében CSOUGUNG DAN megkérdezi a tudós SANG HAÓt: honnan származnak a számok, honnan a számolás tudománya? SANG HAO felelete: „A számolási módszerek a körből és a négyzetből származnak, a négyzet ered a háromszögből és a háromszög a »kilencszer-kilenc-nyolcvanegy« táblázatból.” Ezután SANG HAO elmondja, hogy a számok írása már a teknőccsontok előtt létezett, és hogy ha a 3, 4 és 5 oldalú háromszöget vizsgáljuk, akkor a befogókra emelt négyzetek területösszege 25, és ez éppen az átfogóra emelt négyzet területe. „Íme, Fuszi így javította meg az égboltot, íme, innen származnak a számok.” A kissé homályos feleletnek többféle magyarázata született. Az egyik:

Fuszi a háromszög segítségével kapott kört - talán úgy, hogy az átmérőre támaszkodó derékszögek csúcsainak a mértani helyét tekintette. Így származik a háromszögből a kör. A körbe rajzolt négyzet rajza is előállítható az átmérőre rajzolt két egyenlő szárú, derékszögű háromszög segítségével. A számok pedig mind „engedelmeskednek” a szorzótáblázatnak. A számok törvényének van alávetve a kör és a négyzet is, és „a négyzet a Föld, a kör az Ég, az Ég kör alakú, a Föld négyszögű. A négyzet [területének] kiszámítására van szabály, a kör [területe] számára [kell] találnunk a négyzetből.” A III. századi CSAO CSÜN-CSING ez utóbbi idézetet így magyarázza: „A dolgok vagy gömbölyűek, vagy szögletesek, a számok vagy párosak, vagy páratlanok. Az égi mozgások kör alakúak, a hozzájuk tartozó számok páratlanok. A nyugvó Föld négyzetes, és számai páratlanok. Mindez következik a jin-jang-elméletből - az ellentétek elméletéből és nincs Ég önmagában és Föld Ég nélkül. Sem az Eget, sem a Földet nem szabad egyedülinek

tekinteni, amint nem lehet ezeket meghatározni csak körrel vagy csak négyzettel.”

Talán nem érdektelen, hogy a derékszögű háromszög oldalainak az elnevezése is a *Csou-pi* idejéből származik. A nevek a napóra részeit jelzik. A hosszabbik befogónak, a napóra függőleges pálcájának a neve „ku”, ami szó szerint combcsontot vagy sípcsontot jelent. Az ősi napórának ez a fő alkatrésze nyilván csontból készült. A rövidebbik befogót, a napórának az árnyékrészét „kou”-nak hívták, ami eredetileg kampót jelentett. Az átfogó „cing” neve sokáig a kör átmérőjét is jelentette. Ez talán arra utal, hogy kezdetben a kört és a derékszögű háromszöget valóban szoros kapcsolatban láthatták a régi kínaiak (a kör a háromszögtől származik, Thalész-tétel!). Az átmérő neve csak később változott „szian”-ra, azaz íjhúrra. A Pitagorasz-tételt a két befogó neve után hívták „kou-ku”-módszernek.

Csao Csün-csing színes szemléltető rajzban mutatta be a „kou-ku”-módszert, általánosan is. Az a, b, c oldalú derékszögű háromszög c átfogójával mint oldallal rajzolt négyzetbe a *196. ábra* szerint elhelyezte négyszer a háromszöget. Ezek területösszege $2ab$. A kimaradt belső négyzet területe $(a—b)^2$. A c^2 területet kitölti az előbbi két terület, azaz



196. ábra

$(a-b)^2 + 2ab = c^2$, illetve $a^2 + b^2 = c^2$.

A kínai matematikus a háromszögeket pirosra, a belső kis négyzetet zöldre színezte.

A kínai kultúrtörténet nevezetes alkotása az Ö*t könyv*. Ez a cím valóban 5 különálló könyv gyűjtőneve. Ezek közül a kínai kultúrára a legnagyobb hatással volt az I *Csing (Az átváltozások könyve),* amelyről néhány szót majd szeretnék mondani. A *Su Csing* az első három dinasztia töredékes története. *Si Csing A dalok könyve,* amelyben népdalokat és történelmi eseményekre emlékező verseket találunk. A *Li Csing A szertartások és a törvények könyve,* a *Jü Csing* pedig *A zene könyve.*

Az *I Csing* az i. e. VIII—VII. században keletkezett, filozófiai értelmezést nyert mű homályos fogalmazású bölcseletek, aforizmák, jelképekkel tűzdelt mondanivalók gyűjteménye. Éppen nehezen érthető volta miatt még jóslásra is felhasználták, bár lehet, hogy összeállítójától ez a cél messze állt. A filozófusok hosszú évszázadokon keresztül belőle olvashatták ki a tanaikat megerősítő tételeket, és ellenfeleik szintén. Matematikatörténeti szempontból a könyv azért említésre méltó, mert minden fejezetét cgy-egy hatos vonalcsoport jelképezi *(197. ábra)*. Ezekben ráismerhetünk az ősi, Fuszi-féle folytonos és megszakított szakaszokra. Az itteni hatos csoportok úgy keletkeztek, hogy az eredeti 8 darab hármas csoportot összepárosították az összes lehetséges módon. Így minden hármas csoportból újabb nyolc született, tehát összesen 64. Ezekből néhányat láthatunk a *197. ábrán.* Ezen lényegében két elemnek (____ és ____) hatodosztályú ismétlésesvariáció-csoportjait látjuk, amelyek mindegyikéhez a könyv írója hozzárendelte azt a fogalmat vagy fogalmakat, amelyekről a vonalcsoporttal megjelölt fejezet szól.



197. ábra

Az átváltozások könyvé ben amint ábráról ábrára az egyik jelkép átváltozik a következőre, olyan fokozatos átmenettel kapcsolódnak össze az általuk képviselt fogalmak, helyzetek, anyagi és lelki jelenségek az „Ég”-től a „Föld”-ig, átfogva mindazt, ami a világon az

emberi lét számára fontos vagy legalábbis akkor fontos volt. Ha az eddigiekhez még hozzávesszük, hogy a folytonos vonaldarab valamilyen rejtélyes társítási alapon a férfi jellegű 9-es számot, a megszakított pedig a nő jellegű 6-os számot jelentette, akkor biztosan eszünkbe jut a püthagoreusi számmisztika alaptétele: „Minden szám!” A mi szempontunkból figyelmet érdemel az, hogy a műben a variációs csoportok mindegyike szerepel, ami pedig arra utal, hogy a felvett eszmefuttatások számát a variációcsoportok száma határozta meg. Ez biztosan nem úgy történt, hogy a szerző először kirakta az összes csoportot, aztán mindegyikhez megfelelő fogalmat illesztett, hanem inkább úgy történhetett, hogy az alapul választott ősi 8 jelkép egy-egy fogalmából alkotott új fogalmakat. Ennek a ténykedésnek a kombinatorikai vonatkozásai azonban nem tagadhatók.

Roppant érdekes, hogy miként találkozott össze a számmisztikában 3000 év és több ezer kilométer távolságból két, egymástól nagyon eltérő filozófia. Ehhez tudnunk kell, hogy a nagy német tudós, **Leibniz** - filozófus és igen vallásos ember - fedezte fel a helyi értékes 2-es számrendszerű számírást, amelyhez csak két számjegy szükséges: a 0 és az 1. Ő, aki főleg azért foglalkozott matematikával, hogy abban feltalálja a gondolkodás legáltalánosabb törvényeit, természetes, hogy a 2-es számrendszert is igyekezett beilleszteni filozófiai-teológiai rendszerébe. Csodás párhuzamot látott abban, hogy amint az összes szám felírásához csak az „egy” és a „semmi” szükséges, ugyanúgy a *Biblia* teremtéstörténete szerint Isten a világot a semmiből teremtette. Csak két ősprincípium létezik: Isten és a Semmi. E kettőből jött létre Minden, ahogyan az 1 számjegy a „semmi”-vel létrehozza az összes számot. Ezt a gondolatot kifejtve, elragadtatással írta 1696-ban **Rudolf Ágost** hercegnek: „Essentiae Rerum sunt sicut Numeri” (A dolgok lényegei a számok). Íme egy püthagoreus 2000 évvel **Püthagorasz** után! Egy évvel később **Leibniz Joachim Bouvet** jezsuita hittérítővel való levelezése révén tudomást szerzett az *I Csing* fenti jelképrendszeréről.

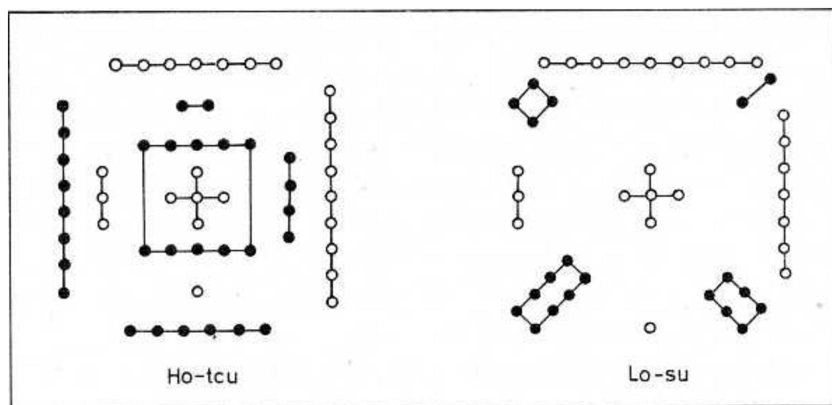
198. ábra

$=0$ $=1$ $=10_2=2$ $=11_2=3$ $=100_2=4$

$=101_2=5$ $=110_2=6$ $=111_2=7$ . . . $=111100_2=60$

$=111101_2=61$ $=111110_2=62$ $=111111_2=63$

Természetes, hogy **Leibniz,** akit abban az időben fogva tartott a 2-es számrendszer és az ahhoz kapcsolt filozófiájának gondolatköre, rögtön a helyi értékes 2-es számrendszert látta bele az *I Csing* 64 vonalas ábrájába. A folytonos szakaszt a 0 számjeggyel, a megszakítottat pedig az 1-gyel azonosította. Így ezekből összeállnak a 2-es számrendszerben a számok 0-tól 63-ig, amint ezt a *198. ábra* szemlélteti. Az ábrán a 2-es számrendszerben írt számokat a „2” alsó indexszel láttuk el. **Leibniz** csakugyan azt hitte, hogy az őskínaiak a helyi értékes 2-es számrendszerben írták a számokat. Ebben azonban tévedett. Kínában 100-as, majd 10-es alapú számírás volt, és így a 2-es számrendszer felfedezése marad egyedül **Leibniz** érdeme.



199. ábra

Az I *Csing* egy másik matematikai érdekességgel is szolgál. Ma már nem deríthető ki, hogy milyen kultikus célokat segített a könyvben található két rajz *(199. ábra).* Az *I Csing* szerint a Ho-csu egy sárkányló (víziló) lábnyoma. A Lo-su (a Lo folyó írása) eredete pedig **Kung Fu-ce** *(Kung-ce, Konfucius)* szerint a

következő: A gondolataiban elmélyedt Jü császárnak megjelent a Hi nevű isteni teknősbéka. Ez viselte hátpáncélján a Lo-su ábrát. Nem kell hozzá nagyon éles szem, hogy ezekben az ábrákban meglássuk a számok jeleit. A nagyobb megbecsülésben részesülő, férfi jellegű páratlan számok fehér karikáival elvegyülnek a páros számok fekete köröcskéi. Ebben a jelölésben megnyilvánul Kína ősfilozófiai felfogása. E szerint a világ minden jelensége két ellentétes erőnek, a „jin”-nek és a „jang”-nak a harca. A „jang” jelenti a világosságot (fehér karika), az aktivitást, a pozitív jelleget, a férfias tulajdonságokat, a ‚jin” pedig a sötétséget (fekete karika), a passzivitást, a negatív jelleget, a női tulajdonságokat. A sárkányló lábnyomán a belső ötöst és a két ötösből álló tízest két körben öleli át az 1,2,3,4, illetve a 6, 7, 8 és 9. Nem tudjuk, mit szimbolizált ez az elrendezés. A teknősbéka hátdíszében viszont felismerhetjük a „világ” első bűvös négyzetét, amelyet a szokott módon mutat a *200. ábra.* A 9 mezős négyzet minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlójában a számok összege 15. Az a legalább 3000 évvel előttünk élt kínai, aki ezt az ábrát szerkesztette, nem volt kezdő a számok tudományában.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

200. ábra

1	4	6
2	9	7
3	5	8

201. ábra

Az első 9 mezős mágikus négyzettel kapcsolatban felvetődhet még egy gondolat. Ez különös módon az akkori földművelés megszervezésével függ össze. A Csou-dinasztia idején az állam földje jogilag a királynak, a vangnak a tulajdona volt. Az egész birodalomban a mezőgazdaság alaprendszere az volt, hogy minden 8 család kapott egy négyzet alakú parcellát, amely 9 kis négyzetre oszlott, ahogyan a *201. ábra* mutatja. Minden családnak jutott egy négyzetnyi rész, amit a maga hasznára művelhetett (1-től 8-ig). A középső, kilencedik négyzeten közösen dolgoztak, és ennek a termése adóba ment. Az ezt a földkiszabatot („A nyugvó Föld négyzetes, és számai páratlanok”, lásd a 298. oldalon) ábrázoló rajz már majdnem bűvös négyzet, hiszen mindkét középvonalán és az átlói mentén a számok összege 18. Talán egy ilyen elrendezésű tábla lehetett a forrása annak a törekvésnek, hogy a számok elhelyezésénél még a sorok és az oszlopok összege is megegyezzék. Korántsem azt szeretném elhitetni, hogy ennek a földművelési rendszernek egyetlen előnye az első bűvös négyzet megszületése volt. Az is lehetséges, hogy a kettőnek egymáshoz semmi köze sincs.

Az viszont biztos, hogy a közösségi földtulajdonnak ez a formája és későbbi megerősödése megakadályozta a föld magántulajdonba vételét, ami Kínában a civilizációnak az európaitól egészen eltérő irányú fejlődését hozta magával. Ez a rendszer lett az alapja a legtökéletesebb ókori civilizációnak, de ez

volt az akadálya az ókort igazán túlhaladó civilizáció megteremtésének is.

A Csou-korszak volt a kínai filozófia kialakulásának a kora. I. e. 500 táján léptek fel azok a filozófusok, akik hosszú időre meghatározták a kínai gondolkodásmódot. Ebben az időszakban a törzsi és nemzetségi különállás még harcolt a dinasztia egységesítő törekvéseivel. Ekkor még a Mennyei Birodalom 71 fejedelemségre oszlott. A csou nemzetség fölényét és e fölény jegyében az egységet csak katonai erővel lehetett biztosítani. Az akkor kialakult két filozófia ezt a két törekvést tükrözi. A taoizmus az i. e. VI-V. században keletkezett irányzat. A tao szó utat jelent. A taoizmus a dolgok útjáról, törvényeiről szóló elveket tanítja. E tanításokat foglalta össze a *Lao-ce (Öreg mester)* című könyv, amelynek címe később *Tao-tö-csingie (Az út és az erény könyve)* változott, és a köztudatban úgy terjedt el, hogy e könyv szerzője Lao-ce, pedig ez csupán a könyv eredeti címe volt. A taoizmus ellenzi a nemzetségi önállóság megszüntetését. A kormányt bírálja az adók és a háborúk miatt. Tanítása szerint a bocs ember a világ kialakult rendjét csak szemléli, de megváltoztatni nem akarja. A tétlen szemlélődés az ideális magatartás.

A másik filozófiai irány megfogalmazója KUNG FU-CE, latinos nevén KONFUCIUS (i. e. 551-479) volt. Tanításait tanítványai foglalták össze a *Lun-jü (Beszélgetések, mondások)* című könyvben. Központi témái: az emberiesség, az igazságosság és az emberi magatartás. Az emberek közti különbség az Ég rendelése, amin változtatni nem lehet. A fiatalok, a gyengék és az alacsonyabb rangúak engedelmeskedjenek az öregeknek, az erőseknek és a magasabb rangúaknak. Az uralmon levők pedig legyenek emberségesek és igazságosak alárendeltjeikkel szemben.

Mindkét filozófiai iránynak számos változata született. Ezekhez érkezett meg Kínába az I. században szellemkialakító erőként a buddhizmus. Ez a három áramlat volt Kína uralkodó filozófiai nézeteinek az alapja, egészen a XX. századig.

Az egységes kínai államnak a Csou-dinasztia idején elkezdett megteremtése már a Csin-dinasztia (i. e. 246-209) érdeme volt. A nemzetiségek váltakozó harcában a Csin Fejedelemség erősebbnek bizonyult a csou törzsnél. JING CSENG, a csin nemzet

királya legyőzte a csou népet, és hogy megkülönböztesse magát a többi vangtól, felvette a huang-ti, vagyis a császár nevet. Így lett a címe Si Huang-ti, vagyis az ELSŐ CSÁSZÁR. Hallatlanul erőszakos, vérengző módszereivel ő teremtette meg két évtized alatt a valóban egységes Kínát. A törzsi, nemzetségi uralkodó osztály helyébe minden fejedelemségben a központi irányítás alatt álló hivatalnokszervezetet ültette. A hivatalok nem öröklődtek, hanem a hivatalnokoknak (mandarinoknak) szigorú vizsgákat kellett letenniük az állások elnyeréséhez. Si HUANG kezdte meg a Kínai Nagy Fal építését. Az emberi építkezések e leghatalmasabbja mintegy 4000 km hosszúságban biztosította a birodalom békéjét az északi ellenséges betörések, főleg a hunok ellen. A fal átlagos magassága 7,5 m, átlagos szélessége 5,4 m. Az ELSŐ CSÁSZÁR könyörtelenül szembefordult a hagyományokkal. A múltba visszahúzó minden szellemi erőt igyekezett megsemmisíteni. Az i. e. 213. évben elégettette az összes korábbi feljegyzéseket, még *A dalok könyvét* is, hogy semmi ne emlékeztessen a régi hagyományokra. A könyvrejtegetők közül több mint 400 tudóst élve eltemettetett, és több ezren a Nagy Falat építették halálukig.

Si Huan-ti tehát, a Csin-dinasztia egyetlen császára, szó szerint tűzzel-vassal szüntette meg a fejedelemségek torzsalkodását és rakta le a Kínai Birodalom alapjait. Voltaképpen az ő uralkodásától lehet Kínai Birodalomról, illetve kínai civilizációról beszélni, az egész országban érvényes törvényekkel, egységes naptárral, közös pénzzel, mértékegység-rendszerrel és írással. Még az alattvalók öltözetét is szabályozta mind a 36 központilag irányított tartományban. A nagyszerű szervezés diadala azonban a visszájára fordult. A közmunkákra mozgósított hatalmas tömeg és az elviselhetetlen adók általános elszegényedéshez vezettek, végül pedig parasztforradalmakhoz.

A Csin-dinasztia, amelyről Kínát a legtöbb idegen nyelvben elnevezték (az átírások különfélék, de a cin, kin, China, stb. mind ugyanarra a szóra, a „csin”-re mutatnak), átadta helyét a Han-dinasztiának (i. e. 206-i. sz. 220). Ez azonban tovább folytatta a Si HUANG által megkezdett munkát, alatta a birodalom területileg is növekedett. A Sárga-folyó és a Kék-folyó országa kiterjesztette uralmát nagyjából a mai Kína területére. A fejlett csatornarendszer lehetővé tette a rizstermelést és az olcsó, gyors

közlekedést. Fellendült a kézművesipar is. Megnyíltak Kína kapui a nyugati világ felé. Kína selyme, kerámiája, lakkfestéke Mezopotámián keresztül eljutott a Földközi-tenger országaiba is. A híres selyemúton a kereskedőkaravánok biztonságára katonaság ügyelt. A mezőgazdasági, ipari és kereskedelmi fellendülés ellenére a Flan-dinasztia is megbukott az i. sz. III. században, nem bírt a túlméretezett közmunkákkal. A parasztság harmadrésze váltakozva közmunkán dolgozott, az ipar és kereskedelem hasznát elnyelte a csatornahálózat kiépítése, az utak létesítése és karbantartása, valamint a katonai kiadások. Az ókor legfejlettebb civilizációját megbuktatta a nyomor kiváltotta parasztfelkelések sorozata. Évszázadokra széthullt a Mennyei Birodalom, és csak i. sz. 600 táján szerveződött újra központi irányítás alá, a Tang-dinasztia (i. sz. 618-907) alatt. Ez a 300 év jelentette Kína virágzó korai középkorát, és a virágzás folytatódott a Szung-dinasztia (960-1279) végéig, a XIII. századig. A XI. század hozta a legnagyobb kínai tudományos és technikai felfedezéseket. Ekkor találták fel Kínában a papírt, a könyvnyomtatást, a lőport és az iránytűt, a mezőgazdaság pedig túlszárnyalta a korabeli európai földművelés eredményeit. A mongol uralom utáni, tehát a XII-XIII. századot követő Ming-korszakban (1368-1644), ismét erős központi hatalom alatt, újabb fejlődés következett be főleg a selyemipar és a porcelánkészítés terén. A magas szintű földművelés azonban további hozamra - a fentebb részletezett közösségi rendszer miatt - már nem volt képes. Ugyanakkor a lakosok száma a XII. századtól a

XIX.-ig több mint háromszorosára növekedett. A fejlődés a kultúra területén is megtorpant. A hivatalnokrendszer megmerevedett. Minden igyekezet a meglevő állapotok stabilizálására irányult. Kína a XX. századig megrekedt a középkorban.

A KÍNAI SZÁMÍRÁS

Mint a világon mindenütt, Kínában is az első számjelek arra szolgáltak, hogy hosszabb időre megőrizzék valamilyen vagyontárgy számbavételi eredményét, leltárát. Ennek nyomát őrzik az első kínai számírásos emlékek, az ún. jóslócsontokra (rendszerint marhalapockára) karcolt számjelek az i. e. XIV-XI. századból. Az akkor használt számjelek azonban már nem csupán „strigulákból” állnak, hanem jórészt hieroglifákká alakultak, a szóírásnak

megfelelően. Ezek a számjelek a *202. ábrán* láthatók.

Ugyanekkor használtak még három hieroglif jelet is, amelyek a helyi értékeknek megfelelő elnevezések. Ezeket a *203. ábra* mutatja. E három jel világosan utal a 10-es számrendszerre. A számokat úgy írták le, hogy a számjel után írták a jel értékének megfelelő három hieroglifa valamelyikét, például úgy, ahogyan a *204. ábra* szemlélteti. Olyan ez, mintha a 7546-ot úgy írnánk, hogy 7e5sz4t6, ahol az *e* az ezres, az *sz* a százas és a *t* a tízes szó rövidítése. Ez már majdnem helyi értékes 10-es számrendszerű írásmód, csakhogy a „számjegy” aktuális értékét nem a helye, hanem az utána írt szójel fejezi ki. Szokás ezt kiírt helyi értékes számírásnak is nevezni. A kínai számírásban a nagyobb „helyi értékek” után következtek rendre a kisebbek, de vagy felülről lefelé, vagy jobbról balra. Mi a további példáinkban is balról jobbra írunk.

Az i. e. X-III. században a kínai számjelek csak kevéssé változtak, amint ezt a korabeli eszközök és pénzérmék feliratai tanúsítják.

Az i. e. II—i. sz. XII. században fejlődött ki a „függőleges és vízszintes” pálcikákból összeállított számjelekkel való számírás. Ez az akkoriban elterjedt valódi pálcikákkal végzett számolásból eredt. Ezeket a számjeleket a *205. ábrán* láthatjuk, a *206. ábra* pedig néhány példát mutat a „pálcikás” számírásra.

Ez már kétségkívül helyi értékes számírás, de nem 10-es, hanem 100-as alapú. Az üres helyi értéket kezdetben csak egy nagyobb közzel jelölték, később - amint a mi példánkban is - egy négyzettel, majd egy köröcskével töltötték ki, ami a számolótábla üres helyi-érték-rovatát jelölte. Talán nyilvánvalóbbá válik ennek a „nullának” a bevezetése, ha végignézünk néhány pálcikás, számolótáblán elvégzett műveletet.

202. ábra

7546 = † ? ⌛ ⊎ ≡ | ⋏ = 7 ezer 5 száz 4 tíz 6

204. ábra

| = tizes, ⊎ = százas, ? = ezres

203. ábra

| = 1, || = 2, ||| = 3, |||| = 4, ||||| = 5, T = 6, ╥ = 7, ╥╥ = 8, ╥╥╥ = 9,
— = 10, = = 20, ≡ = 30, ≣ = 40, ≣ = 50, ⊥ = 60, ⊥ = 70, ⊥ = 80, ⊥ = 90.

205. ábra

3672283 = ||| ⊥ ╥ = || ⊥ ||| $= 3\cdot100^3 + 67\cdot100^2 + 22\cdot100 + 83$

3670083 = ||| ⊥ ╥ □ ⊥ ||| $= 3\cdot100^3 + 67\cdot100^2 + 0\cdot100 + 83$

206. ábra

① százasok egyesek ② ③ ④ ⑤ = 13643

70 százas + +60 százas → 130 százas; 2 + 3 = 5; 80 + 50 = 130; 7 + 6 = 13

207. ábra

① ② ③ ④ ⑤ = 3679

60 − 20 = 40; 42 − 5 = 37; 74 tizes − 60 = 68 tizes; 83 − 4 = 79

208. ábra

① ② ③ ④ ⑤

60·3 = 18 tizes; 60·20 = 12 százas; 60·5 = 3 százas; 3·3 = 9 százas; 3·20 =

⑥ ⑦ = || □ |||| ⊥⊥ |||| = 20 475

= 6 tizes; 3·5 = 15

209. ábra

① ② ③ ④ = 642

51 : 8 = 6 százas
−48
3 százas

33 : 8 = 4 tizes
−32
1 tizes

16 : 8 = 2

210. ábra

A *207. ábrán* az összeadás egymást követő mozzanatait látjuk

(7287 + 6356 = 13 643). A *208. ábra* mutatja a 6243 — 2564 kivonás egymás utáni lépéseit. A *209. ábrán* kísérhetjük végig a 325 • 63 szorzás végrehajtását. A részletszorzatoknál vigyázni kell a helyi értékekre. Végül a *210. ábra* az 5136 : 8 osztás folyamatát érzékelteti. Az üres helyi értékeknek (a szorzási példánál) a négyzettel való VII-VIII. századi jelölése kb. a XIV. században ment át a körrel való jelölésbe.

Az ógörög számírásnál (73. oldal) említettük, hogy a nulla 0-val jelölése görög találmány, és tőlük vették át a hindu matematikusok. Ez a nézet főként HANS FREUDENTHAL (szül. 1905) holland matematikus kutatásai alapján terjedt el. Kimutatta, hogy a IV. században keletkezett indiai *Szúrja Sziddhánta* című csillagászati műben számos görög eredetű szakkifejezés található, sőt mi több, a mű a bolygóknak az Apolióniosz-féle epiciklusos elméletére támaszkodik. Más jelek is arra vallanak, hogy a III—VI. században számos görög matematikai és csillagászati ismeret hatolt be Indiába közvetlenül és mezopotámiai közvetítéssel is. Valószínű, hogy ekkor vették át a görög 0 használatát is. A kínai matematikatörténet alapján azonban más elképzelés is lehetséges. Láttuk, hogy a kínai 10-es alapszámú írásban is jelentkezik az üres helyi értéknek négyzettel vagy köröcskével való kitöltése. Amikor Indiában a 0 felhasználásával kialakult a mai számírás őse, vagyis amikor oda a görög nulla ismerete beszivároghatott, akkor a hinduk a kínaiakkal is elég szoros kapcsolatban álltak. India a közönséges törtek írásmódját, a helyi értékek sorrendjét és a 0 használatát átvehette Kínától is éppen olyan valószínűséggel, mint a görögöktől vagy a babiloniaktól. Ezt a né-nézetet főként Li JANG kínai és JOSEPH NEEDHAM angol matematikatörténész képviseli.

A kínai számírás jelei és jegyei az idők folyamán sokat változtak, de meglepő, hogy ma is nagyjából háromféle számírást használnak. A hétköznapi életben, a műveletlen emberek helyi értékes 10-es alapú számrendszerben írnak. Számjegyei a pálcikajelekből fejlődtek ki. Ezeket mutatja a *211. ábra.* A műveltebbek a leegyszerűsödött hieroglif számjeleket kiírt helyi értékkel használják, a *212. ábrának* megfelelően. A hivatalos életben (a hamisítások megnehezítésére) a bonyolult hieroglif számjelekkel írnak, szintén kiírt helyi értékes 10-es alapú számrendszerben, a *213. ábra* szerint.

O	I	II	III	X	δ	⊥	⫫	⩧	×̄
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pl.: 430 = X III O.

211. ábra

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

十 = tizes, 百 = százas, 千 = ezres, 萬 = tizezres.

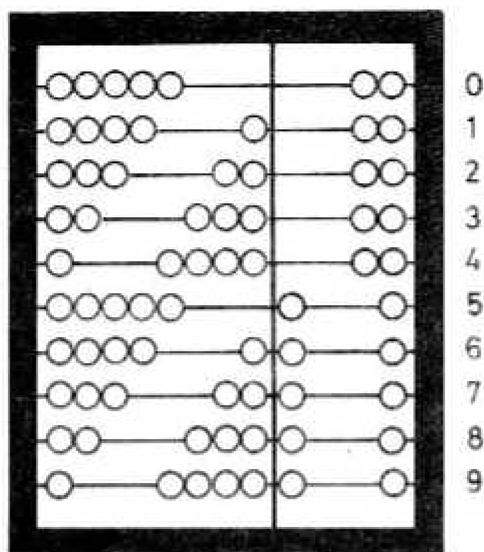
Pl.: 43969 = 四萬三千九百六十九

212. ábra

零	壹	貳	叄	肆	伍	陸	柒	捌	玖
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

拾 = tizes, 佰 = százas, 仟 = ezres, 萬 = tizezres.

213.- ábra



214. ábra

A XV. században a kínai számolótábla pálcikáinak a szerepét átvették az abakusz golyói. A golyós számológép ekkor már egész Kínában elterjedt, számolást könnyítő eszköz volt. A kínai abakuszt *(214. ábra)* egy, a golyókat tartó rudakra merőleges elválasztó fal két részre osztja. Minden rúd egy-egy 10-es helyi értéket képvisel. Az elválasztó falnak az ábra szerinti bal oldalán az 5 golyó mindegyike 1-et ér, a jobb oldalon levő két golyónak egyenként 5 egység az értéke. Rajzunk rudanként mutatja rendre a 0, 1, 2, ..., 9 alaki értékeknek megfelelő golyóállásokat.

A golyós számológépen tizedes törtekkel is lehet számolni az egyesek rúdjának alkalmas megválasztásával. A tizedes törteket Kínában valóban ismerték. Ugyanúgy írták azokat is, mint az egész számokat, tehát kiírt helyi értékekkel (tized, század, ezred).

Európában a tizedes törtek használatáról először **Simon Stevin** (1548-1620) holland matematikus írt a *De Thiende (A tizedes egység)* című könyvében 1585-ben. Előtte **al-Kási** arab matematikus *Az aritmetika kulcsa* című munkájában már 1427-ben ismertette a tizedes törtekkel való számolást. Elég kézenfekvő gondolatnak

látszik, hogy **al-Kási,** aki **Ulugbek** szamarkandi obszervatóriumában dolgozott, felfigyelt a már akkor is több száz éves kínai hagyományok alapján kialakult tizedes törtek használatára. Érdekes párhuzamot vonni a kínai, az al-Kási-féle és a Stevin-féle tizedestört-jelölések között. Amint említettük, a kínaiak minden számjegy után egy hieroglif jellel megnevezték a helyi értéket. Arra is van példa, hogy más színnel írták a tizedesjeleket. **AL-KÁSInál** ugyanezek a jelölésmódok megtalálhatók. Olykor a tizedesjegyeket piros számmal írta, néha megnevezte a helyi értéket, és sokszor az egészeket a tizedesektől függőleges vonalkával választotta el. **Stevin** minden tizedesjegy után (vagy fölött) egy bekarikázott számmal jelölte a helyi értéket (10-nek az oda tartozó negatív kitevőjével), például:

$$6{,}2567 = 6\,\textcircled{0}\,2\,\textcircled{1}\,5\,\textcircled{2}\,6\,\textcircled{3}\,7\,\textcircled{4}$$

vagy

$$6{,}2567 = 6\;\overset{\textcircled{1}}{2}\;\overset{\textcircled{2}}{5}\;\overset{\textcircled{3}}{6}\;\overset{\textcircled{4}}{7}\,.$$

Stevin lényegében ugyanúgy járt el, mint a kínaiak, csak a hieroglif jel helyett bekarikázott szám jelölte a helyi értéket. A háromféle kor e háromféle jelölésének az összhangja - ha még néhány hasonló érv is mellette szólna - elég meggyőzően támogatná azt a feltevést, hogy a kínai tizedes törtektől al-Kási közvetítésével STEVINig egyenes út vezet.

A kínai aritmetikában a tizedes törtek és a mértékegységek kialakulása erősen kötődött a helyi értékes számolótábla használatához. A mind nagyobb pontosságot igénylő mérések végett mind kisebb és kisebb mértékegységek bevezetése vált szükségessé, ugyanakkor kívánatos volt, hogy ezekkel a számolódeszkán ugyanolyan módon lehessen számolni, mint az egész számokkal. Ez a két követelmény egyszerre úgy valósítható meg, ha a mértékegység-rendszer 10-es alapú, vagyis mindegyik 10-szer kisebb a nála közvetlenül nagyobbnál. Li Jang matematikatörténész szerint erősen közrejátszott a kínai tizedes törtek megteremtésében

az a kívánalom, hogy az osztás és a négyzetgyökvonás műveletét a számolótáblán tetszőleges pontossággal el lehessen végezni úgy, hogy ne kelljen megváltoztatni az egész számoknál bevált eljárásokat. A tizedes törtek fogalma Kínában már az i. sz. III. században megjelent, bár a fogalom teljes letisztulása csak a nyugati matematika behatolása után történt meg.

A SZUAN CSING

Si HUANG nagy könyvégetésének esett áldozatul Kína első igazi matematikakönyve, a *Csiu csatig szuan su (Matematika kilenc fejezetben)* is. Ez a könyv még a Csou-dinasztia idején, az i. e. 250 körüli években keletkezett összefoglaló mű, amelyből megismerhető Kína egész matematikája. Egyes kutatók a könyv anyagának összegyűjtését és egybeformálását az i. e. 150 táján élt CSANG CANnak (?-i. e. 152?),a tekintélyes államférfinak tulajdonítják. Könnyen hihető, hogy a könyvégetés után a mű anyagát valóban össze kellett szedni és rendezni az esetleg megmaradt, sérült, hiányos néhány példány alapján. Az biztos, hogy amíg végleges tartalmát és alakja el nem nyerte, addig többen átdolgozták és kiegészítették. Ezek között meg kell említenünk az I. századból KENG Csou-CSANGOt és Li SZINt, a III. századi Liu Hujt, a VI. században élt CSEN LUANT és a VII. századi Li CsuN-FENGet. Különösen kiemelendő Liu Huj, aki a könyv 9 fejezetét kiegészítette egy tizedikkel *Haj tao szuan csing (Matematikai értekezés a tengeri szigetről)* címen. Az így 10 részesre bővült könyv címe: *Szuan csing (Matematikakönyv),* amelyet az irodalomban szokás még a *Tíz Klasszikus* néven is idézni.

Az ó- és középkori kínai matematika megismeréséhez tanulságos a *Szuan csing* átlapozása. A könyv kérdés-felelet formában 246 feladatot tartalmaz. Mindegyik feladatnak közli a megoldási módját, megfogalmazza - olykor általánosan is - az eredményhez vezető utat. Magyarázat, megokolás azonban nincs. Ugyanúgy receptszerűen közli a szükséges eljárásokat, mint ahogy tették ezt az óbabiloni vagy az óegyiptomi szerzők. A 10 fejezet mindegyike külön-külön is megállná a helyét, köztük szoros kapcsolat, egymásra építettség nem található, bár bizonyos nehézségi sorrendet figyelembe vesz. Tekintsük át az egyes fejezetek tartalmát.

Az I. fejezet címe: *A mezők mérése (Fang tien).* A fejezet címében

szereplő „tien” szó, illetve hieroglifa eredeti jelentése mező, később azonban a matematikában általában síkidomot jelent. A fejezet *Fang tien* címe tehát olyan árnyalattal „mező mérése”, mint ahogy a görög geometria „földmérés”. Amint tehát a címből sejthető, a fejezet főleg területszámítási feladatokat ölel fel. Az első felében példákat ad az egyenes szakaszokkal határolt különböző síkidomok területének kiszámítására, majd a körrel és a kör részeivel: körcikkel, körszelettel és körgyűrűvel foglalkozik. Mivel az idomok oldalait hol egész, hol törtszámokkal adja meg, azért bevezetésképpen megmutatja a közönséges törtekkel való számolást is, pontosabban a négy alapműveletet. A mai módszerektől lényegileg csak a törtnek törttel való osztása különbözik. Ezt mindig előzetes közös nevezőre hozással végzi el. Pontosan csak a négyzet, a téglalap, a trapéz és a háromszög esetében számol. Más síkidomnál megelégszik közelítő eredménnyel, például az általános négyszög területét úgy számítja ki, hogy a két szemben fekvő oldal számtani közepét megszorozza a másik két oldal számtani közepével. A kör területének meghatározásánál ez a valószínűleg legrégibb fejezet a π értékét 3-nak veszi. A két párhuzamos húrral határolt körszelet területét úgy számítja, mintha trapéz lenne. Más, körívekkel vagy görbe vonallal határolt síkidomot is helyettesít a területszámításnál egyenes vonalú síkidommal. A fejezet ősi voltát mutatja az is, hogy terület-mértékegységül annak a téglalapnak a területét választja, amelynek egyik oldala 15 **pu** (lépés), a másik pedig 16 pu. Ugyancsak az anyag ősi eredetét árulja el a minden feladat végén visszatérő mondat: „Az a kérdés, hogy mekkora a mező?” A terület szót még nem használja, mert a feladat keletkezésekor külön a terület fogalma még nem létezett és a térfogaté sem. Csak a számolások közben alakult ki, hogy az eredetileg csupán a „csi” szóval jelölt eredmény megkülönböztetendő a terület és a térfogat esetén. A „csi” jelentését úgy lehetne visszaadni, hogy a feladat hosszúságadatainak a „szorzata”. Idővel a területszámítás eredményét a „csi” hieroglifához csatlakozó „mian” jel fejezte ki, tehát a mian-csi (síkszorzat) szó vette át a terület jelentését. Hasonló módon a „ti-csi (tér-szorzat) a térfogatot jelenti. Az idők folyamán ugyanilyen értelemváltozáson, illetve kiegészülésen ment át a „tien” jel is. Mint említettem, kezdetben mező, aztán általában a síkidom írásjele volt, később pedig új hieroglifák csatlakozásával speciális síkidomokat jelentett; például a fejezetcím, a fang-tien a négyzet, a

csi-tien (ferde mező) pedig a trapéz szónak a megfelelője. Ez a kis kitérő talán elég meggyőzően mutatja, hogy a gyakorlati számítások közben új meg új fogalmak születnek, a régiek átalakulnak, finomulnak, esetleg többfelé ágaznak. A számolás és a fogalmak fejlődésének ez a kölcsönös egymásra hatása jól érzékelhető már a *Szuan csing* keretein belül is, a különböző korokban keletkezett fejezeteket figyelve.

Következzék e fejezet törtekkel kapcsolatos néhány feladata: „Egy mező szélessége

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\ \text{pu.}$$

A mező [területe] 1 mu. Az a kérdés, hogy mekkora a hosszúság? Felelet: $88+232/761$ pu.” A mu területmérték, mégpedig 1 mu $=$ 240 pu^2.

A megoldáshoz először a szélességet kell kiszámítani. Ehhez törteket kell összeadni. A kínaiak a közönséges törtet úgy írták, mint mi, de törtvonal nélkül. A megoldási utasítás így szól: „A szabály a következő: Van nyolc tört, végy az 1 helyett 840-et, az 1/2 helyett 420-at, az 1/3 helyett 280-at, az 1/4 helyett 210-et, az 1/5 helyett 168-at,

az 1/6 helyett 140-et, az 1/7 helyett 120-at és az 1/8 helyett 105-öt. Add össze ezeket. Kapsz 2283-at. Ez a számláló.” E részletes számolási utasítás természetesen a számolótáblára vonatkozik: „Rakd ki sorba az 1 put és a törtek számlálóit és nevezőit!”

1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	4	5	6	7	8

„Az 1 put és a törtek számlálóit szorozd meg sorban a legkisebb tört nevezőjével!” Ez 8, tehát:

8	8	8	8	8	8	8	8
	2	3	4	5	6	7	8

Ezután egyszerűsítünk:

8	4	8	2	8	4	8	1
		3		5	3	7	

Most a 7-tel való szorzás következik:

56	28	56	14	56	28	56	7
		3		5	3	7	

Az 56/7 egyszerűsítése után 5-tel szorzunk

280	140	280	70	56	140	40	35
		3			3		

Végül szorzunk 3-mal.

840 420 280 210 168 140 120 105

Most válik érthetővé a legelső „szabály”: Végy 1 helyett 840-et, 1/2 helyett 420-at stb. E műveletek után a 9 tört számlálója sorakozik a számolótáblán. Ezek összege, a 2283 a végeredmény számlálója. A közös nevező pedig: 8 • 7 • 5 • 3 = 840. Tehát a „mezőnek” nevezett téglalap szélessége

$$\frac{2283}{840}=\frac{761}{280}\text{ pu.}$$

A hosszúság pedig:

$$240 \text{ pu}^2 : \frac{761}{280} \text{ pu} = 88 + \frac{232}{761} \text{ pu}.$$

A törtműveletek begyakorlására szolgáló feladatsorban sok olyan feladat van, amelyekre azt mondhatjuk, hogy álgyakorlati feladatok, és a realitással nem törődve, csak gyakorlásra valók. Ilyenekből idézünk kettőt.

A 17. feladat: „7 ember között el kell osztani 8 1/3 pénzérmét. Kérdés: hányat kap mindegyik? Felelet: 1 és 4/21 pénzt."

A 18. feladat: „3 1/3 ember között felosztandó 6 + 1/3 + 3/4 pénz (cjan). Kérdés: Mennyit kapnak egyenként? Felelet: Egy ember kap 2 1/8 pénzt."

Már Liu Huj (III. század) keze nyomát viseli az az eljárás, amely a háromszög és a trapéz területének a meghatározására ad „képletet". A módszer az *ABC* háromszög területének kiszámítása esetén szemlélhető a *215. ábrán.* E szerint a háromszög *T* területe:

$$T = t_1 + t_2 = \frac{1}{2} a_1 m + \frac{1}{2} a_2 m = \frac{1}{2} m(a_1 + a_2) = \frac{am}{2}.$$

A *216. ábra ABCD* trapézánál hasonló a módszer. Ennek területe:

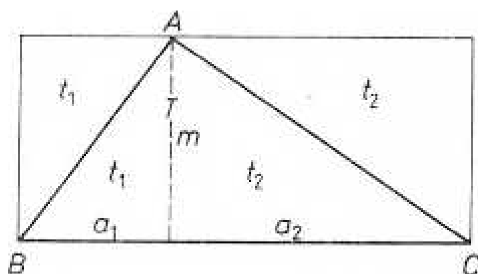
$$T = t_1 + t_2 + t = \frac{1}{2} a_1 m + \frac{1}{2} a_2 m + bm =$$
$$= \frac{1}{2} m(a_1 + a_2) + bm = \frac{1}{2} m(a - b) + \frac{1}{2} \cdot 2bm = \frac{a+b}{2} m.$$

A *Szuan csing* II. részének a címe: *A különböző gabonafajták viszonya.* Mezőgazdasági tárgyú feladatokat sorakoztat fel, olyanokat, amelyek az ún. hármasszabállyal oldhatók meg. Hármasszabálynak nevezzük az aránypár egyik tagjának a kiszámítását az adott három tagból. A fejezet megismertet az űrmértékekkel, a különböző árucikkek értékének a meghatározásával, az adózással kapcsolatos

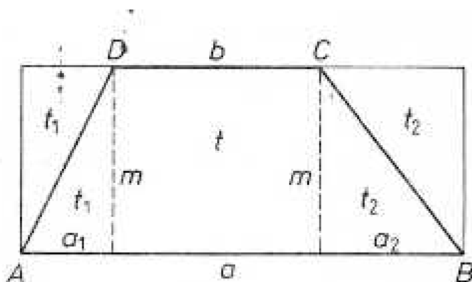
számításokkal stb. Általában olyan feladatokat találunk itt, amelyek az egyenes arány körébe tartoznak. Bemutatunk innen is két feladatot:

1. Vásároltunk 18 cserepet 160 pénzért. Mennyibe került 1 darab?

2. Van 1 dou kölesünk. Mennyi durván hántolt kölest kapunk érte? Felelet: 6 sen durva kölest. (1 dou = 10 sen, űrmértékek.) A felelet megadásához szükséges a fejezet bevezetésében közölt táblázat, amelyből a különböző fajta gabonák egyenértékeit kiolvashatjuk. A táblázat néhány adata:



215. ábra



216. ábra

A megoldási utasítás így hangzik : „Szabály: Vedd a köles mennyiségét, válaszd ki a durva köles mennyiségét, osszál 5/3-dal." Kissé félreérthetetlenebbül: A táblázatban a köles egyenértéke 50, a durva kölesé 30. A kettő hányadosa 5/3 . Ezzel az 5/3-dal kell osztanod az 1 dout, illetve a 10 sent: 10: 5/3 = 6.

Az arányos elosztás című III. fejezet feladatai főleg arányos osztásra vezetnek, és alkalmazzák az összetett hármasszabályt is. Ízelítőül

innen is kiválasztottunk néhány feladatot:

1. Egy ügyes szövőnő mindennap kétszer többet sző, mint az előzőn. 5 nap alatt 5 csi szövetet készített. Kérdés: Mennyit készített naponta? Felelet: Az első napon 1 19/31 cunt, a következőn 3 7/31cunt, a harmadikon 6 14/31 cunt, a negyediken 1 csi és 2 28/31 cunt és a legutolsó napon 2 csi és 5 25/31 cunt. (1 csi = 10 cun, hosszmértékek. Az arányszámok összege 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31. Így 1 rész 50/3l = 1 19/31 cun. Stb.)

2. Öt különböző rangú vadász; 5 szarvast ejtett el. A rangok szerint osztozkodtak, 5 : 4 : 3 : 2 : 1 arányban. Kérdés: Hány szarvas jutott egyre? Felelet: A rangok szerint sorban 1 2/3 , 1 1/3, 1, 2/3 és 1/3 szarvas.

Ennek a fejezetnek két olyan feladata van, amely vagy hiányos - talán ez a valószínű -, vagy hibás. Mind a kettő fordított arányosságra példa. Ezek közül az egyik:

A-nak van 3 sen kölese, B-nek 3 sen durván hántolt kölese és C-nek 3 sen főzni való kölese. Kérdés: mennyit kapott mindegyik, ha köleseiket összekeverték, és azután a keveréket újra elosztották?

Mivel a könyv elején található egyenérték-táblázatból az olvasható ki, hogy 50 egység közönséges köles 30 egység durván hántolt, illetőleg 75 egységnyi étkezési kölest ér, azért, ha a beadott köles értéke szerinti arányban osztoznának a keveréken, akkor az *A, B, C* sorrendet tekintve az osztási arány 50 : 30 : 75 lenne. A feladathoz csatolt rövid utasítás szerint azonban az osztási arány 1/50 : 1/30 : 1/75. E szerint vagy a megoldás rossz, vagy a feladat szövegéből hiányzik egy követelmény, amely a reciprok arányszámokat indokolja. Ez utóbbit feltételezve, ha a 9 sen keveréket elosztjuk az arányszámok összegével, kapunk 135-öt. Ennek az arányszámokkal való szorzata rendre megadja a fordított arányú elosztás adagjait. Így A kap 135/50 = 2 7/10, B pedig 135/30 = 4 1/2 és C 135/75 = 1 4/5 sen keverék kölest. BEREZKINA szovjet matematikatörténész feltételezi, hogy a feladat megoldása a számolótáblán pálcikákkal a következőképpen történhetett: Kirakták először az 50, 30 és 75 számokat. Aztán ezek közül kettőt-kettőt összeszoroztak:

$30*75 = 2250$, $50*75 = 3750$, $50*30 = 1500$.

Innen 5-tel való egyszerűsítés után nyerték a 450, 750 és 300 számokat. Ekkor az ismeretlenek:

$$x_A = \frac{9 \cdot 450}{1500} = 2\frac{7}{10}, \quad x_B = \frac{9 \cdot 750}{1500} = 4\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x_C = \frac{9 \cdot 300}{1500} = 1\frac{4}{5}.$$

Végül még egy III. fejezetbeli feladat: Egy ember 14 csin nyers selyemért kapott 10 csin selyemszövetet. Most beadott 45 csin és 8 lan nyers selymet. Kérdés, mennyi selyemszövetet kapott érte? (16 lan = 1 csin, súlymértékek.)

A *Szuan csing* IV. fejezete *(Sao kuang)* az első rész feladatainak a megfordításait tárgyalja. Ezek megoldásához szükség van a négyzetgyök- és a köbgyökvonásra is. Megmutatja tehát, hogyan lehet ezeket a műveleteket elvégezni a számolótáblán. Ebben a részben kétféle szövegezésű négyzetgyökvonási, illetve köbgyökvonási feladat szerepel. Egyik részük adott négyzethez keresi a négyzet oldalát, a másik csoportjuk adott területű kör sugarának vagy kerületének kiszámítását kívánja. Az utóbbi feladatokban a π értékét mindig 3-nak kell venni. Ezeknek megfelelően a köbgyökvonásra szánt feladatokban egy adott térfogatú kocka élét kell kiszámítani, illetve ismert térfogatú gömb sugarát. A gömbre vonatkozóan π értékét 27/8-nak (3,375-nek) kell tekinteni, bizonyára a köbgyökvonás kényelmesebb elvégzése érdekében. A fejezet meglepő érdekessége, hogy a gyökvonásnak a számolótáblán való elvégzésére olyan utasítást ad, amelyben a ma Horner-elrendezésnek nevezett eljárást ismerhetjük fel. Amint az eddigi számítási szabályoknál, itt sem találunk semmi magyarázatot. A módszer megokolása csak a XIII. században bukkan fel **Csin Csiu-sao** *Su su csiu-csang* (A matematika 9 fejezete) című kéziratos munkájában, de még így is **William Georg Horner** (1786-1837) előtt 500 évvel.

A VII. századi **Vang Hsziao-tung** magyarázat nélkül ugyan, de a Horner-módszerrel, vagy találóbban a kínai-Horner-módszerrel harmadfokú egyenletek közelítő megoldásait határozta meg. A kínaiak „fang fa” módszernek nevezték (fang = gyökvonás,

négyzetoldal, fa = osztó), aminek olyasmi jelentése lehetett, hogy az osztás segítségével végzett gyökvonás. Azért, hogy a kínai ókori matematika e felfedezését még jobban értékelhessük, gondoljuk végig mai eszközeinkkel, miként lehet eljutni a kínai gyökvonás számolótáblára kidolgozott eljárásához.

Legyen *x* fogyó hatványai szerint rendezett n-ed fokú polinom a

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Rendezzük át ezt a polinomot az (x—p) fogyó hatványai szerint, ahol *p* pozitív állandó. Az új elrendezésben természetesen az a_i együtthatók helyett valamilyen más, b_i együtthatók szerepelnek:

$P_n(x) = b_n(x-p)^n + b_{n-1}(x-p)^{n-1} + \dots + b_2(x-p)^2 + b_1(x-p) + b_0$.

Egyenlőségünk jobb oldalán emeljük ki az *(x—p)* tényezőt az első *n* tagból:

$$P_n(x) = \\ = (x-p)[b_n(x-p)^{n-1} + b_{n-1}(x-p)^{n-2} + \dots + b_2(x-p) + b_1] + b_0,$$

vagy áttekinthetőbben, ha a szögletes zárójel kifejezését P_{n-1}(x)-szel jelöljük:

$P_n(x) = (x-p)P_{n-1}(x) + b_0$.

Innen leolvashatjuk, hogy a $P_n(x)$-nek az *(x-p)-vel* való osztásakor a maradék éppen b_0. Ugyanakkor az is látszik, hogy a $P_n(x)$ helyettesítési értéke az $x = p$ helyen b_0, azaz $P_n(p) = b_0$. A $P_n(x)$ polinom helyettesítési értéke tehát az $x = p$ helyen éppen a $P_n(x) : (x—p)$ osztás maradéka. Ha történetesen ennek az osztásnak a maradéka, azaz a b_0 zérus, akkor *p* a $P_n(x) = 0$ egyenlet egyik gyöke.

Rendezzük most a $P_{n-1}(x)$ polinomot is az *x* fogyó hatványai szerint, amikor is az új együtthatókat c_i-vel jelöljük. Így:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=$$
$$=(x-p)(c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0)+b_0.$$

A jobb és bal oldal együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{array}{lcl}
a_n=c_{n-1} & \text{ahonnan} & c_{n-1}=a_n \\
a_{n-1}=c_{n-2}-pc_{n-1} & \text{ahonnan} & c_{n-2}=a_{n-1}+pc_{n-1} \\
a_{n-2}=c_{n-3}-pc_{n-2} & \text{ahonnan} & c_{n-3}=a_{n-2}+pc_{n-2} \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
a_2=c_1-pc_2 & \text{ahonnan} & c_1=a_2+pc_2 \\
a_1=c_0-pc_1 & \text{ahonnan} & c_0=a_1+pc_1 \\
a_0=b_0-pc_0 & \text{ahonnan} & b_0=a_0+pc_0.
\end{array}$$

A második oszlop szerint tehát a $P_n(x)$: (x—p) osztás $P_{n-1}(x)$ hányadosának a c_i együtthatói és a b_0 maradék a c_{n-1}-től kezdve rendre kiszámíthatók. Ennek a számításnak a célszerű elrendezését nevezzük „Horner”-elrendezésnek, amelyet, mint látni fogjuk, méltán nevezhetnénk kínai módszernek is. A mondott elrendezés sémája:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
x-p & \downarrow & +pc_{n-1} & +pc_{n-2} & \ldots & +pc_2 & +pc_1 & +pc_0 \\
\hline
 & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_1 & c_0 & b_0
\end{array}$$

Példaképpen a

$P_4(x)=2x^4—x^3— 10x^2+14x—12$

polinomot osszuk el (x—3)-mal!

$P_4(x) = (x-3)P_3(x) + b_0$.

A sablon szerint a $P_3(x)$ együtthatóinak és a b_0-nak a meghatározása így történhet:

$P_4(x)$ együtthatói :	2	−1	−10	14	−12
Az osztó : $x-3$, $p=3$		6	15	15	87
$P_3(x)$ együtthatói és b_0:	2	5	5	29	75

Tehát: $2x^4-x^3-10x^2+14x-12=(x-3)(2x^3+5x^2+5x+29)+75$. Ha (x —2)-vel osztottunk volna, akkor az eredmény

$P_4(x) = (x-2)(2x^3 + 3x^2 — 4x + 6)$

lenne, amiből látszik, hogy a $P_4(x) = 0$ egyenlet egyik gyöke 2.

A kínaiak a lényeg szerint - jelölés szerint nem - a bemutatott módszert arra használták, hogy az x valamely polinomját átrendezzék $(x+p)$ szerint. Ha tehát az átrendezendő polinom:

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$

akkor az átrendezett polinom:

$$P_n(x)=$$
$$=b_n(x+p)^n+b_{n-1}(x+p)^{n-1}+\dots+b_2(x+p)^2+b_1(x+p)+b_0=$$
$$=(x+p)[b_n(x+p)^{n-1}+b_{n-1}(x+p)^{n-2}+\dots+b_2(x+p)+b_1]+b_0=$$
$$=(x+p)P_{n-1}(x)+b_0.$$

Amint láttuk, a b_i együtthatók meghatározhatók, hiszen b_0 a $P_n(x) : (x+p)$ osztás maradéka. Ugyanígy b_1 a $P_{n-1}(x) : (x+p)$ maradéka, és hasonlóan folytatva b_2 a $P_{n-2}(x) : (x+p)$ osztás maradéka stb. Itt a

$P_{n-2}(x) = b_n(x+p)^{n-2} + b_{n-1}(x+p)^{n-3} + \dots + b_3(x+p) + b_2$

úgy jött létre, hogy a $P_{n-1}(x)$ első n-1 tagjából kiemeltük az $(x+p)$ tényezőt:

$$P_{n-1}(x)=$$
$$=(x+p)[b_n(x+p)^{n-2}+b_{n-1}(x+p)^{n-3}+\ldots+b_3(x+p)+b_2]+b_1.$$

Röviden: $P_{n-1}(x)=(x+p)P_{n-2}(x)+b_1$.

A módszer alkalmazására figyeljük meg, hogyan rendezhető át a

$P_4(x)=2x^4-x^3-10x^2+14x—12$

polinom az $(x+2)$ fogyó hatványai szerint.

$p=-2$	2	-1	-10	14	-12
		-4	10	0	-28
	2	-5	0	14	$-40=b_0$
		-4	18	-36	
	2	-9	18	$-22=b_1$	
		-4	26		
	2	-13	$44=b_2$		
		-4			
	2	$-17=b_3$			
	$2=b_4$				

Az átrendezett polinom tehát:

$P_4(x)=2(x+2)^4-17(x+2)^3+44(x+2)^2-22(x+2)-40.$

Ezek után nézzük meg, hogy egy harmadfokú egyenletnél hogyan használták fel a módszert a kínaiak az egyenlet egyik gyökének a megközelítésére. Megkeresendő például a

$2x^3—3x^2+5x—22=0$

egyenlet egyik gyöke!

Először próbálgatással megállapították, hogy az egyenlet egyik gyöke a 2 és a 3 között van, hiszen az egyenlet polinomjának az (x —2)-vel való osztási maradéka -8, az (x-3)-mal való osztás maradéka pedig + 20. Így az egyenlet egyik gyöke

$x=2+y$, ahol $0<y<1$.

Helyettesítsük most az egyenletbe x helyébe az $(2+y)$-t, és rendezzük y, azaz (x— 2) szerint:

$p=2$	2	−3	5	−22
		4	2	14
	2	1	7	$-8=b_0$
		4	10	
	2	5	$17=b_1$	
		4		
	2	$9=b_2$		
	$2=b_3$			

Így az y ismeretlenű egyenlet:

$2y^3+9y^2+17y-8=0$.

Most ismét próbálgatással megállapítható, hogy $0,3 < y < 0,4$, mert az $(y—0,3)$-del való osztási maradék —2,036, és az $(y—0,4)$-del való osztás maradéka + 0,368. Így tehát

$y=0,3+z$, ahol $0 < z < 0,1$.

Írjunk most az egyenletbe y helyébe $(0,3+z)$-t, és rendezzünk z, azaz (y—0,3) szerint!

0,3	2	9	17	−8
		0,6	2,88	5,964
	2	9,6	19,88	$-2{,}036 = c_0$
		0,6	3,06	
	2	10,2	$22{,}94 = c_1$	
		0,6		
	2	$10{,}8 = c_2$		
	$2 = c_3$			

Az új egyenlet tehát:

$2z^3 + 10{,}8z^2 + 22{,}94z - 2{,}036 = 0.$

Újabb próbálgatással kiderül, hogy z értéke a 0,08 és 0,09 között van, mert a z = 0,08 esetén a helyettesítési érték —0,130 656, z = 0,09 esetében pedig +0,117 538.

Ha megelégszünk század pontossággal, akkor az eredeti egyenlet

egyik gyöke:

$x = 2 + y = 2 + 0{,}3 + z \approx 2{,}38.$

Az eljárás folytatásával a gyök tetszőleges pontossággal kiszámítható.

Határozzuk meg példaképpen √620 értékét két tizedes pontossággal, azaz oldjuk meg az

$x^2 - 620 = 0$

egyenletet. Az x értéke 24 és 25 között van, tehát

$x = 24 + y$, ahol $0 < y < 1$.

Az egyenletnek y-ra, azaz (x— 24)-re rendezése:

$$
\begin{array}{r|lll}
24 & 1 & 0 & -620 \\
 & & 24 & 576 \\
\hline
 & 1 & 24 & -44 = b_0 \\
 & & 24 & \\
\hline
 & 1 & 48 = b_1 & \\
 & 1 = b_2 & &
\end{array}
$$

Az y meghatározására szolgáló egyenlet tehát:

$y^2 + 48y - 44 = 0$, ahol $0 < y < 1$.

A bal oldal helyettesítési értékei az $y = 0{,}8$-nél és az $y = 0{,}9$-nél: —4,96, illetve $+0{,}01$, tehát $0{,}8 < y < 0{,}9$, vagyis

$y = 0{,}8 + z$, ahol $0 < z < 0{,}1$, és ahonnan $z = y - 0{,}8$.

A z-t meghatározó egyenlet c_i együtthatóinak kiszámítása:

$$
\begin{array}{r|lll}
0{,}8 & 1 & 48 & -44 \\
 & & 0{,}8 & 39{,}04 \\
\hline
 & 1 & 48{,}8 & -4{,}96 = c_0 \\
 & & 0{,}8 & \\
\hline
 & 1 & 49{,}6 = c_1 & \\
 & 1 = c_2 & &
\end{array}
$$

Az ismeretlenű egyenlet tehát:

$z^2 + 49{,}6z - 4{,}96 = 0$, ahol $0 < z < 0{,}1$.

Az újabb próbálgatás azt mutatja, hogy ha $z = 0{,}09$, akkor a bal oldal helyettesítési értéke —0,4879, vagyis negatív. A z keresett értéke tehát a 0,09 és 1 között van, azaz

$z=0{,}09+t$, ahol $0<t<0{,}01$, és ahonnan $t=z-0{,}09$.

A t szerint rendezett egyenlet együtthatóinak kiszámítása:

$$\begin{array}{r|lll}
 & 1 & 49{,}6 & -4{,}96 \\
0{,}09 & & 0{,}09 & 4{,}4721 \\
\hline
 & 1 & 49{,}69 & \underline{-0{,}4879=d_0} \\
 & & 0{,}09 & \\
\hline
 & 1 & \underline{49{,}78=d_1} & \\
 & \underline{1=d_2} & &
\end{array}$$

A t-re vonatkozó egyenlet tehát:

$t^2+49{,}78t-0{,}4879=0$, ahol $0<t<0{,}01$.

Az újabb próbálgatás eredménye az, hogy $0{,}009<t<0{,}01$. Ha az eljárás folyamán ezen a ponton megállunk, akkor nyerjük, hogy

$x=24+y=24+0{,}8+z=24{,}8+0{,}09+t \approx 24{,}899 \approx 24{,}90$.
Próbaképpen: $24{,}9^2= 620{,}01$.

A kínai-Horner-módszer elegendő számú ismétlésével tehát a gyökvonás tetszőleges pontossággal elvégezhető, csupán a négy alapművelet felhasználásával, tehát a kínai számolótábla, illetve az abakusz segítségével is.

A IV. fejezet fentebb jellemzett gyökvonási feladataiban mindig teljes hatványból kell gyököt vonni, tehát a művelet pontos eredményhez vezetett. SZUN-CE (III. század) és később a VI. században CSANG CSIU-CSIEN közelítő formulákat is alkalmazott. SZUN-CE szerint:

$$a+\frac{b}{2a}>\sqrt{a^2+b}>a+\frac{b}{2a+1}\,.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek az első fele azt mutatja, hogy a

babiloni matematikai ismeretek nem voltak idegenek a kínaiak előtt, hiszen ez az egyenlőtlenség először Mezopotámiában bukkant fel. (lásd a 23. oldalon.)

CSANG CSIU-CSIEN pedig a köbgyökvonásra adta a

$$\sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \frac{b}{3a^2+1}$$

közelítő formulát.

Érdemes még néhány szót vesztegetni a IV. fejezetben előforduló π-értékekre is. Egyazon fejezeten belül kétféle π-érték használata nem annyira a pontosságra törekvésről, hanem inkább a kényelmességről árulkodik. Lehet azonban az is, hogy itt a fő cél a gyökvonás begyakorlása volt, és a műveletet a π jobb megközelítése valamennyire bonyolítaná, tehát talán didaktikai szempont magyarázhatná a π megválasztásában mutatkozó következetlenséget. Lehet, hogy így van, hiszen Kínában az ősi $\pi = 3$ értéket sokszor használták még akkor is, amikor pontosabb közelítés is rendelkezésükre állt.

Forgalomban volt az említetteken kívül még több π-érték is. Liu Ci (i. e. 50-i. sz. 23) csillagász 3,15-dal számolt. CSANG HENG (76-139) csillagász a π helyett $\sqrt{10}$-et vagy $92/29 \approx 3{,}1724$-et vett. Vang FAN a π-t $142/45 \approx 3{,}1556$-nek számította. A Han-dinasztia (i. e. 206-i. sz. 220) nevezetes reformátor politikusa, VANG MANG elrendelte, hogy a mértékegységeket egységesíteni kell az egész birodalomban. Az egységesítést Liu Ci hajtotta végre. Elkészíttette a mértékegységek rézetalonját, és definíciójukat törvénybe iktatták.

[a 322. oldal hiányzik.]

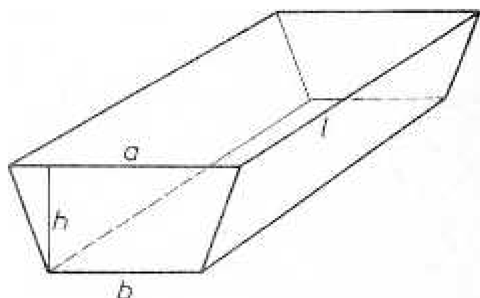
.... a térfogatszámítás, a szükséges anyag és munkaerő meghatározása, a szállítóeszközökkel és általában a szállítással összefüggő számítási kérdések. Ezek közül mutatunk be néhányat.

A fejezet 6. feladata : Egy parasztárok. (Szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasáb, *219. ábra.)* A felső szélessége 1 csan 6 csi 3 cun, az

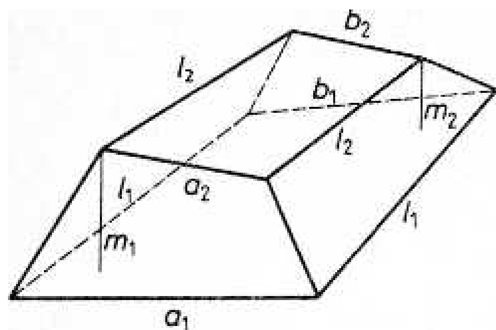
alsó szélessége 1 csan, mélysége 6 csi 3 cun, hossza 13 csan 2 csi 1 cun. Kérdés, mekkora a térfogat? (l csan = 10 csi = 100 cun, 6 csi = 1 pu.) A megfelelő utasítást a

$$V=\frac{a+b}{2}hl$$

képlettel írhatjuk le.



219. ábra



220. ábra

221. ábra

222. ábra

Az V/21. feladatban érdekes közelítő eljárással találkozunk. A számolási utasítás mindig számtani közepekkel igyekszik gondolkozni. A feladat egy eltorzított hasáb alakú földtömegnek

(220. ábra) az elszállításáról szól, ahol ismertek a torz hasáb rajzon látható adatai. Adott még a szállítási távolság, a szállítókosár térfogata, egy ember napi teljesítménye, és arra kell válaszolni, hogy mekkora a föld térfogata, valamint hány ember szükséges a munka elvégzéséhez. A feladatkészítő a torz hasáb térfogatát a következő képletnek megfelelő közelítő utasítással számolja:

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{b_1+b_2}{2}\right)\frac{m_1+m_2}{2}\cdot\frac{l_1+l_2}{2}\,.$$

Ha ezt a receptet téglatestre alkalmazzuk, azaz az adatokat úgy választjuk, hogy $a_1=a_2=b_1=b_2=a$, $l_1=l_2=l$ és $m_1—m_2=m$ legyen, akkor a képlet átmegy a $V=aml$ alakba.

Az V/18. feladat annak a háztető alakú *ABHJKE* testnek a térfogatát kérdezi, amelyet a *221. ábra* szemléltet, az ismert a, m, l_1 és l_2 oldalakkal. A számolási képlet elárulja, hogy a megoldó a *DCGFKE* hasáb térfogatához hozzáadta az *FGHJK* gúla térfogatának a kétszeresét:

$$V=\frac{am}{2}l_2+2a\,\frac{l_1-l_2}{2}\cdot\frac{m}{3}=\frac{(2l_1+l_2)am}{6}\,.$$

Ennek a tárgykörnek a befejezéséül említünk még egy példát, amely tanúsítja, hogy az ókínai matematika tisztában volt a csonka gúla és a csonka kúp térfogatának a kiszámításával. Ebből a korból származik a *222. ábrán* felvázolt lyukas test térfogatának kiszámítási utasítása, amely képletszerűen:

$$V=\frac{(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2}{4}\,m,$$

ahol

$$a_1=\frac{D_1+d_1}{2}, \quad a_2=\frac{D_2+d_2}{2}, \quad b_1=h_1 \quad \text{és} \quad b_2=h_2.$$

Könnyű kimutatni, hogy a $\pi=3$ esetre érvényes

$$V=\frac{m}{4}[D_1^2+D_1D_2+D_2^2-(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)]$$

képlet teljesen azonos az ókínai számítási eljárással.

A könyv VI. fejezetének címe: *Az arányos osztás.* Tárgykörét tekintve, hasonló kérdésekkel foglalkozik, mint a III. fejezet, de az itteniek bonyolultabb, sokszor hosszadalmasabb számolást igényelnek. Különösen érdekesek és az eddigiekhez képest újszerűek a sorozatok ismeretét kívánó feladatok. Ilyen ennek a résznek a 17. feladata. Ez így hangzik:

5 csi hosszú aranyrúdnak levágtak az aljából 1 csit. Ennek a súlya 5 csin. Aztán levágtak a tetejéből 1 csi hosszúságú darabot, amely 2 csin súlyú volt. Mekkora a súlya minden egyes csinek? A megoldási utasítás számunkra különös. Így szól:

1. Keresd meg a „különbségkoefficienst”!

$k=a_n—a_1.$

2. Határozd meg a „fokot”!

$n_1 = (n—1)a_1$ és $n_i=(n—1)a_1 + (i—1)k.$

3. Számítsd ki rendre az egyes elemeket!

$$a_i=\frac{(n-1)a_1+(i-1)k}{(n-1)a_1}\cdot a_1.$$

Hogyan jutottak ehhez a megoldási eljáráshoz? Az utasításokat persze képletek nélkül kell elképzelnünk. A megoldásra -

véleményem szerint - sok konkrét példa elemzése vezette rá a módszer feltalálóját, mégpedig az arányosság gondolatától indíttatva. Az alapötlet a következő: Ha sikerül olyan n_i/n_1 hányadosokat találni, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{n_i}{n_1}=\frac{a_i}{a_1},$$

ahol a_i a számtani sorozat i-edik és a_1 a sorozat első eleme, akkor

$$a_i=\frac{n_i}{n_1}\cdot a_1.$$

Tegyük fel, hogy egy számtani sorozatnak ismerjük az első és az n-edik elemét, tehát a_1-et és a_n-et, továbbá az elemek számát, n-et, akkor képezhető az $a_n—a_1=k$ különbség. Az $n_i : n_1$ hányadosokban szerepeltessük az adatokat, tehát n-et és *k-t.* Hajtsuk ezt végre egy konkrét sorozat esetében. Legyen például ez a sorozat:

2,5,8,11,14, ahol $a_1 = 2$, $a_5 = 14$,

tehát $k=a_5— a_1 = 14—2= 12$.

Osszuk végig a sorozat elemeit $a_1=2$-vel:

$$\frac{2}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{11}{2}, \frac{14}{2}.$$

Az n_i: n_1 arány e törtek valamelyik bővített alakja lehet. Bővítsünk minden elemet b—1 = (5— l)-gyel:

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2}, \frac{(5-1)5}{(5-1)2}, \frac{(5-1)8}{(5-1)2}, \frac{(5-1)11}{(5-1)2}, \frac{(5-1)14}{(5-1)2}.$$

Alakítsuk át a számlálókat úgy, hogy azokban fellépjen az $a_1=2$, a $k=12$ és az illető elem sorszáma:

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+12}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+24}{(5-1)2},$$
$$\frac{(5-1)2+36}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+48}{(5-1)2},$$

illetve

$$\frac{(5-1)2}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+(2-1)12}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+(3-1)12}{(5-1)2},$$
$$\frac{(5-1)2+(4-1)12}{(5-1)2}, \frac{(5-1)2+(5-1)12}{(5-1)2}.$$

Általában az i-edik elem:

$$\frac{n_i}{n_1}=\frac{(n-1)a_1+(i-1)k}{(n-1)a_1}.$$

Ha igaz például, hogy

$n_3 : n_1 = a_3 : a_1$

akkor

$$a_3=\frac{n_3}{n_1}\cdot a_1=\frac{8+24}{8}\cdot 2=8.$$

A 10. elem:

$$a_{10}=\frac{n_{10}}{n_1}a_1=\frac{4\cdot 2+9\cdot 12}{4\cdot 2}=\frac{116}{8}\cdot 2=29.$$

Valóban:

$a_{10} = a_1 + (n-1)d = 2 + 9*3 = 29.$

Sok ilyen számtani sorozat hasonló vizsgálata után születhetett meg a megoldási utasítás.

Az idézett feladat ugyan nem mondja, hogy a benne szereplő rúd egymás utáni, 1 csi hosszú darabjainak a súlya számtani sorozatot alkot, de a megoldás ezt igazolja. Ez esetben tehát:

1. A „különbségi koefficiens”: $k = a_n — a_1 = 2 — 4 = — 2.$

2. A „fok”: $n_1 = (n — 1)a_1 = 4*4 = 16$

és $n_i = (n — 1)\, a_1 + (i — 1)k = 16 + (i — 1)(— 2).$

3. Az elemek:

$$a_2 = \frac{16+(-2)}{16} \cdot 4 = 3\frac{1}{2},$$
$$a_3 = \frac{16+2(-2)}{16} \cdot 4 = 3,$$
$$a_4 = \frac{16+3(-2)}{16} \cdot 4 = 2\frac{1}{2},$$
$$a_5 = \frac{16+4(-2)}{16} \cdot 4 = 2.$$

A rúd 1 csi hosszúságú darabjainak a súlya tehát csökkenő sorrendben: 4, 3 1/2, 3, 2 1/2 és 2 csin. A kínai feladatmegoldó nem látta meg a sorozat differenciájának számolást egyszerűsítő szerepét, és így az $a_n = a_1 + (n — 1)d$ összefüggés helyett a bonyolultabb arányos osztásra alapozott módszert alkalmazta.

Ugyancsak érdekesen gondolkozott e fejezet 18. feladatának a megválaszolásánál is. A feladat szerint 5 pénzt kell elosztani 5

ember között úgy, hogy a részek egy számtani sorozat szomszédos elemei legyenek, és az első két ember összesen ugyanannyit kapjon, mint a többi három összesen.

Mi valahogy így gondolkoznánk:

A részek: a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$, $a_1 + 4d$.

Ezek összege: $5a_1 + 10d = 5$.

A második követelmény szerint: $2a_1 + d = 3a_1 + 9d$.

Az a_1-re és d-re nyert

$a_1 + 2d = 1$

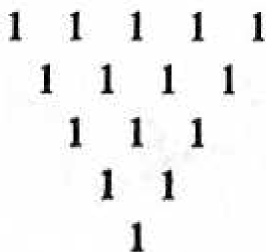
$a_1 + 8d = 0$

egyenletrendszerből:

$a_1 = 4/3$ és $d = -1/6$.

A részek tehát: 4/3, 7/6, 1, 5/6, 2/3.

A kínai szabály ez esetben így hangzik: Rakjunk ki (a számolótáblára) $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ pénzt „piramidálisan”, tehát így:



Adjuk össze az első két sor pálcikáit. Ez 9. Összegezzük az utolsó 3 sort. Az összeg 6. Ezek nem egyenlők, tehát a feladat második feltételét nem teljesítik. A két összeg különbsége 3. Ha a kirakott 5, 4, 3, 2 és 1 részek mindegyikéhez ezt a 3-at hozzáadjuk, akkor az első két rész összesen 6-tal, a többi három pedig összesen 9-cel

növekszik, és így a második kikötés is teljesül. A részek ekkor:

8, 7, 6, 5, 4.

Valóban: $8+7=6 + 5+4$.

A részek összege azonban most nem 5, hanem 30, tehát minden részt osztani kell annyival, ahányszor a 30 nagyobb az 5-nél, azaz 6-tal. Így az eredmény: 4/3, 7/6, 1, 5/6, 2/3.

A következő, 19. feladat megoldása lényegileg megegyezik a ma szokásossal. A feladat így szól:

Egy bambuszrúdon 9, bütyökkel elválasztott íz van. Az alsó 3 íz térfogata 4 sen, a legfelső 4 íz térfogata pedig összesen 3 sen. Kérdés: Mekkora a térfogatösszege a középső két íznek, ha minden íz térfogata az előzőtől ugyanannyival különbözik?

Az alsó három íz térfogatösszege:

$3a_1+3d=4$.

A legfelső négy íz térfogatösszege:

$4a_1 + 26d=3$.

Ezekből:

$a_1=95/66$ és $d= -7/66$, és így $a_4+a_5=141/66$ sen.

Ugyancsak a VI. fejezetben fordulnak elő ún. mozgási feladatok is. Ezek közül a 13. így szól:

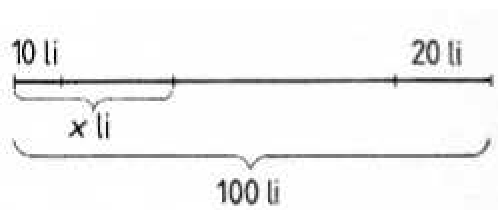
Egy lassan haladó kezdetben megtett 10 li utat. Ekkor indult egy gyorsabb, és 100 li megtétele után 20 livel elhagyta. Kérdés: Mennyi utat tett meg a gyorsabb, mielőtt a lassabban haladót utolérte?

Felelet: 33 és 1/3 lit.

A megoldási szabály: „Azt a 10 li utat, amelyet a lassan haladó megtett, add a 20 li úthoz, amellyel elhagyta a gyorsabb. Ez az

osztó. A lassúbb 10 li útját szorozd meg a gyorsabb 100 li útjával. Ez az osztandó. Oszd el az osztandót az osztóval, és megkapod liben.” E szerint tehát:

$$x=\frac{10\cdot 100}{10+20}=33\frac{1}{3}.$$



223. ábra

A szabály elárulja, hogy a kínaiak ügyesen bántak az aránypárokkal. Valószínű ugyanis, hogy az eredeti gondolatmenet a *223. ábra* alapján született meg. Feltéve, hogy mindkét gyalogló állandó sebességű, egyenlő idők alatt a megtett utak aránya állandó. Ha tehát a gyorsabb x li utat tett meg a találkozásig, akkor közben a lassúbb (x-10) li utat tett meg. E két út aránya: x : (x-10). Továbbá: Miközben a gyorsabb megtette a 100 li távolságot, aközben a lassúbb csak (100—10—20) lit hagyott maga mögött. E két út aránya: 100 : (100-30).

A két arány egyenlő, tehát:

x : (x—10) = 100 : (100 — 30).

Valamely aránypárban azonban az első tag úgy aránylik az első és a második tag különbségéhez, mint a harmadik tag a harmadik és a negyedik tag különbségéhez. Így:

x : 10 = 100 : 30.

Innen:

$$x = \frac{10 \cdot 100}{10 + 20},$$

ami megfelel a kínai „szabálynak”.

Amint látjuk, a VI. fejezet az arányos osztást nemcsak kimondottan „gyakorlati” feladatok megoldásában alkalmazza, hogy ti. hogyan kell a közös jövedelmet „igazságosan” elosztani, tekintetbe véve a rangot, a hivatali állást és a végzett munka egyéb körülményeit. Így mintegy átmenetet képez a VII. fejezetnek, az előbbiekhez hasonlítva, lényegesen elméletibb feladatai felé, ahol a felvetett kérdések megválaszolásához lineáris egyenletek, egyenletrendszerek megoldása szükséges. Sokszor kerül alkalmazásra a már megismert „regula faisi” egészen mechanikus változata (lásd 59. oldal). Mielőtt erre néhány példát hoznánk fel, előbb kísérjük figyelemmel a kínai recept megokolását. Oldjuk meg ezért az

$$ax + b = c$$

egyenletet! Válasszunk x számára két tetszőleges (hamis) értéket. Legyenek ezek x_1 és x_2. Számítsuk ki e két értékkel az $ax + b$ helyettesítési értékét:

$$ax_1 + b = c_1$$

és

$$ax_2 + b = c_2.$$

Az eredeti és a most kapott első egyenlet különbsége:

$$a(x - x_1) = c - c_1 = k_1. \quad (1)$$

Az eredeti és a második egyenlet különbsége:

$$a(x - x_2) = c - c_2 = k_2. \quad (2)$$

A két utóbbi egyenlet hányadosa:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{k_1}{k_2},$$

ahonnan:

$$x=\frac{x_1k_2-x_2k_1}{k_2-k_1}.$$

Ugyanezt a „képletet” használja a Szuan csing VII. fejezete a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldására is. Tekintsük ugyanis az

$a_1x+b_1y=c_1$

$a_2x+b_2y=c_2$

egyenletrendszert. Az elsőből

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}.$$

Ezt a második egyenletbe írva:

$$a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2, \qquad (3)$$

és így:

$(a_2b_1 - a_1b_2)x+ b_2c_1=b_1c_2.$

Rövidebben:

$Ax+ B=C,$

ahol

$A=a_2b_1 — a_1b_2$ és $B=b_2c_1$ és $C=b_1c_2$.

Legyen most $x=x_1$, akkor $Ax_1 + B=b_1c'_2=C_1$, továbbá, ha $x=x_2$, akkor $Ax_2+B=b_1c''_2=C_2$.

Ha most

$C—C_1=b_1(c_2—c'_2)=b_1k_1$

és

$C\text{-}C_2=b_1(c_2\text{-}c''_2)=b_1k_2$,

akkor

$$x=\frac{b_1k_2x_1-b_1k_1x_2}{b_1k_2-b_1k_1},$$

azaz

A képlet tehát *x* számára ugyanaz, mint előbb, de a k_1 és a k_2 kiszámítása a (3) egyenlet alapján történjék. A már meghatározott *x* értéket az egyenletrendszer valamelyik egyenletébe behelyettesítve, ismét egyismeretlenes elsőfokú egyenlet áll rendelkezésünkre az *y* kiszámítására.

A könyv VII. fejezete 20 feladatot tartalmaz. Ebből az első 8 mind

$a_1x\text{-}y=c_1$

$a_2x\text{-}y=c_2$

alakú egyenletrendszerre vezet, ahol tehát $b_1 = b_2= —1$. Ezeknél a fejezet írója azt tanácsolja, hogy először írjuk fel az

a_1 a_2

c_1 c_2

táblázatot, és azután mechanikus „keresztbe szorzásokkal” végezzük el az alábbi képleteknek megfelelő műveleteket:

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_2-a_1} \quad \text{és} \quad x=\frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}.$$

Ezekről a feladatokról nyerte ez a fejezet a *Felesleg - hiány (Jing bu cu)* címet. A címadó feladatok közül egy:

Valamit közösen vásároltak. Ha minden ember fizet 8 pénzt, akkor a felesleg 3 pénz. Ha pedig mindenki fizet 7 pénzt, akkor a hiány 4 pénz. Kérdés: Hányán vásároltak közösen, és mennyi volt az áru ára? Felelet: 7 ember, az áru értéke pedig 53 pénz.

A VII. fejezet második részéből 2 feladatot ismertetünk, a 16-at és a 18-at. Az első:

Van egy jáspiskocka, az éle 1 cun, súlya 7 liang, egy kőkocka minden éle 1 cun, súlya 6 liang. Van még egy kőkocka 3 cun élekkel, és abban egy jáspisdarab, súlyuk együtt 11 csin.
Kérdés: Mennyi a kő és mennyi a jáspis súlya? (1 csin = 16 liang.)

Ha a kőkockában levő jáspis térfogata x cun^3 és a kocka többi, kőrészének a térfogata *y* cun^3, akkor:

$x+y=27$

és

$7x+6y=176$.

A megoldási szabály a (4) képleten alapul. Legyen $x_1 = 27$, akkor az első egyenletből $y_1=0$. Ha pedig $x_2=0$, akkor szintén az első egyenletből $y_2=27$. Beírva az egymáshoz tartozó értékpárokat a második egyenlet bal oldalába:

$c'_2= 7*27=189$ és $k_1 = 176—189 = —13$,

illetve

$c''_2=6*27=162$ és $k_2=176-162=14$.

A (4) képlet szerint:

$$x=\frac{14\cdot 27}{14+13}=14 \text{ liang}, \quad \text{és} \quad y=13 \text{ liang}.$$

A 18. feladat: 9 rúd arany súlya annyi, mint 11 rúd ezüsté. Ha 1 aranyrúd helyett 1 ezüstrudat és 1 ezüstrúd helyett 1 aranyrudat teszünk, akkor a második csoport 13 lianggal nehezebb lesz, mint az első. Kérdés: Mennyi egy-egy rúd súlya?

A megoldáshoz vezető egyenletrendszer:

$9x=11y$

$7x—9y= —13$,

amelyben x jelenti 1 aranyrúd súlyát, y pedig 1 ezüstrúdét. A kínai eljárás szerint:

Legyen $x_1=3$, akkor az első egyenletből $y_1 = 27/11$.

Legyen $x_2=2$, akkor az első egyenletből $y_2=18/11$.

Az x_1-et és y_1-et a második egyenletbe írva:

$c'_2 = -12/11$ és $k_1 = c_2 - c'_2 = -13+12/11= —131/11$.

Az x_2-t és y_2-t a második egyenletbe írva:

$c''_2 = -8/11$ és $k_2= c_2 - c''_2 = -13+ 8/11 = - 135/11$.

Tehát $x=(k_2x_1-k_1x_2)/k_2-k_1 = (-135*3+131*2)/(-135+131) = 143/4$ liang és $y=117/4$ liang. Az eredeti megoldásban - nem tudni, miért - a szerző liang helyett csinekben számolt, és így az eredmények: 1 aranyrúd súlya 2 15/64 csin és 1 ezüstrúd súlya 1 53/64 csin (1 csin= 16 liang).

A Szuan csing legnagyszerűbb része a VIII. fejezet. Ez bizonyára a legkésőbbiek közül való. Itt olvasható a lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló „fang-cseng” szabály. Ez a fejezet címe is. A „fang” szó négyzetet is jelent, jelen esetben az egyenletrendszer együtthatóiból alkotott mátrixot. A fang-cseng szabály tehát egy bizonyos mátrixos megoldási módszer. Európában csak a XVII.

században, LEIBNIZnél jelentkezett először a determináns, illetve a mátrix fogalma. A mátrixműveleteknél elkerülhetetlen a negatív szám ismerete. Ez a rész valóban bevezeti az előjeles számokat és közli az összeadás és kivonás „cseng-fu” szabályát is (cseng-fu = pozitív-negatív).

A fang-cseng módszer a következő:

Legyen a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=c_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=c_2\\ &\;\;\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=c_n \end{aligned}$$

Az első lépésben a kínaiak felírták az egyenletrendszer együtthatóinak a mátrixát úgy, hogy az utolsó egyenlet együtthatói a mátrix első oszlopát alkossák, és így tovább.

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n-1,1} & \ldots & n_{21} & a_{11}\\ a_{n2} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{22} & a_{12}\\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{nn} & a_{n-1,n} & \ldots & a_{2n} & a_{1n}\\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer gyökei nem változnak, ha az egyik egyenlet k-szorosát hozzáadjuk vagy kivonjuk egy másik egyenletből. Ezért a gyökök megváltoztatása nélkül szabad ezt tennünk a mátrix

oszlopaival is. Ennek az észrevételnek az alapján a kínaiak úgy alakították át az egyenletrendszer mátrixát, hogy az a_{11}—a_{nn} diagonális fölött csupa 0 legyen. Az átalakítást tehát úgy végezték el, hogy egy alkalmas oszlop valahányszorosát hozzáadták vagy kivonták egy másik oszlopból mindaddig, míg végül egy ilyen mátrixot kaptak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & \dots & b_{22} & b_{12} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ b_{nn} & b_{n-1,n} & \dots & b_{2n} & b_{1n} \\ e_n & e_{n-1} & \dots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$$

A következő lépésben felírható ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszer. (Ez a kínaiaknál nem volt külön művelet, hiszen a számolótáblán az egyenletrendszert éppen annak az együtthatóiból alkotott mátrixszal írták fel.) Az új egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\dots+b_{1n}x_n&=e_1 \\ b_{22}x_2+\dots+b_{2n}x_n&=e_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ b_{n-1,n-1}x_{n-1}+b_{n-1,n}x_n&=e_{n-1} \\ b_{nn}x_n&=e_n \end{aligned}$$

Ezek után az utolsó egyenlettől elindulva, lépésenként meghatározhatók az ismeretlenek. Az elmondottak alapján figyeljük meg a VIII. fejezet 1. feladatának megoldását!

3 jó minőségű kévéből, 2 közepesből és 1 silányból kaptunk összesen 39 tou gabonát. 2 jó, 3 közepes és 1 silány kéve adott összesen 34 tou gabonát. 1 jó, 2 közepes és 3 silány kévéből nyertünk összesen 26 tou gabonát. Kérdés: Hány tou gabonát ad külön-

külön 1 jó, 1 közepes és 1 silány kéve? Felelet: 1 jó kéve 9 1/4 tou, 1 közepes 4 1/4 tou és 1 silány 2 3/4 tou gabonát ad.

Ha *x, y* és z betűkkel jelöljük a jó, közepes és silány kévék hozamát, akkor a megoldást szolgáltató egyenletrendszer:

$3x+2y+z=39$

$2x+3y+z=34$

$x+2y+3z=26.$

Amint említettük, ezt a kínaiak az együtthatók mátrixával írták le, illetve rakták ki számolópálcáikkal a számolótáblára. A mátrix első oszlopába kerültek a harmadik egyenlet együtthatói, a következő oszlopba a második és a harmadik oszlopba az első egyenletbeli együtthatók. Így:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Az átalakítás első lépése: A 2. oszlop 3-szorosából vonjuk ki a 3. oszlop 2-szeresét. A második lépésben a kínai számoló az 1. oszlop 3-szorosából kivonta a 3. oszlopot. Mi a két lépést egyszerre hajtjuk végre, és így kapjuk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A végső lépésben az 1. oszlop 5-szöröséből vonjuk ki a 2. oszlop 4-szeresét. Az átalakított mátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix},$$

amelyben a 36 - 5 - 3 diagonális fölött már mindenütt 0 van.

Írjuk most fel ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszert! (A mátrix oszlopai az egyenletrendszer sorainak felelnek meg.)

$$\begin{aligned} 36z &= 99 \\ 5y + \quad z &= 24 \\ 3x + 2y + \quad z &= 39. \end{aligned}$$

Így

$$z = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}, \quad y = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} \quad \text{és} \quad x = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}.$$

Elérkeztünk a *Szuan csing* utolsó két fejezetéhez. A IX. címe: „Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között” (Kou-ku). A cím elárulja, hogy ebben a fejezetben főleg a Pitagorasz-tétel alkalmazásaival találkozunk. E fejezethez a III. századi kitűnő

kínai matematikus, Liu **Huj** írt kommentárt, sőt - mint említettük - kiegészítette a könyvet egy tizedik fejezettel is *Haj tao szuan csing (Matematikai értekezés a tengeri szigetről)* címmel. A kissé rejtélyes cím ügyes utalás mind a két fejezet tartalmára. Egyik is, másik is meg nem közelíthető távolságok meghatározására sorol fel példákat. E két geometria tárgyú fejezet azért is érdekes, mert tartalmazzák a pitagoraszi számhármasok egy képzési módját és másodfokú egyenletre vezető feladatokat. A másodfokú egyenletek megoldási receptje teljesen megfelel a mi megoldóképletünknek. Lássunk e két fejezetből is néhány jellemző feladatot.

A IX/11. és a IX/12. feladat kimondottan mezopotámiai kapcsolatokra utal. Mindkettő megoldási ötlete megegyezik a 28. oldalon mutatott babiloni feladatéval, pontosabban: a megoldó az

$x^2+y^2=a^2$

$y—x=b$

egyenletrendszerbe az új t ismeretlent vezeti be úgy, hogy

$$y=t+\frac{b}{2} \quad \text{és} \quad x=t-\frac{b}{2}$$

legyen. Ekkor a második egyenlet teljesül, az első pedig

$$\left(t-\frac{b}{2}\right)^2+\left(t+\frac{b}{a}\right)^2=a^2,$$

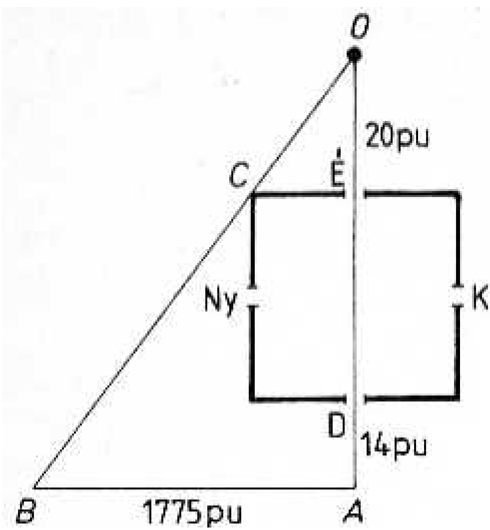
illetve

$$2t^2+2\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2,$$

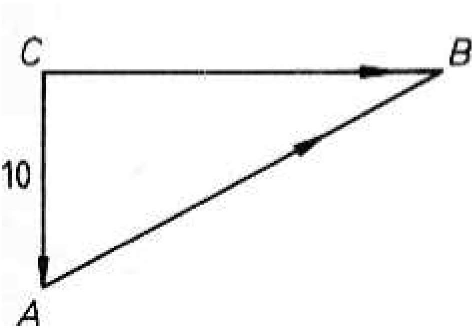
ahonnan

$$t=\sqrt{\frac{a^2-2\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}}\quad \text{és}\quad x=t-\frac{b}{2},\quad y=t+\frac{b}{2}.$$

Ez a két képlet teljesen azonos a kínai megoldási utasítással.



224. ábra



225. ábra

A IX/20. feladat: Egy várost négyzet alakban veszik körül a

városfalak *(224. ábra).* Mindegyik négyzetoldal közepén kapu nyílik. Az északi kapu előtt 20 pu távolságra áll egy oszlop. Ha eltávozunk a déli kaputól dél felé haladva 14 pu távolságra, és azután nyugatra fordulva haladunk 1775 put, akkor megpillantjuk az oszlopot. Kérdés: Milyen hosszú a városfal? Felelet: 250 pu.

A megoldó felhasználta az *ABO* és E*CO* derékszögű háromszögek hasonlóságát. Így

$$x/2 : 20 = 1775 : (x+34),$$

tehát meg kellett oldania az

$$x^2+34x=7100$$

egyenletet. A megoldás teljes négyzetre kiegészítéssel történt. A feleletül adott 250 pu azonban kevesebb a helyes 275,8 pu közelítő értéknél!

A pitagoraszi számhármasok érdekes alkalmazására találunk az egyik feladatcsoportban. Ez bizonyítja, hogy a kínaiak ismerték az olyan *a, b és c* egész számok egyik előállítási módját, amelyek kielégítik az

$$a^2+b^2=c^2$$

egyenletet. Tudták ugyanis, hogy ha *p* és *q* azonos paritású egész számok, akkor az

$$a=\frac{p^2-q^2}{2}, \quad b=pq \quad \text{és} \quad c=\frac{p^2+q^2}{2}$$

pitagoraszi számhármast alkotnak (vö. a 92. oldallal). A szóban forgó feladatcsoportban mozgási feladatok szerepelnek, és ezekben *p* és *q* mindig sebességet jelent. Így a 14. feladatban is:

Két ember elindul ugyanazon pontból (a *225. ábra C* pontja). Az *A-val* jelölt ember sebessége (a járás normája) 7 és *B* sebessége 3 egység. *B* elindul keletre. Ugyanakkor indul *A,* és déli irányban megtesz 10 pu utat, aztán nagyjából északkelet felé fordul,

és addig megy, míg B-vel találkozik. Kérdés: Mekkora utat tett meg *A* és *B* külön-külön ?

A kínai megoldás szerint először keressünk a sebességek segítségével egy, a kiszámítandóhoz hasonló derékszögű háromszöget. Ennek oldalai:

$$x=\frac{p^2-q^2}{2}=\frac{7^2-3^2}{2}=20, \quad y=pq=7\cdot 3=21$$

és

$$z=\frac{p^2+q^2}{2}=\frac{7^2+3^2}{2}=29.$$

A keresendő háromszög hasonló lévén a 20, 21 és 29 oldalú háromszöghöz:

10 : *BC* : *AB* = *20* : 21 : 29.

Innen:

$$BC=\frac{10\cdot 21}{20}=10{,}5 \text{ pu}, \quad AB=\frac{10\cdot 29}{20}=14{,}5 \text{ pu}.$$

Eszerint *A* megtett útja 24,5 pu, és azalatt *B* kelet felé megtette a 10,5 pu távolságot.

A *Szuan csing* áttekintéséből kitűnik, hogy tartalmazza mindazokat a matematikai ismereteket és számolási eljárásokat, amelyek a kínai gyakorlati élethez szükségesek voltak. Ezért lett ez a mű, illetve sok része a hivatalnokok tankönyve. A Tang-dinasztia alatt, tehát a VII-VIII. században, de azután is sok száz esztendőn át a hivatalok elnyeréséhez szükséges vizsga egyik fontos része a *Szuan csing* volt.

A VIII-XI. század Kínában nagy kulturális és technikai fellendülést

hozott. Ez volt a puskapor, a nyomtatás, a papír és az iránytű felfedezésének a korszaka. Közben azonban a matematika lényegesen nem fejlődött tovább. Inkább csak a régi számítástechnikai eljárások csiszolódtak. Születtek ugyan újak is, de a feladatok tárgyköre alig-alig bővült. Maradt minden a *Tíz Klasszikus* keretei között, pedig Kína hatalmas területén ezekben a századokban több matematikus is élt, de egymástól elszigetelten dolgoztak, egymásról nem tudva. Egyik körül sem alakult ki olyan matematikai iskola, amely a továbbfejlődés alapja lehetett volna. Ezek az elszórtan, egymástól függetlenül működő matematikusok mégis említésre méltók.

VANG HSZIAO-TUNG (VII. század)

Kínai csillagász és matematikus. Életének pontos dátumai nem ismeretesek. Neve szerepel a Tang-dinasztia (618-907) történetében. Egyike volt azoknak, akik más csillagászokkal együtt kijavították a korabeli kínai naptár hibáit. Ebben a munkakörben igen sikeres állami hivatalnoknak bizonyult. A matematikatörténetben megőrizte nevét a *Matematikai értekezés a régi módszerek fejlesztéséről (Csi ku szuan csing)* című műve. Ez a kora szokásának megfelelően feladatsorokat tartalmazó könyv az egyetlen kínai munka, amely harmadfokú egyenletek megoldásával is foglalkozik. A művéből megmaradt mintegy 20 feladat közül, ilyen szempontból, főleg a 15-20. feladat jelentős. Ezek geometriai tartalmúak, főleg a Pitagorasz-tételt alkalmazzák, de harmad- vagy negyedfokú egyenlethez vezetnek. **Vang Hsziao-tung** az első ismert olyan matematikus, aki az ilyen egyenleteket a „fang-fa", azaz az osztással végzett gyökvonás módszerével oldotta meg. Ez a módszer egyenértékű azzal, amelyet ma Wilhelm GEORG HORNER nevéhez szokás kapcsolni. Amint ezt BEREZKINA szovjet matematikatörténész kiemeli, az említett 6 feladat egymásra épülő párokra bomlik, igen ügyes szerkesztéssel. A kínai-Horner-módszert VANG HSZIAO-TUNG alkalmazta először, de magyarázatát nem adta. Műve alapján úgy tűnhet, hogy a kínai matematikusok már előtte is használták az eljárást. A módszer magyarázatát először Csin Csiu-SAÓnál találjuk meg (316. oldal).

CSIN CSIU-SAO (1202?-1261?)

A kínai matematika egyik nagy alakja. Mint kormányzó és miniszter

lelkiismeretlenül hatalmas vagyont harácsolt össze az alatt a 100 nap alatt, amíg hivatalát viselte. Megmaradt nagy, kéziratos műve, *A matematika 9 fejezete (Su su csiu csang).* Szerepelnek benne számelméleti részek, magasabb fokú egyenletek, sorozatok és geometriai feladatok. CSIN CSIU-SAO oldott meg olyan feladatokat is, amelyeket ma kongruencia-rendszerrel szokás felírni. Tőle való az a feladat, amely az

$x = 1 \pmod{12}$

$x = 14 \pmod{17}$

$x = 1 \pmod{19}$

kongruencia-rendszerrel fogalmazható meg. x tehát olyan szám, amely a 12-vel és 19-cel osztva maradékul 1-et ad, és a 17-tel való osztási maradéka 14. Ha e követelményeket egyenlet alakban írjuk fel, akkor az

$x = 12a + 1$

$x = 17b + 14$

$x = 19c + 1$

határozatlan egyenletrendszerhez jutunk, amelyben *a, b* és c pozitív egész számok. Bizonyára ennek a megoldása árán jutott a szerző a megoldási recepthez. Egy lehetséges eljárás:

Az első és a harmadik egyenlet szerint: $12a = 19c$, tehát *a* osztható 19-cel, vagyis $a = 19k$ alakú. Így

$12*19k = 19c$,

vagyis $c = 12k$ alakú.

Az első és a második egyenletek miatt:

$17b + 14 = 12a + 1$,

azaz

$17b = 12a - 13 = 228k - 13$,

tehát

$$b = \frac{228k - 13}{17} = 13k + \frac{7k - 13}{17}.$$

b azonban pozitív egész szám, tehát $(7k-13)/17 = l$ is az. Innen $k = (17l + 13)/7 = 2l + 1 + (3l + 6)/7$. k azonban szinten egész szám, tehát $(3l + 6)/7 = m$ is az. Innen pedig $l = (7m-6)/3 = 2m - 2 + m/3$.

Ilyen módon m osztható 3-mal, tehát 3t alakú. Az elmondottak szerint

$m = 3t$, $l = 7t - 2$, $k = 17t - 3$.

Ekkor pedig:

$$a = 19k = 323t - 57,$$
$$b = \frac{228k - 13}{17} = 228t - 41$$
$$c = 12k = 204t - 36,$$

ahol $t = 1, 2, 3, \ldots$

Ha például $t = 1$, akkor $a = 266$, $b = 187$, $c = 168$ és $x = 3193$. Ehhez hasonló kongruencia-rendszereket oldott meg már a III— IV. században **Szun-ce** is.

SZUN-CE (III-IV. század)

Kínai matematikus, aki összeállított egy feladatgyűjteményt, amely sokban hasonlít a *Szuan csinghez,* de szűkebb tárgykörű.
Számos önálló feladat található benne, és az átvett feladatokat is az eredetinél jóval részletesebb és ilyen értelemben magyarázóbb jellegű megoldási szabályok kísérik. A mű néhány számelméleti

feladat mellett táblázatokat, arányossági számításokat, lineáris egyenleteket és négyzetgyökvonást tartalmaz. **Szun-ce** értekezésének egy kongruencia-rendszerre vezető feladata a következő:

Melyik az a szám, amely 3-mal, 5-tel, 7-tel osztva rendre 2-t, 3-at, 2-t ad maradékul? A válasz megfelel az

$$n \equiv 2 \pmod 3$$
$$n \equiv 3 \pmod 5$$
$$n \equiv 2 \pmod 7$$

kongruencia-rendszer megoldásának. A kongruenciák Gauss által bevezetett jelölését feloldva:

$n = 3k + 2$

$n = 5h + 3$

$n = 7m + 2$,

ahol *k, h* és *m* tetszőleges egész számok. A megoldás lépései: Szorozzuk az első egyenletet 5*7-tel, a másodikat 3*7-tel és a harmadikat 3*5-tel:

$$\left.\begin{matrix} 35n = 105k + 70 \\ 21n = 105h + 63 \\ 15n = 105m + 30 \end{matrix}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left\{\begin{matrix} 35n \equiv 70 \pmod{105} \\ 21n \equiv 63 \pmod{105} \\ 15n \equiv 30 \pmod{105}. \end{matrix}\right.$$

Vonjuk most ki a második és a harmadik egyenlet összegéből az elsőt:

$n = 105(h + m — k) + 23$ vagy $n = 23 \pmod{105}$.

n tehát olyan számokat jelent, amelyek 105-tel osztva maradékul 23-at adnak. Ilyen számok : 23, 128, 233 stb.

CSANG CSIU-CSIEN (V. *század*)

A *Szuan csing* 246 feladata közül 92 **Csang Csiu-CSIENé.** Ezek a feladatok az ősi kínai matematika és a XIII. század algebrája közti időszakot jellemzik. **SZUN-CEnél** alaposabban foglalkozott számelméleti kérdésekkel, sorozatokkal és magasabb fokú egyenletekkel. Életéről semmit sem tudunk. Feladatgyűjteményének előszavát így írta alá: „Tisztelettel **Csang Csiu-csien** Cincéből.” Ez nem sokat árul el róla, de talán annyit mégis, hogy szerény ember volt.

Háromrészes művéből néhány feladat elveszett, mert könyve elrongyoltan, hiányos állapotban maradt meg. Az első rész 22, a második 32 és a harmadik 38 feladatot tartalmaz. Ezzel a 92 feladattal több mint harmadrészben tekinthető a *Szuan csing* szerzőjének.

Számelméleti jellegűek a határozatlan egyenletei. Ezekre jellemző a napjainkban is fel-felbukkanó, következő feladat: 1 kakas 5 pénzbe, 1 tyúk 3 pénzbe, 3 csirke 1 pénzbe kerül. 100 pénzen vettünk (a felsoroltakból) 100 szárnyast. Kérdés: Külön-külön hány kakast, tyúkot és csirkét vásároltunk?

Ha az ismeretleneket a feladat sorrendjében x, y és z betűvel jelöljük, akkor a megoldás az

$$5x + 3y + (z/3) = 100$$

$$x + y + z = 100$$

határozatlan egyenletrendszer alapján nyerhető.

Innen $x = 4k$, $y = 25\text{-}7k$ és $z = 75 + 3k$, ha $k =$ 1, 2, 3. Ekkor x, y és z pozitív egész számok.

Csang Csiu-csien számtanisorozat-feladatainak a kínai irodalomban úttörő szerepük van. Nála találkozunk először a számtani sorozat összegképletével. Az elődök a számtani sorozatra vonatkozó feladatokat többségükben arányos osztással (325. oldal), tehát aritmetikai módszerrel oldották meg. **Csang** Csiu-CSIENnél bukkan fel először a közvetlen algebrai eljárás, a sorozat differenciájának

tudatos felhasználásával. A másodfokú egyenleteket úgy kerülte el, hogy S_n helyett az S_n/n-et tekintette ismeretlennek.

Feladataiban még az is értékelendő, hogy nála kaptak először hangsúlyos szerepet a közönséges törtekkel való műveletek a régebbi, mértékegységekre alapozott tizedes törtek mellett. A négyzetgyökvonásnál a

$$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a+1}$$

közelítő „képletet" használta a régebbi

$$\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2a}$$

helyett, amelyet valószínűleg babiloni mintára **Szun-ce** használt. **Csang Csiu-csien** feladatai között szerepelnek terület- és térfogatszámítási feladatok is.

CSEN LUAN (VI. század)

A Csou-dinasztia csillagászaként működött. Részt vett a Tian-féle naptár készítésében. Megismerkedett a buddhizmussal, és írt egy ilyen tárgyú értekezést is. Egyik összeállítója és kommentátora volt a *Szuan csingnek.* A *Matematika öt könyvben (U csing szuan su)* című tanulmányok egyik részének ő a szerzője. **Cian Bao-cung** kínai matematikatörténész szerint **Csen Luan** írta az *Elfelejtett matematikai írások (Su su csi i)* és az *Öt hivatal matematikai tanulmánya (U cao szuan csing)* című munkát is. Sokan azonban úgy vélik, hogy ez utóbbi szerzője ismeretlen.

LI JE (1178-1265)

Kortásra volt **Csin Csiu-SAÓnak.** Érdekes, hogy egymástól függetlenül az algebrának ugyanazon a területén dolgoztak. Li Je főleg adott feladatoknak egyenletekkel való megfogalmazásával törődött, míg **Csin Csiu-sao** az egyenletek gyökeinek

kiszámítására adott részletes szabályokat. Írásaik jól kiegészítik egymást. Li Je-nek két művét ismerjük. Az elsőt 1248-ban írta. Ennek címe *A körmérés tengeri tükre (Cö jüan haj csing).* Benne részletes geometriai bevezetést adott, és mintegy 170 feladatot szerkesztett, a körbe és a kör köré írható derékszögű háromszögekre vonatkozókat. Másik könyve algebrai tárgyú, 1259-ből való, és címe: *Új lépések a matematikában (Ji ku jen tuan).* Ezekben a művekben fordul elő az „égi elemek módszere” (tien-jüan-su) szakkifejezés, amely a magasabb fokú egyenletek megoldási eljárását jelenti, jelen esetben a kínai-Horner-módszert. Ezt az elnevezést a kortárs **Csin Csiu-sao** nem használta. A kínaiak képszerű nyelvén az „égi elem” a keresendő ismeretlen neve volt. A kínai szimbolikával kapcsolatban megemlítjük, hogy Li Je a negatív számokat úgy jelölte, hogy utolsó jegyüket egy ferde vonással áthúzta, míg **Csin Csiu-sao** és Liu **Huj** a pozitív számokat piros, a negatívokat fekete színnel írta. Li Je az egyenleteket táblázatos alakban rögzítette, amelyben az ismeretlen különböző fokú tagjainak az együtthatói szerepeltek. Például az

$x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0$

		│	
	—	│││││	
	⊥	T	
│││	⊥̸	O	

226. ábra

egyenletet a *226. ábrán* látható módon írta fel. Az egyenletek felírására Li Je más módszert is kitalált. Az x, x^2, x^3, ... és az x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, ... és az állandó tag számára kijelölt 19 hieroglif jelet, és a pozitív kitevőjű tagokat a konstans tag elé, a negatív kitevőjűeket pedig az állandó tag után írta.

1260-ban **Kubiláj** kán kormányzói állást ajánlott fel Li JE-nek, de ő ezt nem fogadta el.

CSU SI-CSIE (1280?-1303?)

A Szung-dinasztia utolsó nagy matematikusa volt. A mai Pekinghez közeli Jensanban lakott. Életéből mintegy 20 évet vándormatematikusként töltött el. Kenyerét a matematika tanításával szerezte. Két műve maradt fenn. Az elsőt 1299-ben írta. Ennek címe: *Bevezetés a matematikába (Szuan-hszio csi meng).* Ezt a sokáig elveszettnek vélt könyvet a XIX. században találták meg. A maga idejében nagy hatással volt a japán és a koreai matematikusokra. Másik munkája, *A négy elem jáspis tükre (Sze jüan jü csien)* 1303-ból való. A négy elem a négyismeretlenes egyenletrendszer négy ismeretlenjét jelentette. Ezek: az égi elem *(x),* a földi elem (y), az emberi elem (z) és az anyagi elem (u). Az egyenletek felírására érdekes módot vezetett be. Például az

$$x+2y+3z+4u=5$$

egyenletet a *227. ábra* első része mutatja, az

$$x^2+2y^2+3z^2+4u^2+5xy+6zu+7yu+8xz+2x+9 = 0$$

egyenletet pedig az ábra második fele.

					4		
	4			7	0	6	
2	5	3	2	0	9	0	3
	1			5	2	6	
					1		

227. ábra

A negatív számokat Csu Si-csie is úgy jelölte, mint Li Je, vagyis az utolsó számjegyet ferdén áthúzta. Mesterien oldott meg az „égi elem” (Horner) módszerével magasabb fokú egyenleteket. Nem csupán az egész számú megoldásokat kereste, hanem kiszámította például az

$$576x^4-2640x^3 + 1729x^2+ 3960x — 1\ 695\ 252=0$$

egyenlet összes racionális gyökét.

Sokat foglalkozott a sorozatokkal is. *A négy elem jáspis tükrében* szerepel az első *n* természetes számnak és a következő sorozat első *n* elemének az összegképlete:

$$1+8+30+80+\ldots+\frac{n^2(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}.$$

Könyvéből kitűnik, hogy a középkori kínai matematikusok ismerték az első *n* négyzetszám összegképletét is. Ehhez a *228. ábrára* alapozott gondolatmenettel jutottak el:

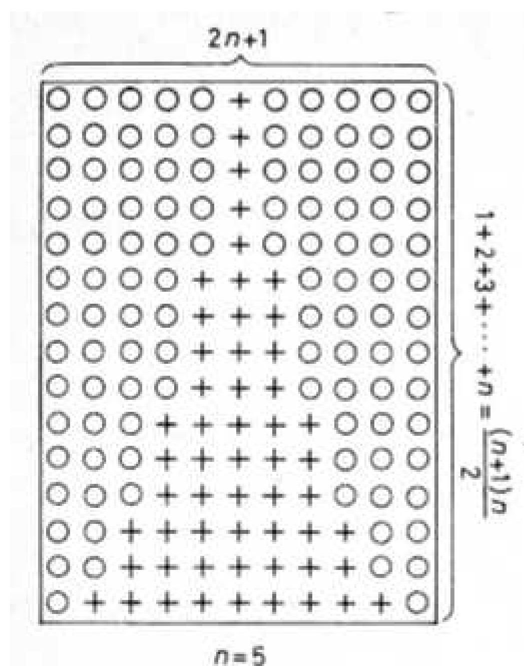
$1^2=1$

$2^2=1+3$

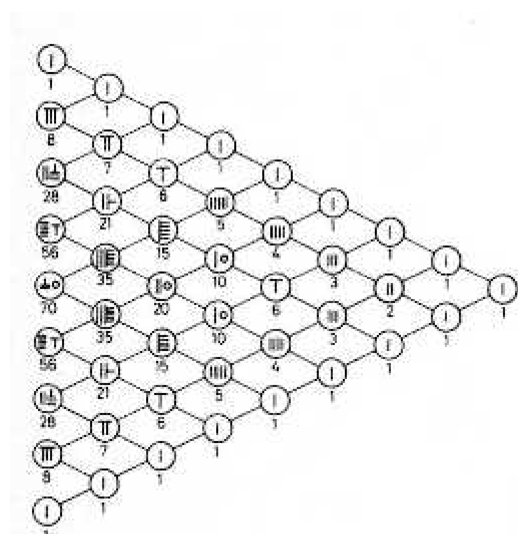
$3^2=1+3+5$

$4^2=1+3+5+7$

$5^2=1+3+5+7+9$



228. ábra



229. ábra

.

.

.

$$n^2=1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)$$
$$S_n=n\cdot 1+(n-1)3+(n-2)5+\ldots+1\cdot(2n-1),$$

ahol S_n az első n négyzetszám összege. Az ábra azt mutatja, hogy az S_n-re kapott eredmény éppen a kereszttel jelölt helyek száma. A körökkel jelölt helyek száma láthatóan $2S_n$, tehát a négyzetszámok összege a téglalap jeleinek a száma osztva 3-mal, vagyis:

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

A kombinatorikai elemek felbukkanása észlelhető Csu **Si-csie** szóban forgó könyvében, amikor az $(a+b)$ egész kitevős hatványainak az együtthatóit pillantjuk meg, mégpedig a Pascal-háromszög elrendezésében *(229. ábra)*. Ezt is találóbb lenne tehát *Csu Si*-csie-háromszögnek nevezni. Csu **Si-csie** nem állítja ugyan, hogy az együtthatóknak ilyen összeállítása a saját leleménye volna, de elődöket sem nevez meg. A binomiális együtthatók **Jang Huj** könyvében is szerepelnek.

JANG HUJ (XIII. SZ.)

Művei csak részben maradtak meg. Magasabb fokú egyenleteket oldott meg a Horner-módszerrel. Írt egy kommentárt a *Tíz Klasszikushoz.* Ebben a másodfokú egyenletek alapos elméletét adja. Kifogásolja, hogy a régi kínai matematikusok számítási eljárásaikat nem magyarázzák meg. Megadta a páratlan számok összegét 1-től $(2n+1)$-ig. Nála is megtalálhatjuk a négyzetszámok összegét és a háromszögszámok összegét (89. oldal). Ez utóbbi:

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

A KÍNAI MÉRTÉKEGYSÉGEK

Szun-ce a III. században állította össze az alapmértékegységek táblázatát, nevezetesen a hosszúságét, a térfogatét és a súlyét. A táblázat elkészítésében két szempont vezette. Az egyik az, hogy az alapegységek lehetőleg megfeleljenek a gyakorlati életnek, a másik pedig az, hogy amennyire lehet, illeszkedjenek a 10-es számrendszerhez.

A hosszúság egységéül választotta a „hu”-t (jelentése selyemhernyó), a súly mértékegységéül a „su”-t (eredeti jelentése: kölesmag), és a térfogat mértékéül a „szu”-t (mag). Szun-ce táblázata kis kiegészítéssel:

A hosszúság mértékegységei:

10 hu = 1 sze

10 sze = 1 hao

10 hao = 1 li

10 li = 1 fen

8 csi = 1 szjun

5 csi = 1 mo

40 csi = 1 pi

50 csi = 1 duan

10 fen = 1 cun   6 csi = 1 pu

10 cun = 1 csi   240 pu^2 = 1 mu.

10 csi = 1 csan

10 csan = 1 jin

A táblázat utolsó sorában a mu területmérték részletesebben: 1 mu = 15 pu*16 pu = 240 pu^2.

A súlymértékegységek:

10 su =1 le

10 le =1 csu

24 csu = 1 liang

16 liang=30 csin

4 csin = 1 tan.

A térfogat mértékegységei:

6 szu = 1 huj 10 sao= 1 he

10 huj = 1 co 10 he = 1 sen

10 co =l csao 10 sen=l tou

10 csao= 1 sao 10 tou= 1 hu.

A kínai mértékegységek egy része korok és helyek szerint változott. Például a kincstári liang=37,312 g. Ezzel mérték az ezüstöt. A sanghaji liang ugyanakkor csak 36,592 g volt, a hajós liang pedig 37,783 g. A csi hosszúság is változott 0,175 m-től 0,308 m-ig. Majdnem minden iparág ugyanazon elnevezéssel más értékű egységet használt még 1911-ben is. **Szun-ce** táblázatának egyik célja éppen a sokféle mértékegység egységesítése volt, bár törekvése kevés eredménnyel járt.

A KÍNAI MATEMATIKA KORSZAKAI

Összefoglalásként tekintsük át még egyszer a kínai matematika fejlődésének történetét Li JANG kínai matematikatörténész időfelosztása szerint, ő a kínai matematika történetét 6 korszakra osztotta. Ezek:

1. A **„boldog" őskor: HUANG-TItől a Han-dinasztia kezdetéig** (i. **e.** 2700-i. **e. kb.** 210).

2. Az ókor: A Han-dinasztia végéig (i. e. kb. 210-i. sz. kb. 600).

3. A késői ókor: A Tang-, a Szung- és a Juan-dinasztiák ideje (kb. 600-1368).

4. Az újkor: A Ming-dinasztia kora és a Csing-dinasztia uralkodásának a közepéig tartó időszak (1368-1750).

5. Az újabb kor: 1750-től 1949-ig.

6. A jelenkor: 1949-től.

Ezek közül a leglendületesebb matematikai fejlődést a késői ókor mutatta fel. **Csin Csiu-sao, Csu Si-csie,** Li Je neve valóban a középkori kínai matematika csúcsait jelöli. Ebben a korszakban a kínai kereskedelmi és kulturális élet széles körű kapcsolatokat teremtett számos országgal: Indiával, Mezopotámiával és azon keresztül a közép-keleti országokkal, továbbá hatással volt Korea és Japán művelődésének fejlődésére is.

A Li Jang által újkornak nevezett időszak az előzőekhez képest megmerevedést, hanyatlást hozott. Ekkor jelentős új eredmények nem születtek. Ebben az időben jelentkezett a hittérítők révén a nyugati hatás: megismerkedtek a kínai matematikusok **Eukleidész** *Sztoikheiájával.*

Az újabb korban a kínai matematikusok egy része még mindig a régi, receptszerű számítási szabályok gyártásában merült ki, de már volt egy, a nyugati matematikát befogadó csoport is. Az ő eredményességüket jelzi, hogy 1859-ben Li **San-lan** és **Vaili** megírták az első kínai nyelvű differenciál- és integrálszámítást.

Körülbelül az 1950-es évekig, a népi demokratikus Kína megszületéséig a jelentős kínai matematikusok nem hazájukban, hanem külföldön szereztek nevet maguknak és a kínai matematikának.

INDIA

INDIA ŐSI KULTÚRÁJA

A magát árjának nevező nép az i. e. 2. évezred közepén érkezett Indiába valahonnan a mai Irán területéről. Nyelve az indoárja nyelvcsoporthoz tartozik, amely maga is egyik ága az indoeurópai nyelvcsaládnak. Az indoárják őshazája ismeretlen. A legtöbb vélekedés szerint valahonnan északról származnak. Az árják Indiában már magas fokú civilizációval találkoztak. Sajnos ezt az ősi, Indus-völgyi civilizációt az érkezők lerombolták, a romokat aztán az Indus folyam beborította 5-6 m vastag iszapréteggel, és egészen a XX. századig létezésüket is alig sejtettük. Az 1925-1926-ban megindult régészeti feltárások azonban India északnyugati részén magas szintű ősi kultúra nyomaira bukkantak. Ezek a ma is folyó és sok meglepetést hozó kutatások két, akkori méretekkel mérve világváros romjait hozták napvilágra. Az egyik Pandzsáb tartományban Harappa mellett virágzott, a másik pedig Mohendzsodáro az Indus alsó folyásánál. Mindkettő valamikor az i. e. 3. évezredben élte fénykorát, de már a 4. évezredben is léteztek. A két, főváros jellegű település egyenes, rendezett, utcáival, emeletes, fürdőszobás házaival, a valószínűleg kultikus célokat is szolgáló közfürdőivel, szennyvízcsatornáival igen fejlett civilizációról tanúskodik, legalább olyan szintűről, mint a korabeli mezopotámiai. Az ásatások nyomán felszínre került építészeti, kerámiai, szobrászati alkotások mellett igen fontos a pecsételők vallatása. Ezek a zsírkőből, cserépből, csontból készített táblácskák rajzok, feliratok negatív véseteit hordozzák, és nedves agyagra nyomva pecsétszerűen létrehozzák a vésetek pozitív lenyomatát. A pecsétek bizonyára afféle cégjelzések szerepét töltötték be. Kétféle szempontból is jelentősek: egyrészt feliratai az akkori írásról - talán a számírásról is - elárulnak valamit, másrészről pedig azt igazolják, hogy tulajdonosaik más országokkal, így Mezopotámiával is élénk kereskedelmi és kulturális kapcsolatban voltak. Az Indus-völgyi pecsételők lenyomatai ugyanis előkerültek a mezopotámiai Ur városából és Elámból is. Igen valószínű, hogy a kereskedelmi kapcsolatba került népek értesültek egymás kulturális vívmányairól, köztük matematikai ismereteiről is. A pecsételők szövegének

megfejtése azonban még várat magára. A nehézséget főleg az okozza, hogy hasonló írásjelek a pecsételőkön kívül máshonnan nem kerültek elő, és a pecsételők szövege aránylag rövid. Ezekről eddig 386 írásjelet sikerült összegyűjteni. Ez kevés ahhoz, hogy azokat hieroglif jeleknek tekinthessük, viszont túl sok ahhoz, hogy a mi írásunkhoz hasonlóan hangokat jelöljenek. Ennek az ismeretlen nyelvnek a megfejtése, ismeretlen írásjelek alapján szinte a lehetetlennel határos.

A második világháború utáni ásatások nyomán az a kép alakult ki, hogy az Indus-völgyi kultúra gyökerei behálózták az Indus és a Gangesz közötti területet a mai Pakisztántól Kelet-Pakisztánig. A népnek azonban, amely e hatalmas területet egységes civilizációjával összefogta, szinte nyoma veszett, csak sejtjük, hogy a feltárt ősi városokat a dravidák lakták, talán azoknak a dravidáknak az árja pusztításból megmenekült ősei, akik ma Dél-Indiában élnek, vagy kis szigetekként az északi terület egy-egy jól megvédhető, eldugott zugában. Ha így van, akkor a dravida kultúra fejlődése az árják hódításával az i. e. 2. évezred közepén-végén megszakadt, bár bizonyos, hogy számos eleme beleépült az indoárja kultúrába. Ennek sok jele van, például az egyes pecsételők ábrája. Az egyiknél például szabályos jóga ülésben meditáló embert láthatunk, fejét bikaszarvak díszítik, és a jógipózba merevedő alakot vadállatok veszik körül.

Ennek a pecsételőnek az elkészítése után csak mintegy 1500 évvel később fejlődött ki a Siva-kultusz, amelynek pontosan a felsorolt elemek a szimbolikus jelei. Sivát, az állatok urát is jógaülésben szokás ábrázolni, hajában holdsarlóval, amely könnyen azonosítható a kettős bikaszarvval. A pecsételőkön sűrűn ismétlődő szimbólumok (bika, oroszlán, tigris stb.) azt jelzik, hogy az ősi Indus-völgyi kultúra világszemlélete a csillagos égbolt ősi szimbolikájában jutott kifejezésre, mint sok más korabeli népnél is (Egyiptom, Mezopotámia, Kréta, Kína stb.). Számos párhuzam bizonyítja, hogy a dravida vallási kultusz istenalakjai, jelképei tovább élnek az árja hódítók isteneiben, szertartásaiban. Joggal gondolhatjuk, hogy India mai kultúrájának megalapozói az ősi kultúrából sok egyéb más értéket is átvettek, megőriztek, átformáltak. Ismerünk olyan véleményeket is, amelyek szerint az indiai 10-es számrendszer már az ősi Indus-völgyi civilizáció

vívmánya, tehát legalább az i. e. 2000-es évekből származik. Erre azonban gyenge bizonyíték annak a kagylóhéjból készült „mérőlécnek” a darabja, amelyen 9 beosztás olvasható, hiszen például ugyanabból a korból Harappában olyan bronzból készült teljes mérőrúd is előkerült, amely nem 10-es beosztású.

Biztosra vehetjük, hogy a régészeti ásatások nyomán az elkövetkező években még számos olyan lelet birtokába jutunk, amelyek az ősi dravida kultúráról alkotott képünket a mainál tágabbá és megbízhatóbbá szélesítik. Nem csodálkoznánk, ha kiderülne, hogy az i. e. 2. évezredben a Mezopotámiával érintkező dravidák, az északnyugati szomszédokhoz hasonlóan, fejlett matematikai ismeretekkel rendelkeztek.

AZ INDOÁRJA KULTÚRA

Az i. e. 1500-as években az első árja törzsek szarvasmarhatartó pásztornépként érkeztek Indiába, új legelőket keresve. A szarvasmarhán kívül nagy becsben tartották az Indiában akkor még ismeretlen lovat is. Valószínű, hogy kezdetben harc nélkül, megegyezéses alapon kaptak az őslakosságtól legelőket. Aztán újabb és újabb törzsek érkeztek, akiket birtokszerző vágyuk a már megtelepedett rokonokkal is szembeállított. A hinduk legősibb irodalmi műve, a *Rig-véda* hírt ad a döntő, nagy ütközetről. E szerint az újonnan érkezett törzsek szembeszálltak a régebben jöttekkel. Ez utóbbiak, úgy látszik, hogy már túlságosan is otthonosan érezték magukat, mert az őslakó dravidák nem velük, hanem a később jöttekkel kötöttek szövetséget. A Harappa (Harujipija) melletti nagy csatában azonban a már megtelepedett, régebbi árja törzsek szövetsége győzött, ami a békés őslakók számára a megsemmisülést jelentette.

A *Rig-véda,* az 5 *Véda* közül a legrégibb, homályos, jelképes leírását adja az indiai árják régmúltjának, és dicsőíti az árják ősi isteneit. A főisten, Indra mellett jelentős szerep jutott az indiai ókori vallási kultuszban Szúrjának, a napistennek, Csandrának, a Hold istenének és Agninak, a tűzistennek. Agni már vadonatúj indiai istenség, míg a többiek még az Indiába való beözönlés előtti időkben születtek. Szúrjától és Csandrától származott az a két, legendás család, amely főszereplője a hinduk két nagy eposzának, a *Mahábháratának* és a *Rámájanának.* A véda szó tudást, mágikus tudást jelentett. A 10

énekből álló, ősi *Rig-védá*t az idők folyamán még 4 *Véda* követte. Ezekben a „védavallás” brahmana papjai az isteneket dicsőítő himnuszok mellett leírták az áldozati szertartásokat, a különböző varázsigéket, eljárásokat és dalokat, amelyek megszerzik az emberek számára az istenek segítségét. A *Védák* nyelve a hétköznapitól mindinkább elszakadó „egyházi” nyelv. Belőle fejlődött ki a későbbi szanszkrit, a szent szövegek nyelve. A szanszkrit szövegek számjegyei édestestvérei az általunk használt, hindu-arab számjegyeknek. Mind a kettő - a keleti arab számjegyekkel együtt - a hindu bráhmi számjegyekből ered.

Az Indiába érkező árják térhódítása több száz éven át folyt, és az i. e. 1000. év táján már uralmuk alá hajtották India egész északi részét, a Gangesz alsó folyását is beleértve. Csak ezután fordultak dél felé, és elérték a mai Dekkán területét. A legerősebb Kuru törzs, szövetségeseivel együtt Közép-Indiában telepedett le a Jamuna és Szaraszvati folyók között. Ekkor kezdődött el a máig is fennálló kasztrendszer kialakulása. A kasztok csúcsán az árja brahmanák álltak. Ebből a rendből kerültek ki a papok, a törvényhozók, a tudósok, a költők, egyszóval ez volt az értelmiségi kaszt. Még nevükben is a későbbi főistennek, Brahmának a hatalma tükröződik.

Ugyancsak a hódító árják rendje volt a katonák kasztja. Ennek tagjai, a ksatriják adták a kormányzókat, a hadvezéreket más katonai és közigazgatási parancsnokokkal együtt. A meghódított, leigázott népek fiai alkották a legalacsonyabb kasztokat. Ezek, a súdrák végezték a nehéz fizikai munkákat, amelyekre az uralkodó osztályok tagjai nem vállalkoztak. A legalsó és a legfelső osztályok között helyezkedtek el a ranglétrán a különböző foglalkozások (kereskedők, iparosok, kézművesek stb.) kasztjai. Ma e kasztok száma 2000 körül van. Korántsem szabad azonban az indiai kasztrendszert leegyszerűsíteni úgy, hogy az a kizsákmányolók és a kizsákmányoltak osztályaiból áll. A különféle kaszti törvények áttekinthetetlenül bonyolulttá teszik az indiai emberi viszonyokat. Ha például csak arra gondolunk, hogy a brahmanák nem érintkezhetnek a súdrákkal, akkor ebből az is következik, hogy egy előkelő brahmana család szakácsa is brahmana kell hogy legyen, tehát egyazon háztartáson belül megvalósulhat az úr-szolga viszony két brahmana között is.

Kétségkívül a brahmanák bölcsességének köszönhető, hogy a hatalmas területű Indiában - ahol több állam alakult ki és amelynek déli felén az őslakó dravidák is alkottak államot árja fennhatóság alatt - a sokféle törzsi, árja és nem árja kultúra egységes és tipikusan indiai kultúrává ötvöződött, amelyben tovább élhettek az ősdravida elemek is, összefonódva a legújabb irányzatokkal. Ez az egység a brahmanizmus jegyében született meg, amely vallás is, társadalmi forma is, vagy még inkább vallási alapokra épült társadalmi forma.

Az i. e. VIII. században terjedt el Indiában az írás tudománya. Ez a bráhmi írásmód, és a belőle sarjadt későbbi is, szótagírás volt, amelyet maga Brahma főisten ajándékozott híveinek. Ma úgy tudjuk, hogy az isteni beavatkozásnál lényegesebb szerepet játszottak azok a hindu kereskedők, akik megismertették honfitársaikat a föníciai írással. A föníciai írásból fejlődött ki ugyanis a bráhmi írás. Természetes, hogy az írás meghonosodásától kezdve sokkal jobban ismerjük a hindu történelmet, mint a régebbi korokét.

Az i. e. VI. században két olyan hindu próféta született, akinek tanai döntően befolyásolták a hindu világnézetet és művelődési alapokat. Az egyik **Vardhamána Mahávíra,** a másik **Gautama Sziddhártha. MAHÁVÍRÁt** követői Dzsinának, azaz Győzedelmesnek nevezték, tanainak foglalatát pedig dzsainizmusnak. A dzsainizmus alapvető tanítása, hogy a lélekvándorlás újraszületési láncából csak úgy szabadulhat az ember - bármely kasztba tartozzék is -, hogy legyőzi saját vágyait. A dzsainizmus Indiában ma is élő vallás. A másik történelmi jelentőségű próféta **Buddha** az első buddha volt, ami megvilágosodottat jelent. A Himalája tövében, Nepál vidékén élt a kis királyságot alkotó sákja törzs. Ennek fővárosában,

Kapilavasztuban született **Gautama Sziddhártha** királyfi. Apja, **Szaddhóda** király csak az élet örömeit és szépségeit igyekezett megmutatni fiának, elzárva őt minden szomorúságtól és csúftól. Amikor azonban - neveltetése ellenére - a királyfi rájött, hogy az életben megmásíthatatlanul a fény kísérője az árnyék, elvonult a rengetegbe, és iszonyú aszkézis árán rájött, hogy nem a szélsőségek vezetnek a lélek felszabadulásához, hanem - amint tanát is nevezte - a középső út, amely mentes a test érzéki

szenvedélyeitől, de távol áll az aszkézistől is. A szenvedés megszűnését vágyaink megsemmisítésével érhetjük el. Nemcsak uralkodnunk kell vágyainkon, hanem azoktól teljesen meg is kell szabadulnunk. Tanai világvallássá lettek, és érdekes módon ma már főleg Indián kívül toborozza híveit.

Buddha idejében, a perzsák hadjáratával **(Dareiosz** i. e. 520-ban csatolta birodalmához Északnyugat-Indiát) kerülhetett el Indiába **Püthagorasz,** akinek filozófiájában valóban számos indiai tanítást fedezhetünk fel. Indiában sok matematikát nem tanulhatott, mert a hindu matematikai kultúra a számírás bevezetésénél tarthatott. Ekkor a számfogalom kialakulásának a kezdetén, mint mindenütt, Indiában is a nagy számok varázsában éltek. Emlékeztet ez az állapot a gyermeki versengésre: ki tud nagyobb számot mondani? Ezt a kort tükrözi a *Lalitavisztara* eposzban az a jelenetsor, amely leírja **Gautama Sziddhártha** herceg leánykérését.

A szép **Gopa** királylány kezéért öt kérő. versengett, és ezeknek az akkori szokás szerint össze kellett mérniük erejüket vívásban, úszásban, futásban, nyilazásban, írásban és számolásban. Amikor **Gautama** királyfi minden számban ügyesebbnek bizonyult a vetélytársaknál, akkor a bölcs **Ardzsuna** a következő kérdést tette fel: „Hogyan folytatódnak a számok százasával koti (10^7) után?” A királyfi így felelt: „Száz koti neve ajuta, száz ajutáé nijuta, száz nijutáé kankara, száz kankaráé vivara... ”. Így sorakoztatott fel húsz nevet, de ennyivel sem érte be, mert még nyolc, hasonló sorozatot sorolt elő. Talán érdemes észrevenni, hogy az eposz szerinti elnevezések a 100-as számrendszert idézik. Ez a különben elég ritka számrendszer ugyanabban az időben a kínai pálcikás számírásban (305. oldal) is megjelent. Könnyen lehetséges, hogy a hinduk a kínaiaktól vették át.

Amikor a perzsa uralmat **Nagy Sándor** megdöntötte, akkor Indiát is birodalmához csatolta, de váratlan halála után **Csandra-gupta** sorra szabadította fel az elfoglalt területeket. Bölcs tanácsadójával, KAUTILJÁval az erős kezű király India északi részét egységes állammá szervezte. Leverte ugyan a görög helyőrségeket, kiűzte a hódító katonákat, de a perzsa és a görög telepeket meghagyta, és általuk a hellén művészet és tudomány is termékenyítőleg hatott a fejlődőben levő hindu kultúrára, sőt az Égei-tenger népeivel további

kapcsolatokat is biztosított. Ez nemcsak a hindu művészetre hatott üdvösen azzal, hogy hellén mintára a hindu építészek és szobrászok akkor kezdték az időálló kő használatát, hanem a hindu matematika és csillagászat is hasznát látta a görög szellem beáramlásának. **Csandragupta** unokája, a legendás **Asóka** király (i. e. 272-232) kegyetlen hódító háborúkkal növelte birodalmát. Eredményesebb volt azonban a véres háborúktól megkeseredett lelkű király bűnbánó elhatározása, hogy erőszak helyett szeretettel uralkodjék. Azon ritka királyok közé tartozott, aki valóban a szelídség és a szeretet hatalmával egyesíteni tudta szinte egész Indiát. Ezt az időszakot élénk kereskedelem, ipari élet, civilizációs és kulturális fejlődés kísérte. **Asóka** halála után azonban kis fejedelemségekre esett szét az ország, a rádzsák és a maharadzsák uralma alatt. India csak az i. sz. IV. században vált ismét egységes állammá a Gupta-családnak több mint 200 éven át tartó uralkodása alatt.

A virágzó Gupta-korszaknak (320-600) a fehér hunok betörése vetett véget. Amikor azonban a VI. században a turkesztáni törökök a hun birodalmat megdöntötték, akkor az Indiában rekedt hunokat beolvasztotta az indiai nép. A Gupta-család azonban már nem nyerte vissza régi hatalmát, igaz, hogy a Gupta-kor magas szintű kultúrája akkorra már megtermékenyítette egész India tudományos és művészeti életét. India északi részén **Harsa** király tudott még egyszer erős központi irányítású államot szervezni. A mintegy négy évtizedes Harsa-korszak újabb kulturális fellendülést hozott. E rövid életű állam felbomlása (698) után azonban ismét fejedelemségekre darabolódott India hatalmas északi területe. Nem volt jobb a helyzet délen sem, bár itt nagyobb országok alakultak ki, mint északon. Az egymással is torzsalkodó kis államok a X. században nem tudtak ellenállni a Gaznavidák által vezetett muzulmán támadásnak. A XI. század első felében különösen **Mahmúd al-Gaznavi** szultán, „a bálványok ledöntője” okozott helyrehozhatatlan kárt a hindu művészeti emlékekben. Fegyveresei kérlelhetetlen kegyetlenséggel pusztították India népét, leöldösve és rabszolgasorsra juttatva sok tízezer hindut. A XIII. század iszlám uralkodói tovább folytatták az erőszakos „térítést”, aminek India népe, ha fegyverrel nem is tudott ellenállni, de a minden szenvedést eltűrő, viszont meg nem alkuvó „passzív ellenállás” tehetetlenné tette az erőszakot, amint az a hindu szellemnek, a hindu kulturális értékeknek a megsemmisítésére tört. A muzulmán iga a XVI.

századig tartott. Az 1500-as évek elején India a mongolok hatalmába került. Az indiai MogulBirodalom alapjait **Akbar** (1556-1605; a **Nagy Akbar)** rakta le. **Akbar** türelmes uralkodó volt, és igyekezett kibékíteni a vallási ellentéteket. Még fia, **Dzsehángir** is hindubarát szellemben uralkodott, de a XVII. század második felében apját a trónról letaszító **Alamgir** már újra az iszlám vallási fanatizmusával üldözte és sanyargatta a hindu „hitetleneket". A XVIII. században a hatalmas muzulmán birodalom összeomlását követő zűrzavar jól előkészítette az európai gyarmatosítók térhódítását. Közülük az angolok váltak a legeredményesebbé. Az 1600-ban, tehát még **Akbar** életében megalakult Brit Kelet-indiai Társaság közreműködésével a „felszabadító" Brit Királyság 1859-ben átvette a hatalmat India fölött. 1876-ban Indiát császársággá nyilvánították, ahol a kormányzói teendőket a brit alkirály gyakorolta. Az angol gazdasági kizsákmányolás ellenére, India Angliának köszönheti újjászületését. Az angol uralom Indiában egységet hozott létre, belevitte az államot a kapitalista fejlődésbe, számos hindu ifjú korszerű iskoláztatáshoz jutott, ugyanakkor a gyarmati elnyomás megérlelte a nemzeti öntudatot, és a hindu felszabadító mozgalmak, valamint a két világháború okozta politikai viszonyok végül is 1947-ben megteremtették az egységes, önálló Indiát.

A HINDU SZÁMÍRÁS

India sokat szenvedett népe hogyan járult hozzá az emberiség egyetemes kultúrájának fejlődéséhez? A kérdésre csak nagyon leszűkített feleletet adhatunk. Nem térhetünk ki a hindu vallás, filozófia, művészet stb. nagy értékeinek az ismertetésére, csupán az indiai matematika történetére összpontosítjuk figyelmünket.

A hindu számírás első emlékei az i. e. III. századba visznek vissza bennünket, a legendákkal övezett Asóka király korába. Ebben az időben a hinduk kétféle számjelet használtak, kétféle írásuknak megfelelően. A perzsa uralom alatt elterjedt Észak-Indiában a sémi eredetű, jobbról balra haladó kharosti írás, amelynek számjeleit a

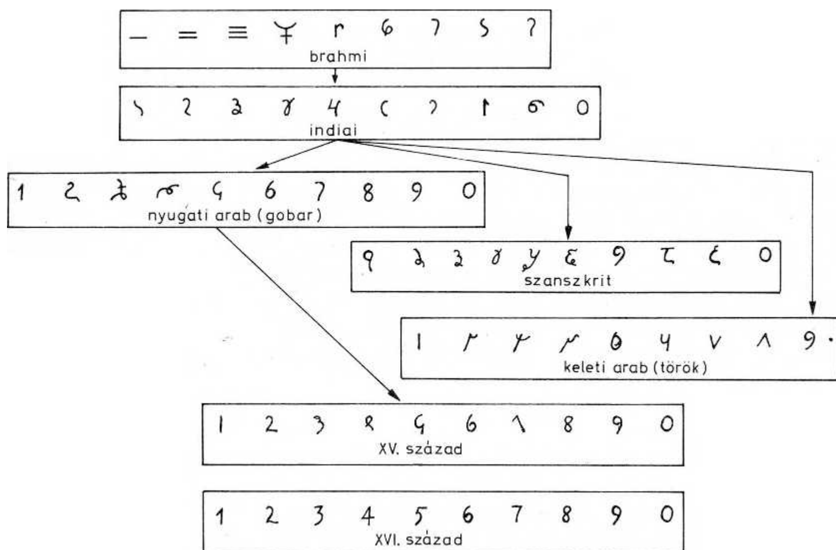
231. ábra szemlélteti.

231. ábra

I=1, II=2, III=3, X=4, IX=5, IIX=6, IIIX=7, XX=8, IXX=9,

=10, =20, =30, =40, =50, … , =100, =200.

232. ábra



A mi szempontunkból jelentősebbek a már előbb kialakult, ún. bráhmi számjelek. Ezekből fejlődtek tovább az indiai számjegyek, és ez utóbbiakból származnak a nyugati arab (gobár), a szanszkrit és a keleti arab számjegyek. A nyugati arab, vagyis gobár számjegyekből lettek az európai-hindu-arab számjegyek, a keleti arab számjegyeket pedig ma is használják például a törökök *(232. ábra* táblázata).

Az indiai számjelek számjegyekké fejlődését nagyban könnyítette, hogy többségük egyetlen, tehát nem összetett jel. A hinduk a számjegyek helyi értékének a fogalmát minden bizonnyal Mezopotámiából vették át, bár az i. sz. 500 körül dolgozó **Árjabhatta,** az első ismert hindu matematikus és tanítványai, a kínai kiírt helyi értékű számíráshoz igen hasonló módon írták a számokat. Írásmódjukban a mássalhangzók jelentették a számjegyeket. Mintha mi megállapodnánk a

$b=1$, $c=2$, $d=3$, $f=4$, $g=5$, $h=6$, $j=7$, $k=8$, $l=9$

jelölésben. Ha a leírt számjegy egyest vagy tízest jelentett, akkor

utánaírtak egy *a* betűt. Tehát a 23-at így írták: cada. A százasokat és az ezreseket az *i* magánhangzó jelölte. Így például 2345= *cidifaga.* Hasonló módon a tízezresek és a százezresek jele az *u* betű volt. E szerint például 234 *567= cudufigihaja.* Ez a számírás két szempontból is emlékeztet a kínaira. A kínaiak a helyi értéket egy hieroglifával jelezték, **Árjabhatta** egy magánhangzó betűjével. A kínaiaknál a pálcikás számírás (amely nem mutatta a helyi érték nevét) 100-as számrendszerű volt. **Árjabhatta** számírásánál az, hogy ugyanazt a magánhangzót két szomszédos tízes helyi értékhez rendelte, szintén a 100-as csoportosításra utal. Ugyancsak kínai emlékeket ébreszt, hogy **Árjabhatta** jobbról balra írta a számokat, mint a kínaiak. **Árjabhatta** egyik tanítványa, **Bhászkara** (520 táján) már elhagyta a helyi értékeket jelző magánhangzókat, határozottan 10-es helyi értékeket használt, és a mássalhangzók helyett a már kialakult bráhmi számjegyeket írta, de a helyi értékek sorrendjét meghagyta, tehát jobbról balra írt. Alig egy-két évtized múlva **Dzsinabhadra Gani** (537 körül) fordította meg ezt a sorrendet, bizonyosan mezopotámiai hatásra. Ehhez a számíráshoz azonban már nélkülözhetetlenné vált a 0 használata. A hindu „szunja” szó, ami nullát jelent, már a III. századi hindu szövegekben előfordult. A nulla jelét azonban a hinduk vagy a görögöktől, vagy a kínaiaktól vették át (lásd a 307. oldalt). A görög csillagászok jól számoltak a mezopotámiai helyi értékes 60-as számrendszerben, és annak tökéletesítésére, vagyis az üres helyi érték kitöltésére vezették be a görög uden=semmi szónak az első betűjelét, az omikront. Ugyanebben az időben már Kínában is használták a nulla jelölésére a köröcskét. India tehát ekkor mind a görögöktől, mind a kínaiaktól átvehette a 0 használatát. A lényeg az, hogy az Indiában született bráhmi számjegyek, a Mezopotámiában létrejött helyiérték-fogalom és a görög vagy kínai nulla használata Indiában állt össze a helyi értékes, 10-es alapú számírássá, amely aztán arab közvetítéssel világszerte elterjedt. Különbség csak a számjegyek alakjában mutatkozik: az arab országokban a hindu eredetű ún. keleti arab számjegyek, Kínában, Japánban hieroglif jelek, máshol pedig a szintén hindu eredetű nyugati arab számjegyek vannak használatban, de mindenütt a helyi értékes 10-es alapú számrendszer keretein belül.

Az Indiából diadalútra indult számírás jelentősége abban van, hogy hallatlanul megkönnyítette az írásban való számolást. Már az Égei-

tenger vidékén elterjedt abakusznak, a kínai számolótáblának és a golyós számológépnek is az volt a haszna, hogy szinte észrevétlenül átfogalmazta a műveleteket a helyi értékes 10-es alapú számrendszer nyelvére, és így már az írástudatlanok is el tudták végezni a négy alapműveletet. A maga korában a helyi értékes 10-es alapú számrendszer olyan forradalmat jelentett a számítástechnikában, mint később a logaritmus, majd a mechanikus számítógépek, és korunkban az elektronikus számítógépek.

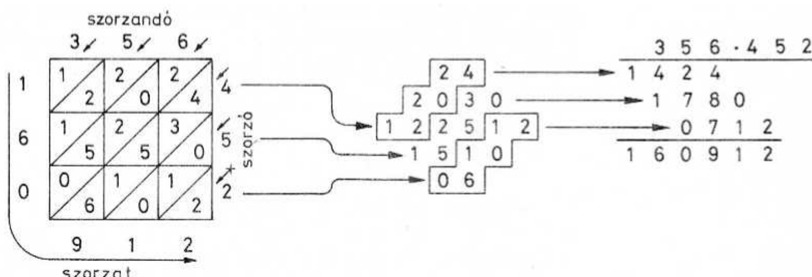
AZ INDIAI SZÁMÍRÁS ELTERJEDÉSE. A MAGYAR SZÁMÍRÁS

Az indiai számjegyekkel felírt első ismert 10-es helyiérték-rendszerű szám a 346. Ez a szám egy 595-ből származó hindu adománylevélen olvasható. Európában a hindu számírás nagyon nehezen terjedt el. Itáliában és a Földközi-tenger vidékén a római, nem helyi értékes számírás volt honos, kiegészítve az abakusz nevű számolótáblával. Az első könyv, amely sikeresen hívta fel a figyelmet az indiai számjegyekre, **Leonardo** PISANÓnak vagy más nevén FIBONACCInak a *Liber abaci* című könyve volt (450. oldal). Ez már csak a hindu számírást használta. Nagy szolgálatot tett az új számírás meghonosodása érdekében a francia **Gerbert** szerzetes (950?-1003), a későbbi II. **Sylvester** pápa, aki az Ibér-félsziget arab egyetemeit látogatva ismerkedett meg a helyi értékes 10-es számrendszerrel. Mindezek ellenére Firenzében még 1294-ben is rendeletileg tiltották az indiai számjegyek használatát az üzleti könyvekben, mert ezek hamisítása könnyebb volt. Még az 1400-1500-as években is elkeseredett harcot vívtak az abakuszt használó „abacisták”, az indiai módon számoló „algoritmikusokkal”. A legrégibb európai kézirat, amelyben hindu-arab számjegyek vannak, a 976-ból számazó spanyolországi *Codex Vigilianus.* Az első, hindu-arab számjegyekkel lapszámozott könyv az 1471-ben megjelent Petrarca-kiadás.

Annak az illusztrálására, hogy a hindu helyi értékes 10-es számrendszerű számírás mennyire megkönnyítette az írásban való számolást, bemutatok egy, a hindu középkorban kialakult szorzási módszert. Ezt a rácsos szorzásnak nevezett eljárást szemlélteti a *233. ábra* a 356 szorzandó és a 452 szorzó esetén. Minden kis négyzetben a négyzet oszlopának számát megszorozzuk a négyzet sorához tartozó számmal, például az első kis négyzet esetén 3*4 =

12. A kapott részletszorzatot a kis négyzetbe írjuk az ábra szerint. Ezután összeadjuk őket a nyilak irányában, a csillagos nyíltól kezdve. A négyzet két szabad oldalán a 160 912 szorzat leolvasható. Ha a részletszorzatokat az ábra további részén kissé átrendezzük, akkor ráismerhetünk a gyermekkorunkban beidegzett mai szorzási eljárásra.

233. ábra



Hazánkban a XV. században kezdték használni a 10-es helyiérték-rendszerű számírást. Azt megelőzően mindenki római számjegyekkel írt és abakuszon számolt, aminthogy akkor még Nyugat-Európa minden országában így írtak és számoltak.

Az ősmagyar számírásra vonatkozólag nincsenek emlékeink. A magyar számnevek eredetére is csak nyelvészeti következtetéseink vannak. Az összehasonlító nyelvészet megállapította, hogy a 2, 3, 4, 5 és 6 számok nevei elég meggyőző hasonlóságot mutatnak a finnugor nyelvekben, a következő táblázat tanúsága szerint:

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

Az a megfigyelés, hogy a négy nép számnevei hatig jó megegyezést mutatnak, arra utal, hogy amikor ezek a szavak keletkeztek, akkor a felsorolt népek még együtt éltek az őshazában, és hogy számaikat valószínűleg nem helyi értékes, 7-es számrendszerben

írták. Ez a feltételezés HUNFALVY PÁL (1810-1891) finnugor nyelvésztől származik. Ugyancsak a nyelvészek szerint a régi mesék „hétfejű” sárkánya, „hérmérföldes” csizmája, „hetedhét” országa is egy valamikori 7-es számrendszer használatára mutat. Az, hogy a 7-et jelentő szó a finn nyelvben nem, de az ugor nyelvekben a 7 napból álló időtartamot is jelenti, valószínűvé teszi, hogy a hét számnév kialakulásakor a finnek már elváltak az ugor népektől.

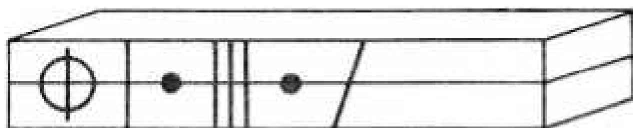
Úgy tudjuk, hogy a *tíz* szavunk perzsa eredetű, és eredetileg 10 darabot jelentett. Ha például a 10 darabra még ráteszünk kettőt, akkor az tizenkettő lesz. A 8 és 9 számnevek régies írásában, a nyoltzban és kilentzben egyes magyarázatok szerint a szóvégi „z” a tíz szó „z”-je, és arról árulkodik, hogy a 10-es számrendszerre való áttéréskor a nyolcat és a kilencet a tízből visszafelé képezték. A vogul nyelv ma is úgy mondja a 8-at, hogy kettő a tízből, a 9-et pedig: egy a tízből. Hasonló módon alakulhatott ki a harmintz szó is a „három tíz”-ből. A *száz* és az *ezer* szavunkat szintén a perzsákkal való kereskedés alkalmával vették át a finnugor népek. Sokan állítják, hogy a honfoglaláskor már a 10-es számrendszert használtuk, de előzőleg az ötöst. Az 5-ös számrendszert sejteti a rovásírásnál használt számrovás. A számrovásra vonatkozó legkorábbi emlékeink a XII. századból valók. A pásztorok használták, és a Hortobágyon ma is ismerik. A rovásjeleket rendszerint téglalap vagy négyzet keresztmetszetű fapálcikára, rúdra vésték. A legtöbb helyen a *234. ábra* számjeleit használták. A számot az egymást követő számjelek összege jelentette. A hortobágyi pásztorírás jelei a *235. ábrán* láthatók.

| = 1, V = 5, X = 10, ᐱ = 50, Ж = 100, ✳ = 1000.

234. ábra

| = 1, / = 5, X = 10, ▌ = 50, ▌▌ = 100.

235. ábra



236. ábra

Érdekes különlegességnek számít az ún. páros számrovás. Ezt azok a pásztorok használták, akik legeltetésre vettek át állatokat. A farudacskára került a tulajdonos jele, utána pedig megszabott sorrendben a bikák, tehenek, borjak száma, amint azt a *236. ábra* szemlélteti. Az ábra azt a tényt rögzíti, hogy a + jelű gazdától a pásztor átvett egy bikát, három tehenet és öt borjút. A vésés befejeztével az ábra szerint a rudat hosszában kettéhasították. Az egyik fele maradt nyugtaként a gazdánál, a másik ellennyugta gyanánt a pásztornál. Az állatok visszaszolgáltatásakor a két félrúd összeillesztésével vitamentesen megtörténhetett az elszámolás.

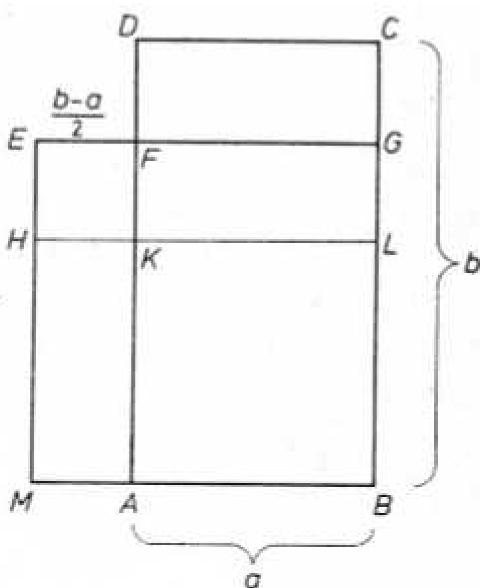
A nulla szavunk a latin nullus szónak a nőnemű alakja. A XVI. században azonban a nulla kifejezésére az arab „zifr” szóból származó „cziphra” szót használta az 1577-ben megjelent *Debreceni Arithmetica.* Valószínűleg a német Ziffer szó közvetítette hozzánk az arab „zifr”-t, amelyből származik még például a francia chiffre = szám, számjegy szó és az orosz cifra = számjegy szó is. 1653-ban APÁCZAI CSERE JÁNOS már a cziphra helyett czifrát írt. ÓNADI JÁNOS tankönyvében jelentkezett először 1693-ban a nulla szó. 1743-ban MARÓTHI GYÖRGY váltakozva használja a nulla, a tzifra, a semmi és a zifrből olasz közvetítéssel keletkezett zéró vagy zérus szót. Később a cifra szó jelentése a magyar nyelvben átalakult. Bevezetésükkor a különös alakú új számjegyeket, köztük a 0-t, azaz a „cifrát” is, sokszor használták rajzok díszítésére, és lassan a „cifra” a „díszes” egyik árnyalata lett. BOLYAI FARKAS 1830-ban hol a semmi, hol pedig a zéró szót használta.

A HINDU MATEMATIKA

Az indiai kultúra igen változatos, megsemmisülésekkel és újjászületésekkel teletűzdelt történelmi körülmények közt fejlődött, és ez megmutatkozik az ókori és a középkori hindu matematika történetében is. Csillogó eredmények váltakoznak sikertelen korszakokkal, sőt még az egyes matematikusok munkájában is jól megférnek egymás mellett a nagyszerű új felismerések és a nyilvánvaló tévedések. Számtalan külső hatás irányította India matematikáját. Sokat köszönhet a babiloni, a kínai és a görög matematikának. A szomszédok ismeretei azonban sohasem fedték el a hindu szellem eredetiségét és formálóerejét.

Mint annyiszor, most is, az első ismert indiai könyv, amely matematikai vonatkozásokat tartalmaz, vallási könyv: a *Szulvaszutra.* A szulva vagy szulba szó mérőzsinórt, a szutra pedig olyan művet jelent, amely szabályokat, szertartásokat, életviteli előírásokat, vallási tanításokat örökít meg. A cím tehát azt fejezi ki, hogy a könyvben a vallási élettel összefüggő ismeretek olvashatók, amelyekhez azonban mérőzsinór is szükséges, azaz a templomépítéssel, a templom berendezésével kapcsolatos geometriai ismereteket tárgyal. A *Szulvaszutra* három változata közül legismertebb az, amelyet egy ÁPASZTAMBA nevű bölcs írt. A könyvek az i. e. VI-V. század táján keletkeztek, tehát PÜTHAGORASZ, illetve MAHÁVÍRA és BUDDHA idejében.

Az Ápasztamba-féle *Szulvaszutra* ismerteti a derékszög kijelölésére alkalmas kötélhosszakat, amelyek derékszögű háromszöget fognak körül. Itt felsorolja a 3, 4, 5, az 5, 12, 13, a 8, 15, 17 és a 12, 35, 37 pitagoraszi számhármasokat. A Pitagorasz-tétel geometriai megfogalmazása valószínűleg Mezopotámiából származik. Feltűnő módon szerepe) a könyvben egy olyan geometriai szerkesztés, amely szinte azonos egy, az **Eukleidész** *Elemek* című művéből ismeretessel. A feladat a következő:



237. ábra

Szerkesztendő az *ABCD* téglalapéval egyenlő területű négyzet *(237. ábra)*\ A megoldás: Mérjük fel a téglalap rövidebb $AB=a$ oldalát a hosszabb $BC=b$ oldalra. A különbségként mutatkozó *LC* szakaszt felezzük meg (*G*), és a *BG* szakasszal mint oldallal szerkesszük meg az *MBGE* négyzetet. Húzzuk meg végül az *LKH* szakaszt is. A rajzról leolvasható, hogy

$BG^2—EF^2 = t_{MBGFKH} = t_{ABCD}$, mert $t_{MAKH} = t_{FGCD}$. A t az indexében látható síkidom területét jelenti. Másként:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=ab=x^2,$$

ahol *x* jelenti a keresendő négyzet oldalát. Az összefüggés szerint (b-a)/2 és *x* annak a derékszögű háromszögnek a két befogója, amelynek az átfogója (a + b)/2. Ez a háromszög pedig már megszerkeszthető, és abból leolvasható az $x=\sqrt{ab}$ is. Talán felesleges írnom, hogy a *Szulvaszutrákban* csak a feladat megoldási utasítása szerepel, magyarázat nélkül. A *Szulvaszutrákban* a számírás 10-es számrendszerű, de nem helyi értékes, tehát külön számjelek voltak az 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30, ..., 90, 100, 200, 300, ..., 900, 1000, 2000, 3000, ... számára.

Matematikatörténeti szempontból fontos könyvek a *Sziddhánták.* A „sziddhánta” szó rendszert jelent, mégpedig csillagászati vonatkozásban. Az öt *Sziddhánta (Szúrja Sziddhánta, Paulisa Sziddhánta, Vasziszista Sziddhánta, Pajtamáha Sziddhánta* és *Romanka Sziddhánta)* az i. sz. III-V. században keletkezett csillagászati művek. Ezek között időrendben az első a *Szúrja Sziddhánta* (A Nap rendszere), amelyet a hagyományok szerint maga Szúrja, a napisten írt. Az öt közül teljes egészében csak a *Paulisa Sziddhánta* maradt meg. Ennek szerzője **Varáha-mihira** (505 körül). A mű annyira görög hatást mutat, hogy **al-Bírúni** arab matematikus véleménye szerint a szerzője is egy alexandriai görög csillagász lehetett. Kétségkívül sok részlete emlékeztet **Ptolemaiosz** *Almagesztjének* csillagászati és trigonometriai fejezeteire. Biztosra vehetjük, hogy a *Sziddhánták* nem eredeti hindu művek.

Anyaguk tekintélyes része Mezopotámiából, Görögországból, esetleg Kínából származik. Ne gondoljunk azonban teljesen szolgai átvételre. A hinduk sokat fejlesztettek, módosítottak az importált ismereteken. Erre meggyőző példával szolgál éppen a *Szúrja Sziddhánta,* amely először beszél a szinusz szögfüggvényről a mai értelemben. Még PTOLEMAIOSZnál is a szinusztáblázatot joggal nevezhetjük húrtáblázatnak, hiszen abból a kör középponti szögeihez tartozó húrhosszak olvashatók ki. A *Szúrja Sziddhánta* húrtáblázata azonban már a mai értelemben is szinusztáblázat. Ez a középponti szög feléhez rendeli hozzá a középponti szöghúrjának a felét. Aszinusz szó maga is a hindu „jiva" = húr szó hibás fordításából ered. Az arab fordító ezt a szót „jibá"-nak vette át. Az arab írás azonban a magánhangzókat nem tünteti fel, tehát a jiba szót csak „jb"-nek írja. Az arabról latinra fordító Ro**bert Chester** a jb-t jaib-nak olvasta jiba helyett. Az arab jaib szó pedig azt jelenti, hogy öböl, és ezt **Chester** a latin szinusz szóval fordította, amelynek jelentése öböl, öl. Így történhetett, hogy a magyarosítás korában a szinusz szóból kebel lett, a cosinusból pótkebel és az arccosból visszáspótkebel a **Kazinczy** korabeli diákok nagy örömére. Ma már a szinusz szó matematikai szakkifejezés, amelyről a matematikusok zöme tudni véli, hogy húrt jelent.

Az indiai földön jó talajra találtak a beszivárgott matematikai ismeretek. Az V. és VI. században már Indiának is megvoltak a maga matematikusai, de az óriási területen elszórva, egymástól elszigetelten dolgoztak. Mégis, a hindu matematikának is alakult ki valamelyes központja, kettő is. Az egyik Közép-Indiában Udzsain, a másik Dél-Indiában Majszur.

ÁRJABHATTA (476-550?)

Neves indiai matematikus és csillagász. Kuszumapurában született, az akkori nagy tudományos központban. Sajnos ugyancsak Észak-kelet-Indiában és ugyanazon évtizedekben két **Árjabhatta** élt, és nem tudjuk, hogy a kettő közül melyik írta a 499-ben elkészült *Arjabhatija* nevű könyvecskét. Ebben a szanszkrit nyelvű csillagászati és matematikai munkában a könyv születésének a dátumát a szerző jelölte meg, és azt is, hogy 33 éves korában írta. E szerint **Árjabhatta** 476-ban született. A könyvecske, amint ezt az akkori hindu hagyományok megkövetelték, verses formában

foglalta össze az akkori csillagászati és matematikai ismereteket. Terjedelme 123 stanza. Ez ugyanaz **a** versforma, amelyben **Arany János** írta **a** *Bolond Istókok,* azaz *abababcc* rímképletű, nyolcsoros versszak.

Az Árjabhatiját némelyek Eukleidész Sztoikheiájához szokták hasonlítani. A hasonlóság alapja azonban csupán annyi, hogy mindkettő összefoglaló mű. A *Sztoikheia* kimondottan matematikai tartalmú és igen szigorú rendszerességgel, jó pedagógiai érzékkel felépített könyv. Ez az *Arjabhatijáró*1 nem mondható el. A hindu műnek csak mintegy harmadrésze matematika, és a *Sztoikheiá*-hoz viszonyított rendszertelensége mellett még sok hibás állítást is tartalmaz. A könyv matematikai fejezete a hatványfogalommal kezdődik. Felsorolja 10 hatványait 10^{10}-ig. Ezután ismerteti a négyzetgyök- és a köbgyökvonást, majd terület- és térfogatszámítási feladatok következnek. A háromszög területét helyesen számolja ki, de a piramis térfogatát a háromszögtől vett helytelen analógiával úgy határozza meg, hogy az alapterületet megszorozza a magasság felével. A kör területéhez úgy jut el, hogy a kerületet szorozza a fél sugárral. Ez jó, de már a gömb térfogatát úgy számítja, hogy a gömbi főkör területét megszorozza a négyzetgyökével, ami pedig rossz. A jó és rossz eredmények e párhuzamát találhatjuk a négyszögek területszámításánál is. Egymás mellett sorakoznak az *Árja-bhatija* matematikai felében a helyes és a helytelen állítások. A π értékét PTOLEMAIOSZhoz hasonlóan 3,1416-nek vette az egyik feladatnál, de 10 négyzetgyökének a másiknál. Sokszor indokolatlanul elfogadja a közelítő értéket akkor is, amikor a pontos érték meghatározása sem kerülne fáradságba.

Ez különben más hindu matematikusoknál is előfordul. Van azonban arra is példa, hogy tudatosan különböztetik meg a pontos és a gyakorlatnak még megfelelő közelítő értéket. Az *Arjabhatija* kitér a számtani sorozatokra is, hoz példát az összeg és az elemek számának a meghatározására. Egy kamatszámítási feladat kapcsán eljut a másodfokú egyenlethez. Ezt a mai képletnek megfelelő előírással oldja meg. A matematikai rész második fele gömbi trigonometriával foglalkozik. A könyvben van egy szinusztáblázat, amely olyan körre vonatkozóan tartalmazza a félhúr-értékeket, amelynek a kerülete 360*60 = 21 600 egység, vagyis rádiusza 3438 egység, amikor is π értékét 3,054-nek vette. E táblázatban a

szinuszértékek 3,75 = 90:24 fok szögintervallumokként következnek. Ha ezeket elosztjuk 3438-cal, akkor közelítőleg a mai táblázatok szinuszértékeit nyerjük. Mint említettem, **Árjabhatta** a számokat szótagokkal írta, más-más magánhangzókat használva a helyi értékek jelölésére. Ehhez igen kevés változtatás kellett, hogy kialakuljon a helyi értékes 10-es számrendszerű számírás. Könyvében olvasható is egy mondat, amely ösztönzésül szolgálhatott a helyi értékes írásmód kialakítására. Olyan mennyiségekről beszél, amelyekre igaz, hogy „helyről helyre, mindegyik tízszerese az előtte állónak". A könyv kiegészül a bolygórendszer ismertetése mellett az időszámítással és más, a csillagászathoz szükséges számítási eljárásokkal.

BRAHMAGUPTA (598-660)

Árjabhatta után mintegy száz évvel Brahmagupta volt India legkiválóbb matematikusa. A közép-indiai Udzsainban élt és dolgozott. Ő is verses formában írta meg nagy, 20 kötetes művét a Brahmasphuta Sziddhántát, amit Brahma tökéletes rendszerének lehetne fordítani. E 20 kötetből 12-ben aritmetikát és geometriát tárgyal. Kiemelendő, hogy elsőként ismertette részletesen az előjeles számok műveleti szabályait. A pozitív számokat vagyonnak, a negatívokat pedig adósságnak tekintette. Ezzel a felfogással szemléletesen fogalmazta meg a négy alapművelet előjelszabályait. Elsőként tekintette a nullát is számnak, és megkísérelte tisztázni a zérussal végzett műveleteket. Ő sem tudott azonban megszabadulni a hindu matematika átkától, ő is keverte a jót a rosszal. Azt állította, hogy $0 : 0 = 0$, és hogy „Pozitív vagy negatív osztva zérussal, olyan tört, amelynek a nevezője nulla". Brahmagupta is, mint a hindu matematikusok általában, kedvelte a határozatlan egyenleteket. Az $ax + by = c$ alakú lineáris diophantoszi egyenlettel már Árjabhatta is foglalkozott, de az általános megoldás először BRAHMAGUPTÁnál található. Biztos, hogy a határozatlan egyenletekkel a görögök ismertették meg a hindukat, de még **Diophantosz** sem dolgozta ki általános elméletüket. **Brahmagupta** már tudta, hogy az $ax—by = c$ (ahol *a, b* és *c* egész számok) egyenlet gyökeit megtalálhatja, ha az $ax—by = 1$ egyenlet gyökeit c-vel megszorozza. Az $ax—by = 1$ egyenlet egész gyökeit pedig lényegében a ma is használatos módszer szerint kapta meg:

Ha *a* nagyobb, mint *b,* akkor az egyenletet rendezzük y-ra, a kisebb együtthatójú ismeretlenre:

$$y=\frac{ax-1}{b}.$$

Ha *a* és *b* relatív prímek, akkor $a=nb+r$, ahol *n* egész szám, tehát

$$y=\frac{nbx+rx-1}{b}=nx+\frac{rx-1}{b}, \quad \text{ahol } r<b.$$

Mivel *y* egész szám kell hogy legyen, azért

$$z=\frac{rx-1}{b}$$

is egész szám.

Visszajutottunk tehát az eredeti $rx\text{-}bz=1$ alakhoz, de ebben már kisebb együtthatók szerepelnek, hiszen r < b < a. Az eljárást ismételve, végül is olyan egyszerű egyenlethez jutunk, amelynek egész gyökei leolvashatók, és azokat visszafelé helyettesítve megkaphatjuk *x* és *y* értékeit. Kísérjük végig az eljárást egy számpéldán:

Legyen a megoldandó egyenlet

$15x—17y= 1$,

amelynek egész gyökeit keressük. Az előbbiek szerint:

$$x=\frac{17y+1}{15}=y+\frac{2y+1}{15},$$

ahol

$$z=\frac{2y+1}{15}$$

egész szám. Innen

$$y=\frac{15z-1}{2}=7z+\frac{z-1}{2},$$

ahol

$$t=\frac{z-1}{2}$$

egész szám. Innen

z = 2t + 1.

Ha most *t* helyébe egész számokat írunk, akkor *z* is és vele együtt *x* és *y* is egész számok lesznek.

Ha t -2, 0, 1, 2, ..

akkor z = —3,1, 3, 5,...,

y= —23, 7, 22, 37,

és z= —26, 8, 25, 42, ...

Brahmagupta elfogadta a negatív megoldásokat is. Azt is tudta, hogy az $ax+by=c$ diophantoszi egyenletnek mindig van megoldása, ha *a* és *b* relatív prímek, sőt a megoldások $x=p+nb$, $y=q—$ na formuláit is ismerte.

Brahmagupta foglalkozott még az $y^2=ax^2+1$ alakú, másodfokú diophantoszi egyenlettel is, amit tévesen Pell-féle egyenletnek szokás nevezni. Ezzel azonban csak néhány száz évvel később, kitűnő honfitársa, **Ácsárja Bhászkara** tudott boldogulni. **Brahmaguptá-**ról érdemes még megjegyezni, hogy az aritmetikai műveletekre már külön jelölései voltak. Az összeadást egyszerűen egymás mellé írással jelölte. A kivonásnál is ezt az elhelyezést használta, de a kivonandó fölé pontot tett. Az osztás osztóját az osztandó alá írta, de törtvonal nélkül. A szorzás, a gyökvonás és az ismeretlen jelölésére a megfelelő szó rövidítését használta.

Brahmagupta geometriájában megkülönböztette a közelítő és a pontos eredményre vezető eljárásokat. Az egyenlő szárú háromszög területét úgy számította ki, hogy az alap felét megszorozta a szár hosszával; az általános háromszög területét pedig úgy, hogy az egyik oldal felét szorozta a másik két oldal számtani közepével. Ha viszont pontosan akart számolni, akkor a Hérón-féle formulát használta. A háromszög köré írható *r* sugarú körben ismerte az $a = 2r \sin \alpha$ összefüggést, ahol *a* a háromszög egyik oldala és a az ezzel szembeni szög. Nevezetes eredménye a Hérón-formula általánosítása négyszög esetére. E szerint, ha egy négyszög oldalai *a, b, c* és *d,* valamint *s* a fél kerülete, akkor a négyszög területe:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

A szép eredményhez azonban nem jegyezte meg, hogy a közölt képlet csak a húrnégyszögekre ad pontos eredményt. (Tetszőleges négyszög esetén a képlet:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2 \alpha},$$

ahol a a négyszög két szembeni szögének a számtani közepe.)

Foglalkozott a pitagoraszi számhármasok előállításával is. A racionális mérőszámú oldalakkal rendelkező derékszögű háromszög meghatározására az

$$a = p, \quad b = \frac{p^2 - q^2}{2q}, \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2q}$$

képleteket használta. Itt is megpróbálkozott az általánosítással, amikor is olyan négyszögeket keresett, amelyeknek oldalait, átlóit és területét racionális szám méri. Erre a már idézett területképletet használta, az átlók kiszámítására pedig a

$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}, \quad \text{valamint a} \quad \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

formulákat. Egyik példájában $a=b=25,$ $c=39$ és $d=60$ volt. Így a két átlóra 56-ot és 63-at kapott, de pontatlan területképletével a helyes 1764 helyett 1933,75-ot.

ÁCSÁRJA BHÁSZKARA (1114-1185?)

Ő volt a **Brahmagupta** után következő első nagy hindu matematikus. Ugyanott működött, ahol nagy elődje - Udzsainban. Ő is írt egy nagy összefoglaló művet *Sziddhánta Sirómani* címen, amit A csillagászat koronájának lehetne fordítani, A mű négy részből áll. A két utolsó kizárólag csillagászattal foglalkozik, de az első kettő matematikával. Az első rész önálló műnek is tekinthető, és *Lilávati* (Elbűvölő) a címe. A hindu legenda szerint **Bhászkara** a csillagok állásából megállapította azt a legkedvezőbb időpontot, mégpedig órára pontosan, amely egyedül alkalmas arra, hogy leánya férjhez menjen. Közelegvén a kijelölt óra, az izgatott ara a vízóra fölé hajolva figyelte az idő múlását, nehogy elmulassza a kedvező pillanatot. Nem vette észre, hogy fejdíszéből egy gyöngyszem a vízórába pottyant, és elzárta annak kifolyócsövét, azaz, hogy az óra „megállt". Mire a hibát észrevették, addigra azonban a megjósolt pillanat elröpült, és így a leányka pártában maradt, mert más időpont már csak szerencsétlen házasságot hozott volna. A kétségbeesett leány vigasztalására és szórakoztatására az apa egy 13 fejezetből álló feladatgyűjteményt írt. Így született meg a *Lilávati.* Feladatainak szövege valóban elbűvölő. Közöttük található a letört bambuszra vonatkozó feladat: A szél letörte a 32 láb magas bambusznádat úgy, hogy a törés fölötti rész lehajlott, és vége a víz alatt a talajt a nád tövétől 16 láb távol éri. Milyen magasan tört el?

Egy másik feladat: Egy oszlop tetején páva ült. Az oszlop tövében lakott egy kígyó. A páva meglátta a hazaigyekvő kígyót, amely az oszlop tövétől háromszor olyan távol volt, mint az oszlop magassága. A páva egyenes vonalban lecsapott a kígyóra, és elérte, mielőtt elbújhatott volna. Ha a páva és a kígyó találkozásáig mindkettő ugyanakkora utat tett meg, akkor milyen messze voltak az oszlop tövétől a találkozás pillanatában?

Egy algebraibb jellegű feladat: A játszadozó majmok nyolcadrészének a négyzete az erdőben ugrált. A fennmaradó 12 a zöld dombok felé igyekezett. Hányan voltak összesen?

A következő feladatot a felsorolt műveletek visszapergetésével oldotta meg: Melyik az a szám, amely hárommal szorozva, azután a szorzat háromnegyed részével növelve, majd héttel osztva és harmadrészével csökkentve, azután az eredeti számmal szorozva és 52-vel csökkentve, végül az eredmény négyzetgyökénél nyolccal nagyobb számot tízzel osztva - kettőt ad?

Végül, még egy kérdés: A méhraj nyolckilenced része elrepült. A megmaradt méhek egy csoportja a közeli jázminbokorra szállott. Ebben a méhek száma az egész rajban levők felének a négyzetgyöke volt. Egy méhecske pedig a lótuszvirágba esett társának a segítségére sietett. Hány méhből állt az egész raj?

A felsorolt ízelítő példák az egész mű hangulatáról akkor adnának hű képet, ha mindezt versbe szedve, a hinduk virágos és költői kifejezéseit használva tolmácsoltam volna. Annyi azonban talán így is kivehető, hogy főleg egyenletmegoldásokat kívánó feladatgyűjteményről van szó, amely a maga korában igen nagy népszerűségnek örvendett. A *Lilávatit* 1587-ben perzsára is lefordították, és 1832-ben kiadták Kalkuttában. Feladatai felölelik a mértékegységek ismertetését, az egész és törtszámokkal való műveleti szabályokat a négyzetgyökvonásig bezárólag, az arányosrész-számítást, a keverékszámítást és a sorozatok összegezését. A geometriai rész területszámítással, térfogat-meghatározással és a Pitagorasz-tételre alapozott problémákkal foglalkozik.

Igen szép, szemléletes bizonyítást mutat be a Pitagorasz-tételre. A szó legszorosabb értelmében *bemutatja* az igazolást két szomszédos ábrán, amelyekről a tétel magyarázat nélkül leolvasható *(238. ábra)*. Általában még **Bhászkara** sem változtatott az egyiptomi vagy kínai módszeren, ugyanis a feladatmegoldás lépéseit receptszerűen, magyarázat nélkül közli. Ha a *238. ábra* első részén a 2-es és a 4-es háromszögeket a nyíl irányában 270°-kal elforgatjuk, akkor az ábra második részét nyerjük, és valóban leolvasható, hogy $c^2 = a^2 + b^2$. A műben felbukkannak kombinatorikai részek is.

A *Sziddhánta Sirómani* második része szintén önálló könyv, címe *Vidzsa Hanita* (Elemző számtan, algebra; vidzsa = elem, hanita = számtan). Ez túlnyomórészt algebrai tartalmú rész. Kezdődik az előjeles számok műveleti szabályainak az ismertetésével, folytatódik az első- és másodfokú határozott és határozatlan egyenletek megoldásával, végül lineáris egyenletrendszerekre vezető feladatokat is tartalmaz. BHÁSZKARÁnak ez a munkája az első olyan hindu írás, amely felveti a végtelen problémáját, mégpedig a nulla osztóval kapcsolatban. A következőket írja:

„Az osztandó 3. Az osztó 0. A hányados a 3/0 tört. Ez a tört, amelynek a nevezője 0, egy végtelen mennyiséget jelent. Ilyen mennyiség, amelynek az osztója 0, nem változik, bármit adunk hozzá vagy bármit vonunk ki belőle: aminthogy nem változtat helyet a végtelenben az örökkévaló Isten.” **Bhászkara** azonban e világos megjegyzés ellenére sem látta át a nullával való osztás problémáját. Ezt mutatja egy következő kijelentése, amely szerint

$(a/0)*0 = a$

Tanulságosnak ígérkezik, ha megnézzük, miként oldott meg **Bhászkara** két, másodfokú kétismeretlenes határozatlan egyenletet. Az egyik az

$xy = ax + by + c.$

Először rendezte, és mindkét oldalához hozzáadott *ab-t*:

$xy — ax — by + ab = c + ab.$

Ezután egy ábráról *(239. ábra)* leolvasta, hogy

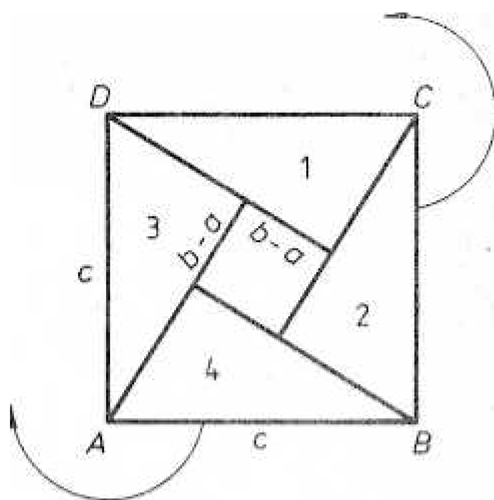
$xy — ax — by + ab = (x — b)(y — a),$

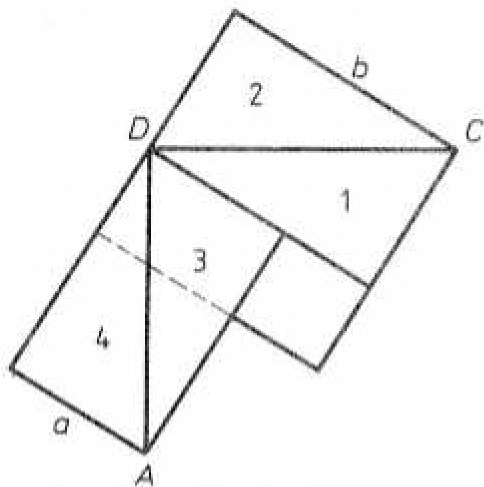
tehát

$(x — b)(y — a) = c + ab.$

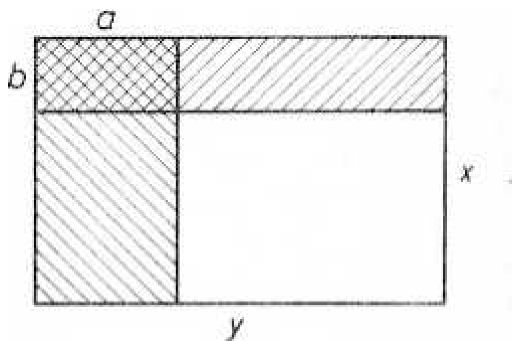
Az így átalakított egyenlet jobb oldalát két egész szám szorzatára bontotta, azután a jobb és bal oldal megfelelő tényezőinek

egyenlőségéből meghatározta *x*-et és *y*-*t*.





238. ábra



239. ábra

E gondolatmenetet alkalmazva az

$$xy=3x+2y+34$$

egyenletre, az $(x-2)(y-3)=40$ egyenlethez jutunk. A 40-nek két különböző, egész tényezős szorzattá alakítása szerint nyolc különböző megoldáspárt nyerünk.

A másik kétismeretlenes másodfokú határozatlan egyenlet az ún. Pell-féle egyenlet. **Bhászkara** ezen a területen kiemelkedő eredményt ért el, **Pell** előtt 500 évvel. Sajnálhatjuk, hogy ciklikus megoldási módszerét nem ismertette, mert így csak hiányos képet nyerhetünk a korabeli hindu matematikusok bizonyára gazdag számelméleti ismereteiről. Úgy hiszem, hogy nem hiábavaló, ha egy konkrét példán kísérjük figyelemmel az

$$y^2=ax^2+1$$

alakú Pell-egyenlet megoldását, illetve egész gyökeinek megkeresését, **Bhászkara** receptje szerint. (A Pell-egyenletek elméletét az érdeklődők megtalálhatják a **Turán Pál** előadásai nyomán összeállított *Számelmélet* című egyetemi jegyzetben, amelyet **Lánczi Istvánné** állított össze, és a Tankönyvkiadó adott ki 1964-ben.)

Az $y^2=ax^2+1$ egyenletben legyen a természetes szám. Ebben az esetben **Bhászkara** utasításai a következők:

Először próbálgatással keressünk olyan x_1 y_1 b_1 természetes

számokat, amelyekre igaz, hogy

$y^2{}_1 = ax^2{}_1 + b_1$, ahol x_1 és b_1 relatív prímszámok.

Ezután válasszunk olyan z és x_2 természetes számokat, hogy teljesüljön az

$x_1 z + y_1 = b_1 x_2$ (1)

egyenlet. Ez lehetséges, ha x_1 *és* b_1 relatív prímszámok (367. oldal).

Ekkor $(z^2\text{-}a)/b_1 = b_2$ egész szám és $ax^2{}_2 + b_2$ négyzetszám. Ez a következők miatt igaz:

A fentiek szerint az (1) egyenletből meghatározott

$$z = \frac{b_1 x_2 - y_1}{x_1}$$

(az x_2-vel együtt) egész szám. A b_2 pedig akkor egész szám, ha z^2—a osztható b_1-gyel. Nézzük meg, így van-e.

$$z^2 - a = \left(\frac{b_1 x_2 - y_1}{x_1}\right)^2 - a = \frac{b_1^2 x_2^2 - 2b_1 x_2 y_1 + y_1^2 - a x_1^2}{x_1^2}.$$

Mivel azonban az $y^2{}_1 — ax^2{}_1 = b_1$ azért

$$z^2 - a = \frac{b_1^2 x_2^2 - 2b_1 x_2 y_1 + b_1}{x_1^2} = b_1 \frac{b_1 x_2^2 - 2x_2 y_1 + 1}{x_1^2},$$

tehát a z^2—a egész szám osztható a b_1 egész számmal, és így a

$$b_2 = \frac{z^2 - a}{b_1}$$

maga is egész szám.

Ugyanekkor az $ax^2{}_2 + b_2$ is egész szám, sőt

$$ax_2^2+b_2=a\left(\frac{x_1z+y_1}{b_1}\right)^2+\frac{z^2-a}{b_1}=$$

$$=\frac{ax_1^2z^2+2ax_1y_1z+ay_1^2+b_1z^2-ab_1}{b_1^2}=$$

$$=\frac{z^2(ax_1^2+b_1)+2ax_1y_1z+a(y_1^2-b_1)}{b_1^2}=$$

$$=\frac{z^2y_1^2+2ax_1y_1z+a^2x_1^2}{b_1^2}=\left(\frac{zy_1+ax_1}{b_1}\right)^2$$

egy egész számnak a négyzete. Jelöljük ezt $y^2{}_2$*-nel.* Ilyen módon eljutottunk az

$y^2{}_2=ax^2{}_2+\ b_2.$

egyenlethez, amely éppen olyan alakú, mint az eredeti

$y^2{}_1=ax^2{}_1+b_1.$

Ha most $b_2=\ 1$, akkor x_2 és y_2 az

$y^2=ax^2+1$

egyenlet egyik megoldáspárja, ha pedig a b_2 különbözik 1-től, akkor is elértük, hogy kisebb, mint az első segédegyenlet b_1 állandó tagja. Ekkor az eljárás ismétlésével a b konstansok csökkenő sorozatát nyerhetjük. A megoldás nyilván a $b=\ 1$ esetben jelentkezik.

Bhászkara olyan Pell-egyenletet oldott meg, amelyben az a együttható értéke rendre 8, 11, 32, 61 és 67 volt. Példaképpen válasszuk ki az

$y^2=\ 32x^2+1$

egyenlet.

Bhászkara algoritmusa szerint először próbálgatással megállapítjuk, hogy az

$y^2 = 32x^2 + 41$

egyenlet egyik gyökpárja az $x_1 = 5$, $y_1 = 29$, amikor is $b_1 = 41$.

A következő lépésben megoldjuk az

$5z + 29 = 41x_2$

határozatlan egyenletet. Az egész megoldásokat keresve, kell hogy a

$$z = \frac{41x_2 - 29}{5} = 8x_2 - 5 + \frac{x_2 - 4}{5}$$

egyenletben a $t = (x_2-4)/5$ egész szám legyen, tehát az

$x_2 = 5t + 4$

egyenletben válasszuk t értékét olyan, lehetőleg kis egész számnak, amelynél z, majd b_2 pozitív egész számok lesznek. Legyen ezért:

$t = 0$, $x_2 = 4$ és $z = 27$.

Az utasítás harmadik lépéseként:

$$b_2 = \frac{z^2 - a}{b_1} = \frac{27^2 - 32}{41} = \frac{729 - 32}{41} = 17.$$

Most meggyőződhetünk arról, hogy az

$y^2 = 32x^2 + 17$

egyenlet két gyöke:

$x_2 = 4$, $y_2 = 23$, és itt $b_2 = 17$.

Ismételjük meg az eljárást a megoldás második lépésétől kezdve, azaz keressük meg az

$x_2z' + y_2 = b_2x_3$

egyenletnek megfelelő, azaz a jelen esetben a

$4z' + 23 = 17x_3$

határozatlan egyenlet alkalmas gyökeit! Az egyenletből

$$z' = \frac{17x_3 - 23}{4} = 4x_3 - 5 + \frac{x_3 - 3}{4}.$$

Kell, hogy $t = (x_3-3)/4$ egész szám legyen, ezért az

$x_3 = 4t + 3$

összefüggésben a *t*-t alkalmas, kis egész számnak választjuk. Legyen

$t = 0$, és ekkor $x_3 = 3$, $z' = 7$.

Ez a választás azért szerencsés, mert így

$$b_3 = \frac{49 - 32}{17} = 1.$$

Elérkeztünk tehát oda, hogy az

$y^2 = 32x^2 + 1$

egyenlet egyik megoldáspárját megtalálhatjuk. Ha ugyanis az

$x = x_3 = 3$, akkor $y = 17$.

Az indiai matematikusokhoz kapcsolódik még az a gondolatmenet is, amellyel a Pell-egyenleteknek nem az egész, hanem a racionális megoldásait keresték.

Tegyük fel eszerint, hogy két tetszőleges x_0 és y_0 értékre igaz, hogy

$ax^2_0 - y^2_0 = b_0$,

ahol b_0 az x_0 és y_0 megválasztásától függ. Alakítsuk most az

egyenlet bal oldalát szorzattá:

$(x_0\sqrt{a}+y_0)(x_0\sqrt{a}-y_0)=b_0$.

Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$(ax_0^2+y_0^2+2x_0y_0\sqrt{a})(ax_0^2+y_0^2-2x_0y_0\sqrt{a})=b_0^2.$$

Innen:

$$(ax_0^2+y_0^2)^2-a(2x_0y_0)^2=b_0^2.$$

Végül osszunk b^2_0-tel:

$$\left(\frac{ax_0^2+y_0^2}{b_0}\right)^2=a\left(\frac{2x_0y_0}{b_0}\right)^2+1.$$

Eredményünket összehasonlítva az $y^2=ax^2+1$ egyenlettel, kitűnik, hogy az

$$x=\frac{2x_0y_0}{b_0},\quad y=\frac{ax_0^2+y_0^2}{b_0}$$

értékpár kielégíti az $y^2=ax^2+1$ egyenletet.

Az elmondottakból megállapítható, hogy az ókori, középkori hindu matematika geometriai része az egyszerű gyakorlati élethez kapcsolódott, viszont az algebrai módszereket jelentős mértékben fejlesztették, főleg az egyenletmegoldási eljárásokkal. Kár, hogy az a nagyfokú bizonyítási igény, amely a kortárs görögöknél már természetes, a hinduknál nem talált követésre. Szinte visszaestek az egyiptomi, a babiloni és a kínai receptgyártáshoz, a magyarázatokat teljesen mellőzve. Habár módszereiknek kétségen kívül meglehetett a logikai alapja, de ennek közlése nélkül ma úgy látszik, hogy matematikájukban sok az intuitív tényező. Ennek persze az is oka lehet, hogy olyan mélyen látták, átértették azokat a fogalmakat, amelyekre alapoztak, hogy sokszor a részletes logikai lépések megtétele nélkül is mintegy

előugrottak az eredmények.

Valamivel kiegészül a hindu matematikáról alkotott képünk, ha megemlítjük, hogy matematikusaik tisztában voltak a számtani sorozat összegzésével, meg tudták határozni az első n természetes szám négyzetösszegét, és ismerték a Pascal-háromszöget is. A legáltalánosabban ismert érdemük az, hogy összeolvasztották a 10-es számrendszer, és a helyi érték fogalmát a nulla használatával, és így az arabok közvetítésével és számjegyformálásával Indiából indulhatott diadalútjára a számoknak a helyi értékes 10-es számrendszerben való írásmódja, és ezáltal ugrásszerűen megkönnyebbedett az alapműveletek írásban való elvégzése.

SRÍNIVÁSZA AIJANGÁR RAMANUDZSAN (1887-1920)

Bhászkara után kereken 700 év telt el, míg India földjén említésre méltó, nagy matematikus született. Ez ugyan az időben igen nagy ugrás, de mert a hindu matematikáról később már nem lesz szó, most ragadom meg az alkalmat, hogy egy csodálatosan tehetséges, a hindu lélek minden tulajdonságát hordozó, eredetiségben is párját ritkító hindu matematikusról megemlékezzem. **Ramanudzsan** apja Brit India Madrász tartományában egy szegény bráhmi posztókereskedő, anyja pedig szintén bráhmi kishivatalnok lánya volt. Sokáig nem született gyermekük, és ezért az asszony apja buzgó imával kérte a szomszédos Namakal város jószívű istenét, Namagirit, hogy leányát ajándékozza meg gyermekkel. Namagiri megszánta az imádkozó apát, és nem sokkal később megszületett **Srínivásza Ramanudzsan. Í**gy mesélte el **Ramanudzsan** születését a nagy matematikus első életrajzírója és barátja, a hindu **Seshu Aijar.**



Srínivásza Aijangár Ramanudzsan

A fiúcska szülővárosában, Tanjorében végezte elemi tanulmányait, majd 7 éves korától Kumbakonam városban tanult, az ottani középiskolában. Tanárait és tanulótársait nemegyszer ejtette csodálatba bámulatos memóriájával. Hosszú számsorokat vagy számára érthetetlen szanszkrit szövegeket képes volt minden erőlködés nélkül hibátlanul felidézni. 15 éves korában egy matematikakönyv került a kezébe, amely olthatatlan érdeklődést keltett benne. A könyv elolvasása - minden segítség nélkül -, komoly felfedező munkát jelentett. Hatására először algebrával kezdett foglalkozni, és kiváló érzékkel, szinte teljesen intuitív úton számos eredménye született, amelyeket csak később igazolt. Azt állította, hogy álmában Namagiri isten súgja meg matematikai tételeit, és neki nincs más dolga, csak az, hogy felébredve lejegyezze és igazolja azokat. 16 éves korában érettségizett. Ekkor a továbbtanuláshoz ösztöndíjat kapott, amit azonban már az első vizsgáján elveszített, mert angolból nem felelt meg, mivel csak szerelmével, a matematikával foglalkozott.

Ezután - nyomorúságos körülmények között - matematikai kutatásokba kezdett. Alkalmi munkákkal csak annyit igyekezett keresni, amennyi szerény élelmére kellett. Minden időt sajnált, amit nem a matematikával töltött. Amikor azonban 1909-ben megnősült, állás után kellett néznie. Egyik barátja ajánlotta be a matematikáért rajongó számvevőnek, **Ramacsandra** RAÓnak, aki azonban nagyon vegyes érzelmekkel fogadta a borotválatlan, faragatlan modorú, rendetlen külsejű fiatalembert. Az első alkalommal, amikor az ifjú két agyonrongyolt füzetéből magyarázni kezdett, a derék számvevő semmit sem értett, de mert lelkiismeretes ember volt, nem akarta vendégét végleg elutasítani. A következő alkalommal **Ramanudzsan** is észrevette, hogy reménybeli pártfogója nem tudja követni, azért beszélgetésüket a legegyszerűbb eredményeinek bemutatásával kezdte. **Ramacsandra** nemcsak a magyarázatot értette meg, hanem azt is, hogy egy kivételes tehetséggel hozta össze a sors, sőt Madrász városban szerény állást is szerzett számára, amely mellett még matematikával is tudott foglalkozni.

Ramanudzsan, barátai biztatására, 1913 januárjában levéllel fordult a cambridge-i Trinity College akkor már híres professzorához, **Godfrey Harold Hardyhoz.** Levelében a következőket írta:

„Bemutatkozom önnek, mint a Madras Port Trust hivatalnoka, évi 20 font fizetéssel. 23 év körüli vagyok. Egyetemi képzésben nem részesültem, de a szokásos iskolákat elvégeztem. Iskoláim után, szabad időmben matematikával foglalkoztam. Nem mentem át a szabályszerű, konvencionális fokozatokon, amelyek az egyetemi kurzusokon szokásosak, de rábukkantam egy nekem való ösvényre. Különleges vizsgálatokat végeztem általában a divergens sorok területén...

Szeretném kérni, hogy nézze át a mellékelt írást. Szegény lévén, ha ön úgy véli, hogy írásomban van valami érték, akkor szeretném eredményeimet publikálni. Nem adtam meg levezetéseket, de jeleztem az utat, amelyen jártam. Tapasztalatlan lévén, nagyra értékelném véleményét. Végezetül bocsánatot kérek a zavarásért."

Ramanudzsan levelében elküldte HARDYnak 120 új vagy újnak vélt

tételét. Hardy először szélhámosságra vagy beugratásra gondolt, de az ifjú hindu szerencséjére ő is lelkiismeretes ember volt, és a közölt eredményeket alaposan átvizsgálta. Ennek az lett a következménye, hogy RAMANUDZSANt meghívta Cambridge-be. A Ramacsandra által kijárt ösztöndíj lehetővé tette az utazást, és Ramanudzsan 1913 májusában megérkezett Angliába. Hardy nagyon tapintatosan kezdett foglalkozni ezzel a hindu őstehetséggel, akinél a ragyogó eredmények mellett elképesztő hiányokat is felfedezett. Úgy tanította Ramanudzsaní, hogy - Hardy szavaival élve - ő maga talán még többet tanult tanítványától. Különösen a számelmélet területén volt gyümölcsöző a két tudós közös munkája. Ennek több önálló és közös cikk lett az eredménye.

1917-ben azonban Ramanudzsan megbetegedett és kórházba került.

Csak 1918 őszére jött olyan állapotba, hogy ismét rendszeresen dolgozhatott. Betegsége időszakában történt, hogy **Hardy,** amikor egyszer meglátogatta, megjegyezte, hogy az 1729-es számú autóbuszon utazott, és ez a szám valahogy elkedvetlenítette. **Ramanudzsan** így vigasztalta: Az 1729 egyáltalában nem baljós szám, sőt van egy roppant érdekes tulajdonsága, az, hogy ez a legkisebb szám, amely kétféleképpen bontható két köbszám összegére (1^3+12^3 és 9^3+10^3). Ez a rá oly jellemző megjegyzés mutatja, hogy a természetes számok - amint ezt **John Edensor Littlewood** egyszer megállapította - személyes jó barátai voltak.

1918-ban a Royal Society tagjául választotta, és a Trinity College tanárának hívta. A félig gyógyult tudós azonban, amikor tudományos munkái már mindenütt elismerésre találtak és szinte valamennyi jelentős tudóstársaság igyekezett tagjává választani, 1919-ben hazament Indiába. Angliába visszatérni már nem tudott. Ebben megakadályozta a következő évben bekövetkezett halála.

Módszereit tekintve szokatlan volt káprázatos számolási készsége, gyorsasága és biztossága, hihetetlenül jó memóriája, valamint páratlanul fejlett általánosítási érzéke. Különösen az analitikus számelmélet és az analízis területén ért el kiugró eredményeket. A számelméletben érdekelte a prímszámoknak a természetes számok közti eloszlása. Kereste azokat a számokat, amelyek négyzetszámok összegeként állíthatók elő. Foglalkozott a

hipergeometriai sorok elméletével, a lánctörtekkel, a divergens sorok összegzésével, határozott integrálok kiszámításával, az elliptikus és a moduláris függvények elméletével. Sok jelentős és meglepő felfedezésének jellemzésére kiragadunk egyet:

Tekintsük az

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}+\ldots$$

végtelen sort és az

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\ldots}}}}$$

végtelen lánctörtet. Külön-külön egyik sem hozható összefüggésbe sem π-vel, sem az *e* számmal, de **Ramanudzsan** igazolta, hogy összegük éppen

$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

AZ ARABOK

A KULTÚRAMENTÖ ARABOK

A filozófia és a természettudományok területén a VI. és XIII. század közötti araboknak jutott az a kultúrtörténeti szerep, hogy a görög és hellenisztikus tudomány értékeit átmentsék
Európába. Tevékenységük azonban nem szorítkozik pusztán a közvetítésre. A hellenisztikus szemlélettől igen eltérő világnézetű arabok a görög kultúrát nemcsak átvették, hanem módosították is, továbbfejlődésre alkalmassá tették azzal, hogy igyekeztek elkerülni azokat a buktatókat, „dogmákat”, amelyek a görög tudományos gondolkozás korlátait jelentették. Így például elvetették az eleai filozófia hatása alatt kifejlődött számfogalmat (172. oldal), és ezzel szükségtelenné vált a matematika teljes geometrizálása, tehát út nyílt az aritmetika és az algebra továbbfejlődése előtt. A kémia kibontakozását sem akadályozta tovább például a kézművesmunka lebecsülése, tehát az arab vegyészek lényeges szerepet biztosíthattak a kísérletezésnek.

Az arabok elsősorban a görög filozófiai, csillagászati és orvosi munkák iránt érdeklődtek. A filozófiát sokan megkísérelték a valláshoz idomítani **(Ibn Rusd),** mások (például **al-Gazáli)** tiltakoztak ez ellen. Az előbbiek a filozófia fejlődését tették lehetetlenné, az utóbbiak számára pedig két igazság létezett: az egyik a vallási hit igazsága, amellyel nem lehetett vitába szállni, a másik pedig az értelem igazsága. Végeredményben mind a két irányzat megmerevedést eredményezett, ami elkerülhetetlenül kulturális hanyatláshoz vezetett. Az arabok csillagászati érdeklődése sürgette a görög matematikai ismeretek felújítását és természetesen a csillagászati megfigyelések folytatását. Az orvostudományban szükségessé vált a kémia **(Ibn Dzsábir,** lepárlás) és az optika **(Alhazen).** Főként a kémia területén értek el a klasszikus eredményeket túlszárnyaló, új felfedezéseket. Az életelixír keresése mellett már ipari méreteket öltött például a szóda, a timsó és a salétrom gyártása.

A klasszikus képzőművészet és irodalom az arabokat nem érdekelte.

Vallásuk tiltotta az emberábrázolást, ezért a klasszikus szobrászat, festészet nekik nem felelt meg. Mondákban, legendákban gazdag irodalmuk pedig feleslegessé tette, hogy a görög-római irodalomból merítsenek. A klasszikus művészetet nem ők, hanem az európai reneszánsz fedezte fel, arab közvetítés nélkül. Az, hogy a klasszikus kultúra ún. humán és reál értékei más-más úton és időben hatoltak be Európába - legalábbis részben -, oka lett a kétféle kultúra elkülönülésének, amely napjainkra már-már tragikus méreteket öltött.

A középkori arabok a görög mellett kínai és indiai műveket is fordítottak, így elsőként ötvözhették a hellén és a távol-keleti tudományok eredményeit és módszereit. A görög civilizáció és kultúra jórészt csak a Földközi-tenger környékét fogta át, viszont az arab művelődés a mai Spanyolországtól egészen Kínáig terjedt. Az akkor ismert világ számára az arabok tették igazán egyetemessé a művelődési alapokat. Nagy kár, hogy az arabra átültetett kínai és indiai műveket nem követték latin fordítások, és így azok Európa kultúrájától idegenek maradtak.

RÖVID TÖRTÉNELMI VÁZLAT

Az V. és VI. században, **Mohamed** fellépése előtt az arabok nem éltek egységes államkötelékben. Az analfabéta, nomád beduin törzsek a mai Arab-félszigeten, a „Boldog Arábiá”-ban (Arabia Felix) kóboroltak. Rabló kalandozásaikkal állandó rettegésben tartották a környező népeket, és ugyanakkor napirenden voltak az egymás közötti csatározások is. Ez a törzsekre tagolódott, önmagát is irtó nép az akkor már kialakult erős államok gyűrűjében előbb-utóbb menthetetlenül valamelyik szomszédjának zsákmánya lett volna. Igaz, a nomád arab törzseket ekkor még elválasztotta a szomszédoktól az arabság letelepedett része, amely a VI. század elején már igyekezett békés kereskedőéletet élni. Ez azonban valójában az arabok még nagyobb mérvű megosztottságát is jelentette.

240. ábra

Ilyen helyzetben kezdte terjeszteni vallási tanait az 570 táján Mekkában született **Mohamed.** Utazásai során érintkezésbe került keresztényekkel és zsidókkal is. Ezek tanításaiból ötvözte

össze az iszlám néven ismert vallást, amelynek lényege az egyistenhit: „Egy az Isten: Allah”, és természetesen „Mohamed az Ő prófétája”. Az iszlám kezdetben türelmes vallás volt, kiváltképpen a zsidókkal és a keresztényekkel szemben. Bölcs erkölcsi törvényei közül az arabságra nézve különösen fontos a vérbosszú eltörlése, amely az arab törzsek közti ellentét fő oka volt. **Mohamed** diplomatikusan tanai közé vett számos olyat, amely kedvezett a gazdagoknak, például megengedte a többnejűséget. A szegényeket pedig megnyerte azzal, hogy Allah előtt mindenki egyenlő. Híveinek száma Mekkában rohamosan nőtt, annyira, hogy kihívta a hatalmukra féltékeny vezetőség haragját. **Mohamed** 622-ben kénytelen volt Medinába menekülni. Ekkortól kezdődik a mohamedán időszámítás annak megfelelően, hogy valóban ez a dátum jelzi az arab világhatalom kezdetét. Az elűzött próféta Medinában már nem a békés fantasztának mutatkozott, hanem rövid idő alatt híveiből ütőképes hadsereget szervezett, és meghirdette a szent háborút, amelynek végső célja minden arab megtérítése volt. A Paradicsom ígéretével fanatizált hívők egymás után hódították meg a csak önmagukra utalt törzseket. A közös vallás, amely minden hívének kötelességévé tette az igaz hit terjesztését, megteremtette az arab egységet, mégpedig a folytonos harcokban megedzett, hadseregére is bizton számító arab államot, amelynek minden polgára szent feladatának tekintette hitének, ha kell, akár erőszakos úton való terjesztését is. Amikor **Mohamed** 632-ben váratlanul meghalt, már Bizánc meghódítását tervezték. Ez ugyan elmaradt, de **Mohamed** utódai, a kalifák egymás után hajtották uralmuk alá Szíriát, Mezopotámiát és Egyiptomot.

Az arabok 641-ben birtokukba vették a tudományok és a művészetek egykor oly csodálatos fellegvárát, Alexandriát is. A hódító háborúk e korszakában még nyoma sem volt az arabok kultúrszomjának. Az Alexandriát elfoglaló **Omar** kalifa azzal tette nevét hírhedtté, hogy elrendelte a Nagykönyvtár anyagának elégetését. Szállóigévé vált e rendeletének indoklása: A könyvek tartalma vagy megegyezik a *Korán*nal, és akkor feleslegesek, vagy ellenkezik vele, akkor pedig károsak. így elégetésük mindenképpen indokolt. A könyvek állítólag hónapokon át melegítették a közfürdők vizét, ami azonban nehezen hihető, hiszen **Julius Caesar** i. e. 47-ben már felgyújtatta a könyvtárat, 390-ben pedig **Cirill** szerzetesei dúlták fel a pogány tudományok e kincsesházát. **Omar**

közfürdői számára már nemigen jutott tüzelő a valamikor 700 000 művet számláló könyvtárból.

A VII. és VIII. században a hódító háborúk sikeresen folytatódtak, és az Arab Birodalom az Omajjád kalifák alatt elérte legnagyobb kiterjedését az Ibér-félsziget déli részétől Egyiptomon, Perzsián át Indiáig. Ennek az óriási birodalomnak az egysége nem politikai, hanem sokkal inkább gazdasági alapokon nyugodott, amelyet mindinkább átfogott a kialakuló arab kultúra. Az arabok a meghódított területeken meghagyták a közigazgatási apparátust, és a különböző egyházak is folytathatták tevékenységüket. Megmaradtak a szír, örmény, keresztény és zsidó egyházi vezetők is. Az arab nyelvet azonban mindenütt beszélték, a vezető réteg tagjai feltétlenül. Az „arab csoda" azonban nem is ennek a hatalmas birodalomnak a megteremtése volt, amelynek kereskedői a legkülönfélébb árukat szállították Kínától Hispániáig és Perzsiától Madagaszkárig, hanem az a csodálatos tudásszomj, amellyel a hódítók hihetetlenül rövid idő alatt magukévá tették a meghódított népek kultúráját. Birodalomszerte hatalmas, virágzó kultúrcentrumok létesültek: A Babilon közelében megépült Bagdad, azután Mekka, Szamarkand, Kairó, Córdoba, Toledo, Sevilla, hogy csak a legnagyobbakat említsük. Itt mindenütt könyvtárak, egyetemek, csillagvizsgálók működtek.

Kezdetben a tudományos művek arabra fordítását szorgalmazták. Már 766-ban *Szinhind* néven elterjedt az Indiából átültetett két csillagászati mű, a *Szúrja Sziddhánta* és a *Brahmasphuta Sziddhánta.* Ezeket 733-ben **al-Fázári** fordította arabra. Ugyanebben az időben látott napvilágot **Ptolemaiosz** asztrológiai művének, a *Tetrabüblosznak* a fordítása is. **A** fordítási láz még akkor is tartott, amikor a VIII. században már jelentkeztek az Arab Birodalom felbomlásának jelei. **Mohamed** írásban nem rögzítette tanait, és csak halála után született meg az iszlámnak a dogmákra, az életvitelre és az erkölcsi magatartásra vonatkozó törvénygyűjteménye, a *Korán.* E vallási törvénykönyvnek azonban éppen az erkölcsi szabályait sokféleképpen lehetett magyarázni, és emiatt az iszlám világban ellentétek, majd szakadások léptek fel. Amint a történelemben mindig, akkor is, az elvi ellentétek valójában különböző csoportok hatalmi törekvéseit leplezték. Horászánban, Irán keleti részén kitört a síita (szakadár) felkelés.

Ennek gyakorlati eredménye az lett, hogy egyetlen kivétellel kiirtották az Omajjád-dinasztia minden tagját. **A** megmenekült szerencsés a birodalom másik felében, Hispániában megalapította az első, a többitől független arab államot. **A** kiirtott Omajjádok helyét **Mohamed** nagybátyjának egyik leszármazottja, **Abul-Abbász** foglalta el. Az Abbászida kalifák erős zsoldos hadsereget szerveztek. Ez biztosította hatalmukat, és a jól megszervezett hivatali apparátus. Új fővárosukban, Bagdadban összegyűjtötték Szíria és Irán összes tudósát, de szívesen fogadták a zsidó és a nesztoriánus keresztény tudósokat is.

A nesztoriánusoknak különösen fontos szerep jutott a klasszikus eredmények átültetésében. Még az V. század elején **Nestorius** Szíriai szerzetes azt tanította, hogy KRISZTUSban egyszerre van jelen az isteni és az emberi természet, és hogy MÁRIÁtól csak az utóbbit örökölhette, tehát **Mária** nem lehet anyja Isten fiának, azaz a Krisztus-Istennek. Ezért a HÜPATIÁt megölető **Cirill** előterjesztésére 431-ben az ephezoszi zsinat **NESTORIUSt** és követőit, a nesztoriánusokat eretnekeknek nyilvánította. A nesztoriánus eretnekség mögött tulajdonképpen a Bizánci Császárság-ellenes szír nemzeti mozgalom bújt meg. **Nestorius** követői az üldöztetés elől Perzsiába, Káldeába és Indiába menekültek, sőt néhányan Kínában kötöttek ki. Az Abbászidák nemcsak megtűrték a nesztoriánusokat, hanem főleg csillagászati és orvosi ismereteik miatt nagy megbecsülésben részesítették őket. A nesztoriánus telepek a gundisapuri királyi udvar közelében épültek fel, és így tudósaik a csillagvizsgálót is használhatták. Tulajdonképpen ők kezdték meg a görög auktorok fordítását az arabokéval rokon szír nyelvre, ahonnan az arab fordítók már könnyen átvehették. A nesztoriánusoknak tehát kétségkívül volt a görög hagyományok terjesztésében egy nagyon megbecsülendő katalizáló ténykedése. Jelentősen meggyorsították a görög szerzők arabra való fordítását. Hasonló szerep jutott az athéni filozófiai iskola utolsó tudósainak is, miután 529-ben Jus**tinianus** Akadémiájukat bezáratta. Ők is keleten kerestek és kaptak menedéket. Az arabok tehát birodalmuk keleti felében, de Egyiptomban is számos görög kulturális magot találtak, amelyek nagyban elősegítették a hellén műveltség átvételét.

Az Abbászida kalifák (750-833), köztük különösen **al-Manszúr,** az

Ezeregyéjszaka meséiből ismert és népszerű **Harun al-Rasíd,** majd **al-Mámún,** Bagdadban létrehoztak egy új Alexandriát. **Al-Mámún** a fővárosban felépítette a Tudomány Házát (Bait al Hikma), ahol az alexandriai Muszeion mintájára nagy könyvtárat rendeztetett be, és összegyűjtötte korának legnagyobb tudósait. Különösképpen pártfogolta a görög művek fordítását. A legenda szerint, egyszer álmában megjelent neki **Arisztotelész.** Akkor felébredve megfogadta, hogy minden elérhető görög művet lefordíttat arabra. A kalifa jó érzékkel választotta az első lefordítandó művek közé **Ptolemaiosz** *Megalé szüntaxiszá*t - amely éppen az arab fordítástól nyerte a végleges *Almageszt* címet (263. oldal) - és **Eukleidész** *Sztoikheiáját.* A szomszédos Bizánci Császárság készségesen támogatta a vele békességben élő kalifa kulturális törekvéseit.

Az Abbászidák azonban szintén nem tudták kiküszöbölni a belső villongásokat. A birodalomban az egyik felkelés a másikat követte. Ezek fő oka a parasztság és a városi szegénység nyomora volt. A sorozatos lázongások elnyomása meglehetősen nagy katonai erőket kötött le. Így vált lehetővé, hogy akkor, amikor a spanyolországi Andalúzia Omajjád uralom alá került, a berber Magreb is leszakadt a birodalom testéről, majd nemsokára Tunisz is önállósította magát. A kalifák mindinkább kényszerültek a török zsoldosokra támaszkodni, ugyanakkor az egyre zsugorodó kalifátus mind kevésbé tudta azok követeléseit teljesíteni. Végül is egyfajta katonai arisztokrácia nőtte ki magát, amely egész tartományokat kerített hatalmába. A X. században az Arab Birodalom három részre szakadt, ami alkalmat adott a Bizánci Császárságnak arra, hogy elfoglalja Szíriát. Ekkor kellett onnan a nesztoriánusoknak is menekülniük.

A részekre hulló arab állam nem tudott ellenállni a török hódításoknak. Az egyik török fejedelem Irán keleti határán erős, feudális jellegű országot hívott életre Gazna központtal. A Gaznavidák alatt azonban az iszlám kultúra még nagy fellobbanással virágzott. Ebben a korszakban élt **Ibn Szína (Avicenna,** 980-1037), a híres orvos és természettudós, **Eukleidész** és **Arisztotelész** egyik fordítója. Kortársa volt az ugyancsak Gaznavida pártfogásban álló **al-Bírúni,** a nagy geográfus, csillagász és matematikus. Ekkor írta **Firdauszi** (932-1021) a csodálatos *Sáhnámét.*

1039-ben **(I. István** királyunk halála utáni évben) a szeldzsuk törökök uralma még egyszer nagy területen egyesíteni tudta a felbomló iszlám birodalmat, de már utoljára. A széthullási folyamat csak átmenetileg állt meg. A XII. századra már nagyjából körvonalazódtak azok az egymástól független, önálló arab államok, amelyek a mai térképeken is megtalálhatók.

AZ ARAB MATEMATIKA KORSZAKAI

Az előző részben vázolt történelmi keretben működtek az arab matematikusok is. Egy tudomány fejlődésében a korszakokra bontás mindig egy kicsit erőltetett, de a nagyobb áttekinthetőség kedvéért az iszlám matematika fejlődésében nagyjából 4 korszak különíthető el:

1. A görög, egyiptomi, mezopotámiai és indiai hagyományok összegyűjtése és azok arabra fordítása igénybe vette a VIII. századot, súllyal az Abbászida-kort. A bagdadi Tudomány Házában könyvtár, csillagvizsgáló állt a kutatók rendelkezésére. Az Ibér-félszigeten Córdoba a tudományos központ.

2. A IX. században megkezdődik a lefordított művek kommentálása, egyben azok alapján sajátos arab színezetű fejlődés indult meg. A kor kiemelkedő matematikusai: **al-Hvárizmi, al-Kindi, Szábjt ibn Kurra, al-Mahani.** Fejlődik az aritmetika, a geometria, a trigonometria, az algebra és a közelítő számítások módszere.

3. A X-XII. században a csillagászattal összefüggésben az érdeklődés a trigonometria és a közelítő számítások felé fordul, de tovább fejlődik az algebra is. A korszakot fémjelző matematikusok: **Abul-Vafa, al-Karadzsi, al-Bírúni, Omar Hajjám, Abu Kámil** és **al-Battáni.**

4. A XIII-XV. században igen erős kínai hatás alatt, főleg a numerikus módszerek jöttek előtérbe. Az ekkori kiváló matematikusok: **at-Túszi, al-Karhi, al-Magribi, Ibn al-Haiszam** és **al-Kalaszádi.**

AZ ARAB MATEMATIKUSOK

AL-HVÁRIZMI, MUHAMMAD IBN MÚSZA (800 előtt-850?)

A Tudomány Házában számos csillagász és matematikus között dolgozott **al-Hvárizmi** is. Amint a neve is jelzi, Hvárezm (Horezm) városban született, a mai Üzbég Köztársaság területén (Híva). Ez a perzsa-arab tudós több mint fél tucat csillagászati és matematikai művet hagyott hátra. Csillagászati munkái között vannak táblázatok és értekezések. Írt tanulmányt a napóráról és az asztrolábiumról.

Az asztrolábium, amelyet planiszfériumnak is neveznek, az arabok jellegzetes csillagászati eszközévé vált. Valószínűleg Hipparkhosz találta fel, de sokan APOLLÓNIOSZnak tulajdonítják ez érdemet (137. oldal). Megszerkesztésénél mindenesetre közrejátszott az **Apollóniosz** által felfedezett sztereografikus projekció, amely pontból síkra való szögtartó leképezés (267. oldal). Az asztrolábium az armillagömb (sphaera armillaris, abroncsos gömb) leképezése. Ez egy, a Földet modellező gömb, amelyet különböző gyűrűk rendszere vesz körül. Ezek a gyűrűk az ekliptikát (égi egyenlítőt), a hosszúsági és a szélességi köröket ábrázolják. Az armilla-gömböt **Hipparkhosz** már használta és a XVI. században **Tycho Brahe** tökéletesítette. Ebből úgy nyerték az asztrolábiumot, hogy vetítették sztereografikus projekcióval egy meghatározott földrajzi szélességi kör síkjára. Így tehát minden szélességi körhöz más-más asztrolábiumkorong tartozik. Az így kapott eszköz egy forgatható tárcsáján (rete) láthatók az állatövi képek egy-egy fényesebb csillaggal. A műszer része még egy cserélhető tárcsa a magassági körökkel, és egy kétnézőkéjű forgatható átmérő (mutató), amellyel az égitestek magassága mérhető. Az asztrolábium segítségével megállapítható többek közt az északi irány és a földrajzi hosszúsághoz tartozó pontos idő, valamint az égitestek magassági és szélességi adata. Az arabok főleg az irány- és az időmeghatározásra használták, hiszen a hatalmas területű birodalomban meghatározott időkben és Mekka felé fordulva kellett a kötelező naponkénti öt imát elmondani.

A matematikatörténet szempontjából AL-HVÁRIZMInek két fontos művét kell megemlítenünk. Az egyik csak latin fordításban maradt ránk, címe: *De Numero Indorum* (A hindu számokról). Ebben a szerző feltehetően **Brahmagupta** művére támaszkodva ismerteti a

helyi értékes 10-es számrendszerű számírást és a vonatkozó műveleti szabályokat. A latinra fordítás felületessége miatti szótorzítás következtében a könyv címe előtt szereplő szerző neve **al-Hvárizmi**ről algorithmusra változott. Az algoritmus szó, ez az elferdített név ma már nem a könyv írójának a nevét idézi, hanem így hívnak minden, valamely előírt módon és sorrendben végrehajtandó számolási eljárást, például a legnagyobb közös osztó kiszámítására szolgáló euklideszi algoritmust. **Al-Hvárizmi** könyvének nyomán terjedt el az a vélemény, hogy a helyi értékes 10-es számrendszert a szerző találta fel, bár erre ő nem tartott igényt. A mű hatását mutatja az is, hogy számos európai nyelvben valamilyen formában meghonosodott az arab zifr szó, amelynek jelentése: üres, semmi, nulla. Amint említettem (362. oldal), innen ered a mi cifra szavunk is. A hindu-arab számírást két jól követhető úton a *De Numero Indorum* indította el. Az egyik a spanyolországi arab egyetemeken át vezetett, a másik pedig az akkor arab kézen levő Szicíliától Itálián át hatolt északra. Ezzel kapcsolatban már említettük a francia **Gerbert** (359. oldal) nevét, de fontos szerepet töltött be e téren a bathi **Adalbert** (Adelard, 1090?-1160?) is. Ez a spanyolországi zsidó tolmács álruhában látogatta az arab egyetemeket, és számos arab munkát fordított latinra, köztük al-Hvárizmi könyvét is.

Az arab matematikus másik nevezetes munkája az egyetlen olyan, amely arab nyelven maradt meg. A címe: *Kitáb al-dzsabr valmukábala,* azaz *A helyreállítás és az egyszerűsítés könyve.* A dzsabr (kiegészítés, helyretétel) szó megfelel annak a műveletnek, amellyel az egyenletben egy tagot „átviszünk” a másik oldalra. A mu-kábala az egyszerűsítést, az összevonást jelenti. Amint AL-HVÁRIZMI neve önálló életet kezdett élni az algoritmus szó formájában, úgy alakult át a névelőjével együttes al-dzsabr szó algebrává, ami sokáig a matematika egyenletekkel foglalkozó ágát jelölte, ma pedig inkább az algebrai struktúrákkal foglalkozó tudomány. A *Liber algebrae et almucabola* latin cím elárulja, hogy a fordító nem volt egészen tisztában a dzsabr és a mukábala szavak értelmével, és azért meghagyta azokat nagyjából eredeti alakjukban. A könyv hatását jól érzékelteti az algebra szó szépirodalmi pályafutása. CERVANTES (1547-1616) *Don Quijote* című regényében az író algebristának nevezi a sebészt, aki a sérült csontokat „helyére rakja”.

AL-HVÁRIZMInek ez a 825-ben megjelent algebrakönyve elsődlegesen hindu hatást mutat, főleg BRAHMAGUPTÁt juttatja eszünkbe. Vannak azonban olyan részei, különösen a geometriai jellegű szemléltetések vagy inkább megokolások, amelyek kétségkívül görög befolyásról árulkodnak. Ezek a hatások valószínűleg erősen áttételesek lehettek. Erre következtethetünk abból, hogy al-Hvárizmi egyáltalában nem használ szimbólumokat sem Diophantosz példájára, sem úgy, ahogyan Brahmagupta élt velük. Teljesen visszatért az ún. retorikus algebrára, azaz mindent szavakkal fejezett ki, semmilyen jelet nem használt, sőt gyakran még a számokat sem számjegyekkel, hanem betűkkel írta ki. Ez visszalépést jelent akár DIOPHANTOSZhoz, akár Brahmaguptához képest. A könyvében tárgyalt problémák is egyszerűbbek a diophantoszi határozatlan egyenletekkel kapcsolatos kérdéseknél. Mindazonáltal al-Hvárizmi könyve az előbbiekhez képest fejlődést is mutat. Ez abban is megnyilvánul, hogy DIOPHANTOSszal ellentétben elfogadja a negatív megoldásokat is, bár a másodfokú egyenletek típusokra osztására azért van szüksége, mert itt nem veszi számításba a negatív együtthatókat. Amiben azonban DIOPHANTOSZt és a hindukat is igazán felülmúlja, az a megoldások megokolása, minden lépésének logikus következtetéssel való alátámasztása. Nemcsak egyedi megoldási eljárásokat ír le, hanem általános megoldási módokat dolgoz ki úgy, hogy minden mozzanatukat megmagyarázza, megérteti. Valószínűleg ez a fő oka annak, hogy algebrakönyve évszázadokon át az egyik legnépszerűbb matematikai mű volt.

AL-HVÁRIZMI *Algebrájának* latin fordítása - ebből hiányzik az eredeti mű előszava, amely dicsőíti MOHAMED prófétát és AL-MÁ**múnt,** a hithűség parancsnokát - azzal kezdődik, hogy bevezeti a gyök (x), a négyzet (x^2) és a szám (pozitív szám) fogalmát. Ezután következik hat kis rész, amelyekben a könyv írója sorra veszi az

$$ax=b,\ ax^2=b,\ ax^2=bx,\ x^2+bx=a,\ x^2+a=bx$$

és a

$$bx+a=x^2$$

egyenletek megoldásait. Amikor a negatív számok fogalma még

nem létezett, akkor az első- és másodfokú egyenleteknek valóban ezt a hat típusát kellett egymástól függetlenül tárgyalni. E hat eset különválasztása AL-HVÁRIZMInél azért feltűnő, mert ő már ismerte a negatív számokat, sőt a másodfokú egyenletek megoldásánál azt is észrevette, hogy abban az esetben, amikor az a mennyiség, amit ma diszkriminánsnak nevezünk, negatív, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Bizonyára a hat típust gépiesen vette át az elődöktől, és nem gondolt rá, hogy a negatív szám fogalmát és az azzal való számolási szabályokat felhasználva a többféle típus egységesíthető. Ez a jelentős lépés nála még elmaradt.

A másodfokú egyenletek megoldását általában a teljes négyzetté kiegészítés módszerére alapozza, amelyet konkrét példákon mutat be Ezek az egyenletek a mai jelölésekkel:

$x^2 + 10x = 39$,

$2x^2 + 10x = 48$

és

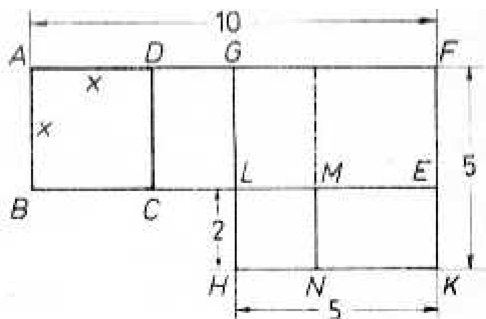
$1/2x^2 + 5x = 28$.

Mindegyiknél csak a pozitív megoldásokat veszi figyelembe. Ennek oka, amint alább majd meglátjuk, a geometriai megokolás.

Ez kiviláglik akkor, amikor a könyv ötödik fejezetében megoldja az

$x^2 + 21 = 10x$

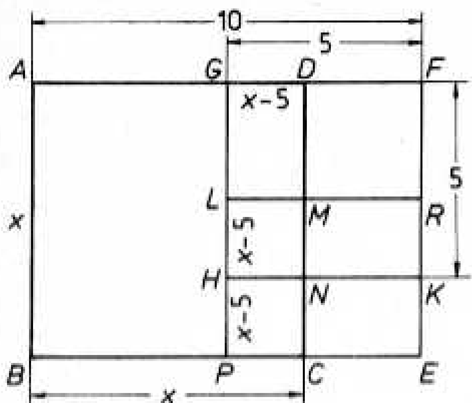
egyenlétet. Ennél feltünteti mind a két pozitív gyököt, tehát az előbbi egyenleteknél azért nem adja meg mind a két megoldást, mert csak az egyik pozitív. Ugyanakkor pontosan az ötödik fejezet idézett feladatánál jegyzi meg AL-HVÁRIZMI, hogy az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha az elsőfokú tag együtthatójának a felét négyzetre emelve nem kapunk kisebb számot, mint a konstans tag.



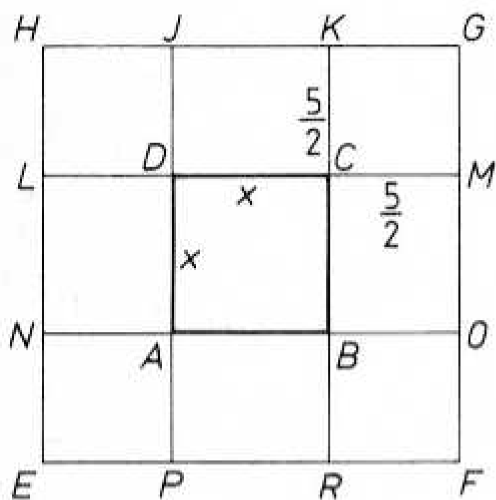
241. ábra

Az egyenlet megoldásának magyarázatára a következő geometriai interpretációt adja: Az egyenlet bal oldalát szemlélteti egy *x* oldalhosszúságú *ABCD* négyzettel és annak az egyik oldalához csatolt 21 területegységű *DCEF* téglalappal, ahol $DF > x$ *(241. ábra)*. Az $x^2 + 21$ tehát az *ABCD* négyzet és a DCEF téglalap területösszege, vagyis az *ABEF* téglalap területe, amely az egyenlet állítása szerint 10x, tehát az $AF = BE$ oldal hossza 10 egység. Rajzoljuk most meg az *AF* oldal felével, tehát 5 egységnyi oldallal a *GHKF* négyzetet, amelynek így a területe 25 egység. Tüntessük fel végül az *LHNM* kis négyzetet, amelyben $LM = LH = CL$.

Az *MNKE* és a *CLGD* téglalapok egybevágósága miatt a *GLMNKF* „gnómón” területe 21 egység, tehát az *LHNM* négyzet területe a *GHKF* négyzet területének és a gnómón területének a különbsége, azaz 25—21 = 4 területegység.



242. ábra



243. ábra

Ebből következik, hogy *LH* = *CL* = *2.* Ekkor már leolvasható, hogy *x* = *BC* = 5—2 = 3. (Lásd az elliptikus illesztést a 154. és 155. oldalon.)

Az egyenlet második gyökének a leolvasásához, illetőleg a számítás geometriai magyarázatához az előbbi ábrát módosítani kell *(242. ábra).* Rajzoljuk meg most is az x^2 területű *ABCD* négyzetet, és illesszük az egyik oldalához a 21 területű *DCEF* téglalapot, de most *DF* < *x.* E két terület összege, vagyis az *ABEF* téglalap területe 10x területegység. Ekkor pedig a téglalap *AF* = *BE* oldala 10 egység hosszú. Ennek *G* felezőpontjában emeljünk merőlegest az *AF* szakaszra, és rajzoljuk meg a *GHKF* négyzetet, amelynek területe 25 egység. Vegyük észre, hogy a *HPCN* négyszög négyzet, hiszen *PC* = *HP* = *x—5.* Vigyük be most ezt a *HPCN* négyzetet a *GHKF* négyzetbe úgy, hogy *LHNM* ≈ *HPCN* legyen, és végül hosszabbítsuk meg az *LM* oldalt R-ig.

A *GLMD* és a *CEKN* téglalapok egybevágósága miatt a *GLMNKF* gnómón területe akkora, mint a *DCEF* téglalapé, vagyis 21 területegység. Ilyen módon az *LHNM* négyzet területe 25—21 = 4 területegység, vagyis az egyik oldala 2 egység hosszú. A *HP* = *HL* = *2*

miatt: $x = GH + HP = 5 + 2 = 7$.

E két geometriai „magyarázat” talán megsejteti, hogy miért nem szerepelnek AL-HVÁRIZMInél a negatív gyökök. Ezekre nem tudott geometriai magyarázatot adni.

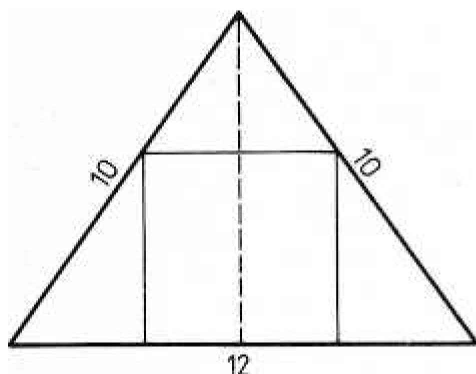
Tanulságos megfigyelni a teljes négyzetté kiegészítés geometriai alakját is. Erre példát mutat al-Hvárizmi az

$x^2 + 10x = 39$

egyenlettel kapcsolatban. Ezúttal az egyenlet bal oldalát, illetve az azt szemléltető területét úgy állítja elő, hogy az x^2 területű *ABCD* négyzetet körülveszi olyan egybevágó téglalapokkal, amelyeknek egyik oldala x, a másik pedig 5/2 hosszú *(243. ábra).* Ezeknek a négyzet oldalaihoz illeszkedő téglalapoknak a területösszege tehát éppen 10x. Így tudjuk, hogy a *JDLNAPRBOMCK* kereszt területe $x^2 +$ 10X, AMIRŐL AZ EGYENLET AZT ÁLLÍTJA, HOGY 39 TERÜLETEGYSÉG. HA MOST EZT A KERESZTET AZ ÁBRA SZERINT NÉGYZETTÉ EGÉSZÍTJÜK, VAGYIS A TERÜLETÉHEZ HOZZÁADUNK NÉGYSZER $(5/2)^2$, azaz 25 egységet, akkor a *HEFG* négyzet területe 39 + 25 = 64 területegység lesz. Ennek a nagy négyzetnek tehát egyik oldala 8 egység hosszú, amiből *x* értéke: 8—5 = 3. Ennél a geometriai „bizonyításnál” AL-HVÁRIZMI már nem tudta hasonló módon az egyenlet negatív gyökét, a (—13)-at távolságként előállítani, tehát csak az x = 3 megoldást találta meg.

Al-Hvárizmi *Algebrája az* egyenletmegoldások bemutatásán kívül még számos korabeli matematikai, illetve algebrai ismeretet közöl. Ezek között említendők a negatív, illetve az előjeles számokkal való számolás szabályai, és a kéttagú kifejezésekkel végzendő műveleti törvények. Az egyenletmegoldásokkal kapcsolatban kiemelendő, hogy azokat számos és változatos szövegű feladattal illusztrálja. Könyvében könnyű észrevenni idegen hatásokat, amelyek az akkori kozmopolita Bagdadban más területen is felfedezhetők, különösen a csillagászat, az orvostudomány, az alkímia és a filozófia területén. A görög műveket és ismereteket hozták nyugatról, főleg a nesztoriánus keresztények, Mezopotámia és India pedig igazán a szomszédban volt. **Al-Hvárizmi** tehát a legkülönbözőbb származású és típusú matematikai ismeretekből válogathatott. A kiválasztott anyagot aztán ügyesen, egységes szempont szerint elrendezte. A

számolási szabályokat, amelyek a helyi értékes 10-es számrendszeren alapultak, Indiából vette. Algebrájának témáját, a határozatlan egyenletekkel való foglalkozást görög és hindu példára kedvelte meg. Az egyenletek rendszeres tárgyalása részben mezopotámiai, részben görög hatást mutat. *Az* egyenletek megoldásának geometriai módja, a geometriai algebra tipikusan görög módszer. Főleg rendszeres tárgyalásmódja miatt, valamint azért, mert az egyenletek megoldását különválasztotta a matematika más tárgyköreitől, legalább annyira tekinthetjük az „algebra atyjának”, mint DIOPHANTOSZt, aki ezt a jelzőt azzal érdemelte meg, hogy megkísérelte az algebrai szimbólumok bevezetését, és egyenletekkel foglalkozott.



244. ábra.

A görög tudománynak Babilonba, illetve Bagdadba való áramlását nagyon meggyőzően bizonyítja az a példa, amelyet al-Hvárizmi tagadhatatlanul Hérón nyomán közölt. Még az e feladat szemléltetésére szolgáló ábra és az adatok is azonosak. A feladat egyébként azt kérdezi, hogy mekkora annak a négyzetnek egy oldala, amely olyan egyenlő szárú háromszögbe írható, amelynek alapja 12 és szára 10 egységnyi hosszú? A négyzet egyik oldala feküdjék az alapon (244. ábra). Al-Hvárizmi először Pitagorasz-tétellel kiszámította a háromszög magasságát, ez 8 egység. Ebből a háromszög területét 48 egységnyinek találta. E területet előállította úgy is, mint az eredeti háromszögben levő négyzet és a három háromszög területének az összegét. Tudva, hogy ez az összeg 48, a nyert egyenletből meghatározta az ismeretlen négyzetoldalt: 4 4/5.

Hérón és **al-Hvárizmi** feladatmegoldása között csupán annyi a különbség, hogy Hérón az eredményt, nyilván egyiptomi befolyásra, egységtörtekkel fejezte ki, ami a mai írásmód szerint:

$4+1/2+1/5+1/10$.

E példát főleg azért érdemes említeni, mert kitűnően illusztrálja azt az utat, amely Egyiptomból Görögországon, Mezopotámián át elvezet az arab matematikához, és azon keresztül Európához. A tudományok és általában a kultúra fejlődésének a folytonosságát, hézagtalanságát sejthetjük meg egy-egy ilyen példa nyomán. Nagyon valószínű, hogy ott, ahol látszólag a semmiből, hirtelen bukkan fel egy már fejlettnek látszó ismeret, vagy ahol a kultúra fejlődésében hézagok mutatkoznak, ott mindig joggal kereshetők az előzmények, illetőleg a hiányt kitöltő, még fel nem derített, összekötő hidak. Így aztán nem meglepő, ha időnként egy-egy új, ismeretlen vagy elveszettnek vélt mű feltalálása a régebben kialakulthoz képest új megvilágításba helyezi némely könyvnek a tudománytörténetben elfoglalt szerepét és jelentőségét.

Így vagyunk **al-Hvárizmi** *Algebrájával* is. Újabban Törökországban találtak egy kéziratot, amelynek a szerzője

IBN TURK AL-KUTALLl, ABD AL-HAMÍD IBN VÁSZI (IX. sz.)

E kézirat címe *Logikai szükségszerűségek a vegyes egyenletekben.* Benne olyan részek találhatók, amelyek előfordulnak **al-Hvárizmi** *Algebrá*jában is. A kézirat keltezési ideje feltehetőleg megegyezik **al-Hvárizmi** működésének idejével, de az is lehet, hogy még előtte íródott. Feltűnően azonos a két könyvben az $x^2+21=10x$ egyenlet tárgyalása, sőt Abd **al-Hamíd** művében még többet is adott, mert abban szerepelt a diszkrimináns jelentésének a geometriai magyarázata is. Ebből leolvasható, hogy a másodfokú egyenletnek csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív. Nem csupán a feladatok megoldását illusztráló példák kiválasztásában, hanem a két mű rendszerében is sok a hasonlóság. Bizonyára az a helyzet **al-Hvárizmi** *Algebrá*jával, mint volt **Eukleidész** *Sztoikheiájával.* Tárgyköre abban a korban széles területen ismert volt már, többen is írtak ugyanarról a témáról. Ezek között a számos vonásban hasonló művek között azonban az egyik kiugróan jónak bizonyult, és mellette a többi

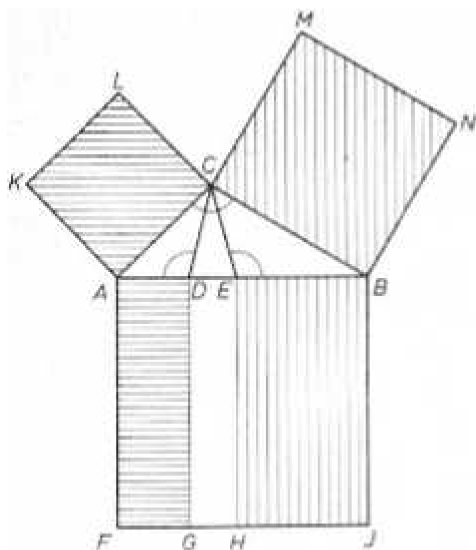
elfelejtődött. Al-**Hvárizmi** kiugróan jó *Algebrá*ja, példásan rendszeres tárgyalási módja és érthetősége miatt, mint kiváló kézikönyv évszázadokon keresztül használt, iránymutató, kedvelt mű lett. Egyetlen hátránya a retorikus módszer, a szimbólumok teljes hiánya, amelyet az arab világ matematikája sohasem haladt túl a középkorban.

ABU KÁMIL SUDZSA IBN ASZLAM IBN MUHAMMED AL-HÁSZIB AL-MISZRIJ (850?-930?)

Egyiptomban született. Kairóban dolgozott. Határozatlan egyenletekkel foglalkozott. Ritkaságszámba menő kéziratát - *Könyv a dzsabrról és a mukábaláról* - Sztambulban őrzik. Habár csak a másodfokú egyenletekig jutott el, az arab matematikában először ő tárgyalt többismeretlenes egyenletet. A kvadratikus irracionalitásokat már számként kezelte. Az algebrai azonosságokat szavakban fogalmazta meg, és számpéldákkal támasztotta alá. Munkái hatással voltak **Leonardo PISANÓra** is.

SZABIT IBN KURRA, ABUL-HASZAN (836-901)

A IX. század második felében működő, kiváló bagdadi matematikus jelentős szerepet vitt a bagdadi „fordítóiroda” megszervezésében. Ő maga is számos művet fordított arabra. Ezek között volt **Eukleidész** *Elemei,* úgyszintén **ARKHIMÉDÉSZnek, Apollóniosz-nak, PTOLEMAIOSZnak** és **EUTOKIOSZnak** néhány munkája. Egyedül az ő fordítása őrizte meg **ARKHIMÉDÉSZnek a** szabályos hétszög szerkesztését bemutató tanulmányát. (Lásd a 211. oldalon.) Ugyanakkor annál jobban képzett matematikus volt, hogy csak szolgai módon fordítson. Az érdeklődését felkeltő tételeket sokszor módosította, általánosította, további vizsgálatainak kiindulásaként használta. Erre egyik példa a Pitagorasz-tétel egyfajta általánosítása: a Szábit-tétel. E szerint, ha a *245. ábra ABC* háromszögének C csúcsából rajzolt CD és *CE* szakaszok az *AB* oldallal akkora szöget zárnak be, mint az *ABC* háromszög C szöge, azaz a *245. ábrán* a megkörívezett szögek egyenlők, akkor



245. ábra

$AC^2 + BC^2 = AB(AD+EB)$.

Ez azt jelenti, hogy az *AC* és *BC* oldalakkal rajzolt négyzetek területének összege az *AB* oldalú négyzet területénél a *GHED* téglalap területével kisebb, ha a C szög tompaszög, és ennyivel nagyobb, ha a C szög hegyesszög. Ha viszont a C szög derékszög, akkor a Szábit-tétel átmegy a Pitagorasz-tételbe. A Szábit-tétel bizonyítása legrövidebben hasonló háromszögek segítségével történhet:

Mivel $ADC\Delta \sim ACB\Delta$, azért $AD : AC = AC : AB$, tehát: $AC^2 = AD * AB$.

Mivel $BEC\Delta \sim BCA\Delta$, azért $BE : BC = BC : AB$, tehát: $BC^2 = BE * AB$.

A két négyzet összege:

$AC^2 + BC^2 = AB(AD+BE)$

Szabit ibn Kurra a baráti számpárokkal (87. oldal) kapcsolatban felfedezte, hogy ha *p, q* és *r* törzsszámok, továbbá

$p = 3 * 2^n — 1$, $q = 3 * 2^{n-1} — 1$ és $r = 9 * 2^{2n-1} - 1$

alakú, akkor $2^n pq$ és $2^n r$ baráti számok (n természetes szám).

Az igazolás:

1. $2^n r$ önmagától különböző osztóinak az összegét jelöljük N-nel. Ekkor:

$$N=(1+2+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})r=$$
$$=2^{n+1}-1+(2^n-1)r.$$

Mivel azonban

$r=9 * 2^{2n-1}—1,$

azért

$$N=2^{n+1}-1+(2^n-1)(9\cdot 2^{2n-1}-1)=$$
$$=2^{n+1}-1+9\cdot 2^{3n-1}-9\cdot 2^{2n-1}-2^n+1=$$
$$=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-9\cdot 2^{n-1}+1)=$$
$$=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-3\cdot 2^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+1)=$$
$$=2^n(3\cdot 2^n-1)(3\cdot 2^{n-1}-1)=2^n pq.$$

Így $2^n r$ szóban forgó osztóinak az összege éppen $N=2^n pq$.

2. Hasonlóképpen: jelöljük a $2^n pq$ önmagánál kisebb osztóinak az összegét M-mel. Ekkor:

$$M=(1+2+2^2+\ldots+2^n)+(1+2+2^2+\ldots+2^n)p+$$
$$+(1+2+2^2+\ldots+2^n)q+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})pq=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+p+q)+(2^n-1)pq.$$

A p-nek és q-nak a feltételekben megszabott értékeit behelyettesítve:

$$\begin{aligned} M=&(2^{n+1}-1)(1+3\cdot 2^n+3\cdot 2^{n-1}-2)+\\ &+(2^n-1)(9\cdot 2^{2n-1}-9\cdot 2^{n-1}+1)=\\ &=2^n(9\cdot 2^{2n-1}+9\cdot 2^n-4-9\cdot 2^n)+6\cdot 2^{n-1}=\\ &=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-1)-3\cdot 2^n+6\cdot 2^{n-1}=\\ &=2^n(9\cdot 2^{2n-1}-1)=2^n r.\end{aligned}$$

Igaz tehát, hogy $2^n pq$ és $2^n r$ baráti számpár.

A bemutatott két példa talán érzékelteti, hogy Szábit ibn Kurra valóban hozzájárult a korabeli matematikához. Ezt tette azokban a munkáiban is, amelyek a henger síkmetszeteire, a parabolaszeletre, a paraboloidszeletre, a bűvös négyzetekre és a szögharmadolásra vonatkoznak. Ugyanígy volt bátorsága ahhoz is, hogy a ptolemaioszi csillagászati elméletet egyszerűsítse egy új szféra bevezetésével, és a hipparkhoszi napéjegyenpont precessziójának elméletét is pontosítsa.

AL-BATTÁNI, ABU-ABDALLÁH MUHAMMAD IBN DZSÁBIR (ALBATENIUS, 858-929)

A csillagászat keretében művelte a trigonometriát. A mai Törökország délkeleti részén fekvő Harránban (a mezopotámiai Battan-ban) született, és a mai Irak területén levő Szamarra mellett halt meg. A csillagimádó szabeusok szektájához tartozott. Csillagászati megfigyeléseit Antiokhiában és Araktában végezte. Az utóbbi városról Mohamedes ARACTENSISnek is hívták. Egy csillagászati könyve maradt meg: A csillagok mozgásáról.

Az ő érdeme, hogy a görög szinuszfogalom (középponti szöghöz tartozó húr) és a hindu szinuszfogalom (egy középponti szöghöz a kétszer akkora középponti szög húrjának a fele tartozik) versengésben a hindu felfogás győzött. Már Szábit ibn Kurra is használta a hindu változatot, mégis az Európába való közvetítés érdeme al-BATTÁNIé. Annak ellenére, hogy már ismerte a többi szögfüggvényt is, könyvében mégis a szinusz segítségével elég bonyolultan fejezi ki a derékszögű háromszög egyik befogóját:

$$b = \frac{a \sin(90-\alpha)}{\sin \alpha},$$

ahol a és b befogók és α az a-val szembeni szög. A képletet azért érdemes idézni, mert elárulja, hogy kezdetben az egész trigonometria a szinusz szögfüggvényen alapult. Alig egy évszázad múlva ugyanez az összefüggés ABUL-Vafa könyvében már csak $a = b * \text{tg}\ \alpha$ alakban szerepel. Al-Battáni foglalkozott gömbháromszögtannal is. Könyvében található egy, a gömbháromszögtani koszinusztétellel egyenértékű törvény.

Csillagászati eredményei közé tartozik a nappálya elemeinek és az év hosszának igen pontos meghatározása. Ez utóbbi egyik alapja volt a hét évszázaddal későbbi, XIII. Gergely pápa által bevezetett naptárreformnak. Igen gondos csillagászati megfigyelő volt. Ebben jól segítették az apja által készített csillagászati eszközök. Csillagászati táblázatait Európában is sokáig használták.

ABUL-VAFA (VEFA), MUHAMMAD AL-BUZDZSÁNI (940-998)

Korának neves csillagásza és matematikusa volt. A keleti kalifátus fővárosában, Bagdadban végezte csillagászati megfigyeléseit és matematikai fordítói, kommentátori munkásságát. Lefordította és magyarázta **Eukleidész** és **Diophantosz** munkáit. A magyarázatokban fellelhetjük a fordítónak is néhány eredményét. Két önálló munkája maradt ránk. Az egyik gyakorlati jellegű aritmetika, amelynek címe: *Könyv arról, ami az aritmetikából az írnokoknak és az üzletembereknek szükséges.* Jelöléseket könyvében nem alkalmazott. Annak ellenére, hogy a bonyolult számolási eljárásokat is csupán szavakkal írta le, művét a maga korában hasznosnak találták, és sokáig népszerű volt. Az első három fejezetben előrebocsátotta azokat a matematikai ismereteket, amelyekkel olvasóinak meg kellett ismerkedniük: az arány, a szorzás, osztás, általában a műveletek elvégzésének szabályait. Ezután négy részben az alkalmazásokra mutatott példákat a bérek és a kereskedelmi számítások köréből. Olvasóit intette a pontosságra. Új módszerekre tanította a pénzügyi hivatalnokokat és a földmérőket. A másik könyve: *Könyv arról, ami a kézműveseknek kell a geometriából.* Ez főleg a gyakorlatban is használható

geometriai szerkesztési feladatokat tárgyal, jórészt görög művek alapján.

Trigonometriájában találjuk az első tiszta igazolását a kétszeres és a félszögekre vonatkozó addíciós formuláknak. A szinusztételt, amelyet már Ptolemaiosz is használt, és amely BRAHMAGUPTÁnál is előfordul, sokan Abul-Vafa nevéhez kapcsolják, azért a nagyon világos megfogalmazásáért, amely gömbháromszögtanában található. Van, aki a tétel felfedezését az 1000 körül működő ABU-NASZRnak tulajdonítja. Az valószínűnek látszik, hogy a szinusztételt tompaszögű háromszögre először ő bizonyította. Új szinusztáblázatot is készített 15 perces szögugrásokkal, 8 tizedes pontossággal. Alighanem ő állított össze elsőként tangenstáblázatot. Mindenesetre ő volt az első, aki mind a hat szögfüggvényt használta, definiálta azokat az egységsugarú kör segítségéve], és ismerte a közöttük fennálló összefüggéseket is. Nemcsak a trigonometriában jeleskedett, hanem szerzett érdemeket az algebrában is, főleg azzal, hogy kommentálta **al-Hvárizmi** *Algebráját,* és görögből lefordította **Diophantosz** *Arithmetikáját.*

Volt egy sok eredetiséget nem mutató csillagászati munkája is, főleg PTOLEMAIOSZ *Almagesztjére* alapozva. Ez csak töredékeiben ismeretes. Abul-Vafa nevét őrzi a Hold egyik krátere is.

AL-KARADZSI, ABU-BAKR MUHAMMAD IBN AL-HASZAN (al-Karhi, ?-1016)

Bagdadi perzsa matematikus. Szülőhelye Karadzs. **Abul-Vafa** Diophantosz-fordítása alapján dolgozott. Ennek hatása alatt nem csupán az első- és a másodfokú egyenletekkel foglalkozott, hanem - elsőként az arab matematikusok között - megoldott másodiknál magasabb fokú egyenleteket is. Észrevette, hogy az

$$ax^{2n}+bx^{n}+c= 0$$

alakú egyenletek visszavezethetők másodfokúakra. DIOPHANTOSszal ellentétben al-Karadzsi már számításba vette az irracionális megoldásokat is. Nagy ügyességgel számolt a gyökmennyiségekkel. Tudta például, hogy

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16} \quad \text{és} \quad \sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}.$$

Ránk maradt egy nagy aritmetikai és egy szintén terjedelmes algebrai tárgyú tanulmánya. Az egyik címe: *Egy megfelelő könyv az aritmetika tudományáról.* A másikat **al-Karadzsi Fahr al-Mulk** vezírnek ajánlotta, ezért lett a címe *AI-Fahri.* Mintegy 250 algebrai feladatot tartalmaz, amelyek közül sok belekerült későbbi feladatgyűjteményekbe is. Ebben a művében megpróbálkozott **al-Karhi** a teljes indukció alkalmazásával is. Aritmetikai munkájában foglalkozott a sorozatok első *n* elemének az összegzésével, nevezetesen a négyzet- és a köbszámok esetében.

Az 1970-es években előkerült Buharában AL-KARHInak egy addig ismeretlen kéziratos műve is. Ez aritmetikán és algebrán kívül geometriát is tárgyal.

AL-BÍRÚNI, ABUR-RAIHÁN MUHAMMAD IBN AHMAD (973-1048)

Polihisztor: csillagász, matematikus, fizikus, történész, geográfus, botanikus, mineralógus, geológus, nyelvész és filozófus.
Horezm külvárosában született, amely ma Üzbegisztánban található Híva néven. Kezdetben történelemmel, matematikával és csillagászattal foglalkozott. Első csillagászati megfigyeléseit 17 éves korában végezte. 25 éves volt, amikor Gurgan uralkodója udvarába rendelte, mint akkor már elismert tudóst. Onnan csak 6 év múlva tért vissza szülővárosába. 1017-ben **Mahmúd al-Gaznavi** elfoglalta Horez-met, és ekkor több más perzsa tudóssal együtt **al-Bírúni** is Gazná-ba került.

Közbevetőleg szólva ez ugyanaz a **Mahmúd al-Gaznavi** volt, aki FIRDAUSZInak, a világhírű perzsa költőnek annyi aranyat ígért, ahány sora lesz a költő éppen készülő fő művének, a *Sáhnáménak.* A 35 évig tartó munkát azonban a szultán csak ezüsttel jutalmazta, amit a sértett költő szolgái között osztott szét, és **Mahmúd** szultán fösvénységét kegyetlen szatírában állította pellengérre. Emiatt aztán menekülnie kellett az uralkodó haragja elől. Utolsó napjait szülővárosában, Tuszban töltötte. Az időközben jobb belátásra tért szultán megküldte neki az ígért aranyakat. Ezeknek azonban **Firdauszi** már nem vehette hasznát. Amikor az

aranyakkal érkező küldöncök áthaladtak Tusz egyik kapuján, ugyanakkor kísérték a költő holttestét a város másik kapuján keresztül örök nyugalomra.

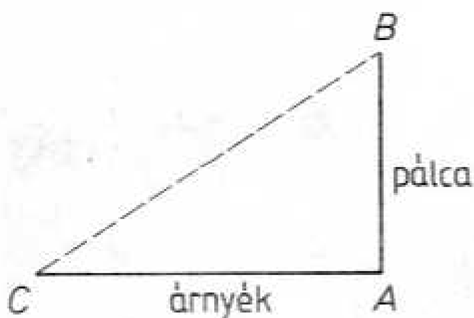
Al-Bírúni nemcsak ismerte, hanem jó barátja is volt **Ibn Színá**nak, aki Európában **Avicenna** néven lett ismert. **Ibn Szína,** korának kiváló természettudósa, elsősorban orvos volt. Kitűnő emlékezőtehetségére jellemző, hogy 10 éves korában már kívülről tudta az egész *Koránt.* Jelentős hasznára volt a matematikának is azzal, hogy **EUKLEIDÉSZt** arabra fordította, és a fizikában, ahol csak tudta, alkalmazta a matematikát. **Al-Bírúni** főleg filozófiai vitákat folytatott vele, legtöbbször **Arisztotelész** filozófiáját boncolgatva.

Mahmúd al-Gaznavi al-Bírúnit indiai hódító hadjárataira is magával vitte, és így a tudósnak alkalma nyílott India nagy részének megismerésére. Megtanulta a szanszkrit nyelvet, és így behatolhatott a hindu kultúra minden részletébe, beleértve a vallási tanokat is. Nyitott szemmel járt, és kritikus szellemmel dolgozta fel a megismert hindu művelődési eredményeket. A hindu matematikáról, igen találóan, az volt a véleménye, hogy a közönséges köveknek és a csillogó kristályoknak a különös keveréke. Teljes leírását adta a hindu *Sziddhántáknak* és a helyi értékes 10-es számrendszernek. Ismertette **Brahmagupta** tételét is, amely a Hérón-tétel általánosítása (270. oldal), de ugyanakkor helyesen jegyezte meg, hogy a tétel csak húrnégyszögekre érvényes. Tőle tudjuk azt is, hogy **Arkhimédész** már ismerte a Hérón-formulát.

Utazásai közben tanulmányozta India földtani szerkezetét, és sok helymeghatározást is végzett. Az első nagyobb tudományos könyve a térképészettel is foglalkozott. Ebben használta a félgömbnek a síkra való leképezését. Csillagászati eredményei közül kiemelkedik a nappálya apogeummozgásának a leírása (apogeum = földtávolpont). Nagyon világosan látta a csillagjóslás alaptalanságát, és ezt ki is fejtette az *Értekezés a csillagjóslás kezdetéről* című tanulmányában.

Fontos csillagászati és geográfiai munkájának latin címe: *Canon al Masudi seu tractatus geografico-astronomicus* (A Maszúd szultán számára összeállított földrajzi-csillagászati ismeretek tárgyalása). Írt

orvostudományi könyvet is, és elsőnek készített fajsúlytáblázatot. Ez a nagyon széles érdeklődésű tudós a gömbről szóló munkájában bebizonyította a gömbháromszögtani szinusztételt. A *Gnómika* című könyvében ismertette a tangens- és a kotangensfüggvényeket. Amint a mű címe elárulja, az értelmezés a gnómónhoz, a napórához kapcsolódik. A napóra lényege egy vízszintes síklapra állított pálca, amelynek árnyékáról következtettek az időre. A *246. ábrán* a *CA* árnyék hossza viszonyítva az *AB* pálca hosszához, a Nap emelkedési szögének a kotangense. Ennek reciproka az említett szög tangense. Az árnyék által meghatározott *BC* távolságnak és a pálca hosszának az aránya a koszekáns- és ennek reciproka a szinuszérték. Végül, ha a *CB* átfogót az árnyék hosszához viszonyítjuk, akkor a szekáns- és ennek reciprokaként a koszinuszfüggvényt nyerjük. A napórához kötött szögfüggvény-értelmezés kimondottan hindu-arab elképzelés. A szögfüggvények ábrázolására **al-Bírúni** is bevezette az egységsugarú kört. A körbe írható szabályos kilencszög szerkesztését visszavezette a



246. ábra

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

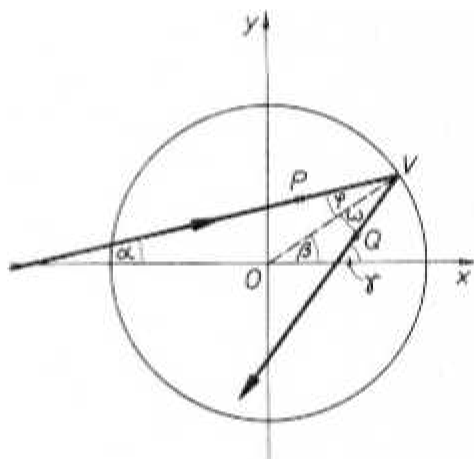
összefüggésen keresztül az $x^3 = 3x + 1$ harmadfokú egyenlet megoldására. Ezt próbálgatásos módszerrel oldotta meg, és hattizedes pontosságú közelítő megoldást kapott ($x \approx 1{,}870\ 912\ 9$).

Al-Bírúni kultúraközvetítő szerepe kétirányú volt. Nem csupán arab nyelvű munkáiból lehet megismerni a korabeli Indiát, hanem szanszkrit nyelvű írásai a hindukat is megismertették a görög matematikával és csillagászattal.

IBN AL-HAISZAM, ABU-ALI HASZAN (ALHAZEN, 965-1039?)

Korának legnagyobb arab fizikusa. A mai Irak területén fekvő Baszra városában született, élt és meghalt Kairóban. A híres fizikus szerette volna felhívni magára az egyiptomi kalifa figyelmét, hogy kutatásaihoz gondtalan életet biztosítson. Ezért merészen kijelentette, hogy képes olyan gépezetet szerkeszteni, amely a Nílus áradásait szabályozza. Amikor ez történt, akkor a Fátimidák családjának **al-Hákim** nevű szeszélyes, sőt vérengző tagja töltötte be Egyiptomban a kalifa tisztjét. Meg is bízta **ALHAZENt** a Nílus szabályozásával, de kilátásba helyezte, hogy amennyiben az ígért gépet megépíteni nem tudja, lefejezteti. **Alhazen** kénytelen volt úgy tenni, mintha hozzákezdene a gép elkészítéséhez, és nagy ügyességgel sikerült 5 teljes évig húznia-halasztania a dolgot. Szerencséjére **al-Hákim** 1021-ben meghalt. Ilyen módon nyert a fizikus ötévi ingyenes, bár korántsem gondtalan ellátást.

Alhazen különösen az optikában jeleskedett. A matematikában is azzal örökítette meg a nevét, hogy az egyik fénytani feladatával számos későbbi nagy matematikus is foglalkozott. Ez az ún. Alhazen-probléma az *Optikájában* szerepel: Keressük meg a gömbtükör azon pontját, ahova be kell esnie egy adott pontból kiinduló fénysugárnak, ha azt szeretnénk, hogy visszaverődése után egy másik adott ponton menjen át. Ez geometriailag egyenértékű azzal a feladattal, amely szerint egy kör síkjában két adott ponton át két olyan egyenest kell szerkesztenünk, amelyek a kör kerületén találkoznak és egyenlő szöget zárnak be a kör e pontjához tartozó sugár egyenesével.



247. ábra

Ha feltételezzük, hogy **Alhazen** feladatában homorú gömbtükör szerepelt, akkor legyenek az adott pontok a *247. ábra* szerint a körön belüli $P(x_1; y_1)$ és a $Q(x_2; y_2)$, a tükrön levő beesési pont pedig a $V(x_0; y_0)$. A feltétel szerint a *PV* fénysugár és a *V* ponthoz tartozó körsugár φ szöge akkora, mint a *VQ* fénysugár és az *OV* körsugár által bezárt ω szög. Jelöljük a *PV* egyenes irányszögét α-val, az *OV* irányszögét β-val és a *QV* irányszögét γ-val. Ekkor:

$\varphi = \beta - \alpha$ és $\omega = \gamma - \beta$.

Mivel pedig a feladat szerint $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega$, azért

$$\frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Vegyük most tekintetbe, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2},$$

és ezért:

$$\frac{\frac{y_0}{x_0}-\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}}{1+\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}}=\frac{\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}-\frac{y_0}{x_0}}{1+\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}},$$

vagy

$$\frac{x_0y_1-x_1y_0}{x_0^2+y_0^2-x_0x_1-y_0y_1}=\frac{x_2y_0-x_0y_2}{x_0^2+y_0^2-x_0x_2-y_0y_2}.$$

Átrendezés után:

$$(x_0^2+y_0^2)[x_0(y_1+y_2)-y_0(x_1+x_2)]+$$
$$+(y_0^2-x_0^2)(x_1y_2+x_2y_1)+2x_0y_0(x_1x_2-y_1y_2)=0.$$

Vezessük be az ismert adatokra a következő jelöléseket:

$x_1+x_2=d$, $y_1+y_2=c$, $x_1y_2+x_2y_1=a$ és $x_1x_2-y_1y_2=b$;

Ekkor kapjuk az

$$a(y_0^2-x_0^2)+2bx_0y_0+(y_0^2+x_0^2)(cx_0-dy_0)=0$$

egyenletet. Mivel azonban a *V* pont rajta van a körön, azért az $y^2_0+x^2_0$ helyett r^2 írható, tehát egyenletünk végső alakja:

$$a(y_0^2-x_0^2)+2bx_0y_0+(cx_0-dy_0)r^2=0,$$

ami pedig egy hiperbola egyenlete. Amint már említettem, az $(x_0; y_0)$ pont rajta van a körön, tehát koordinátái ki kell hogy elégítsék a kör egyenletét is, azaz az

$$x_0^2+y_0^2=r^2$$

egyenletet. A keresendő *V* pont tehát e körnek és az előbbi hiperbolának a közös pontja. Általánosságban tehát a kör belsejében adott két ponthoz négy *V* pont tartozik. **Alhazen** megoldása természetesen nem a koordinátageometria eszközeivel született meg, hanem elemi geometriai úton, de ugyanehhez az eredményhez jutott. Megoldotta e feladatot még úgy is, hogy a *P* ponton átmenő fénysugár kétszeres visszaverődés után haladt át a *Q* ponton. E feladat különböző eseteivel számos nagy matematikus foglalkozott, köztük **Huygens, Barrow** és **L'Hospital** is.

Alhazen neve szintén kapcsolatos a párhuzamossági axiómára vonatkozó vizsgálatokkal. Egyike volt azoknak, akik már igen korán úgy gondolták, hogy **Eukleidész** ötödik posztulátuma nem független a többitől, és azért igyekezett a többi axiómával bebizonyítani. **Alhazen** egy olyan négyszögből indult ki, amelyben három derékszög van (Lambert-féle négyszög), és „bebizonyította", hogy akkor a negyedik szög is derékszög. Ezt azzal „okolta" meg, hogy egy mozgó pont egy adott egyenestől mindig egyenlő távol kell hogy maradjon, ha azzal párhuzamos egyenesen mozog. Nem vette észre, hogy „bizonyítása" valójában az ötödik posztulátumnak csupán egy másik megfogalmazása, azaz arra alapozott, amit bizonyítani szeretett volna.

Ugyancsak **Alhazen** nevéhez fűződik az a számelméleti feladat, amely szerint olyan, 7-tel osztható számokat kell keresnünk, amelyeknek a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való osztási maradéka 1. E feladat később felkeltette **Leonardo Pisano** (450. oldal) érdeklődését is. **Alhazen** végzett még terület- és térfogatszámításokat is. Ezekben a határozott integrál csíráit láthatjuk meg az **ArkhiméDÉsznél** (188. oldal) tapasztalt szinten.

IBN JÚNISZ, ABUL-HASZAN ALI IBN SZAÍD ABDARRAHMÁN

(979-1008)

Röviden emlékezünk meg **Alhazen** e matematikus földijéről **és** kortársáról, **Abul-Vafa** tanítványáról, aki a trigonometriába bevezette a

$2 \cos x * \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$

képletet, amellyel kezdetben a koszinuszok szorzatát alakították összeggé. Később azonban a logaritmus feltalálása után éppen fordítva alkalmazták. A képletet a XVI. századi első, ilyen célú alkalmazójáról Werner-formulának is nevezik. **Ibn Júnisz** volt az első, aki a háromszögtani feladatok megoldásánál segédszög bevezetését használta. Készített szinusz- és tangenstáblázatot 1' szögnövekedéssel **Ptolemaiosz** módszere szerint (264—266. oldal).

AL-BAGDÁDI, MUHAMMAD IBN ABD AL-BÁKI (?-1100)

Két tanulmánya érdemel említést. Az egyik *A maradékok kiszámításáról* szól, a másik pedig az összemérhető és az összemérhetetlen mennyiségekről. Ezekben **Eukleidész** *Elemek* című művének a X. könyvében szereplő másodfokú irracionális mennyiségeket vizsgálja, mégpedig olyan geometriai szemléltetéssel, amely a derékszögű koordináta-rendszert juttatja eszünkbe. Ilyen vonatkozásban **Descartes** előfutárának tekinthetjük.

OMAR HAJJÁM (1048-1131)

Tudós perzsa költő, matematikus, csillagász és filozófus. A neve - Hajjám - sátorkészítőt, sátorverőt jelent, azonban mint személynévnek éppen úgy nem lehet értelmet tulajdonítani, mint például a magyar Szabó névnek. Horászán perzsa tartomány Nisápur városában született. Az igen jól képzett ifjú tehetségére felfigyelt a buha-rai kormányzó, és **Hajjámot** a szultán udvarába hívták. Azután a szeldzsuk törökök birodalmában élt Iszfahánban, a szultán pártfogoltjaként.

Nevét Európában 1860 táján ismerték meg. Ekkor jelentek meg híres négysoros versei, amelyekből kb. 1000 maradt meg. Ezek az elröppenő élet vidám örömeit, különösen a bor élvezetét dicsőítik. A *Rubáijját* szerzőjének Nisápurban, szülővárosában csodálatosan szép síremléket emeltek. Verseiben olykor mély misztikus áhítat, máskor pedig egyenesen a vallás elleni lázadás nyilvánul meg:

A nagy Mindenható az élet elemeit amikor kimérte,

Múlandóságot és hanyatlást ki mondja meg, belé miért tett?

Hiszen, ha jó az alkotása, akkor miért semmisíti meg?

Ha pedig rossz, amit teremtett, azért a gáncs ugyan kit érhet?

(SZERB ANTAL: *A világirodalom története.* Magvető, 1973. 159. old.)

Versei közül idézek még egyet, amely tartalmában eltér az előbb említettektől:

„Az esztendőt te emberhez szabod" -

Mondjátok, mert a naptárból töröltem

A még világra nem jött holnapot

S a már halálba hullott tegnapot.

(DIRK J. STRUIK : *A matematika rövid története.* Gondolat, 1958. 82. old.)

E vers bizonyára a szerző egyik jeles csillagászati tevékenységét örökíti meg, hogy ti. 1079-ben megreformálta a régi perzsa naptárt. Így a perzsa naptár csak minden ötezer évben tévedett egy napot, míg a mi jelenlegi Gergely-naptárunk 3330 évenként téved egy napot. A perzsák később a holdnaptárt vezették be. Költeményeinek valamikor nagy tisztelete lehetett, mert például a szúfik, az iszlamizmus egyik misztikus hajtásának a hívei (gyapjúból, szúfból készült ruhát viseltek) verseinek szimbolikus, vallásos jelleget tulajdonítottak.

A matematikus OMAR HAJJÁM egyik könyve *Az algebrai feladatok megoldásáról,* amely túlhaladja AL-HVÁRIZMI anyagát, foglalkozik a harmadfokú egyenletekkel is. Ebben az elsők között választja élesen szét a tisztán algebrai módszert a geometriai eljárástól, habár mind a kettőt tárgyalja. Az általános harmadfokú egyenletről úgy gondolta, hogy csak geometriai úton oldható meg. Gondolatmenete szerint az első- és másodfokú egyenletek síkbeli szerkesztéssel oldhatók meg, a harmadfokúak pedig már csak térbeli szerkesztéssel. Így aztán a harmadfokú egyenletek gyökeinek a megkeresésére más eljárás után kutatott, és a kúpszeleteket hívta segítségül. Egy általános harmadfokú egyenlet - mint írta - mindig

$x^3+bx^2+cx+d= 0$

alakra hozható. Ha most x^2-et helyettesítjük 2py-nal, akkor nyerjük a

$2pxy+2bpy+cx+d=0$

egyenletet, amely egy hiperbola egyenlete. A helyettesítéshez használt $x^2=2py$ viszont egy parabola egyenlete. Az eredeti egyenlet gyökei tehát e hiperbolának és e parabolának a metszéspontjaihoz tartozó abszcisszák (mondjuk ma). Nyilvánvaló, hogy erre a mintára, ügyes helyettesítésekkel, más kúpszeletpárok metszésére is vissza lehet vezetni a harmadfokú egyenlet megoldását. **Omar Hajjám** azonban még nem vette számításba a negatív együtthatókat, és ezért az általános harmadfokú egyenleteknek is különböző típusait tárgyalta aszerint, amint a pozitív együtthatók az egyenlet más-más oldalán jelentkeznek. Tehát például az $ax^2+bx^2=cx+d$ egyenletre más eljárást mutatott, mint az $ax^3+cx=bx^2+d$ egyenletre, ahol is az együtthatók mindig pozitív számokat jelentettek, esetleg nullát. Ugyanígy nem vette figyelembe az egyenletek negatív gyökeit sem, azaz nem olvasta le minden metszéspont „abszcisszáját”. A harmadiknál magasabb fokú egyenleteket, mint például a negyedfokút is, csupán elméleti jellegűeknek tekintette, amelyek a valóságban nem léteznek, hiszen ezek előállításához, illetve ábrázolásukhoz már háromnál több dimenzió szükséges. Amint látjuk, igaz, hogy **Omar Hajjám** már nagyon tudatosan elkülönítette a tisztán algebrai módszereket a geometriai eljárásoktól, gondolkozásában azonban ő sem tudta száműzni az algebrából a geometriát. A tisztán algebrai megoldásoknak mintegy bizonyítása volt számára a geometriai megoldás, sőt olykor az utóbbi mint egyetlen út jelentkezett. Mindenesetre az araboknál tűnt fel először az a törekvés, hogy az egyenletmegoldásban elválasszák az algebrai eljárásokat a geometriaiaktól. Ennek az igyekezetnek egyik jelentős képviselője volt **Omar Hajjám,** aki már megkísérelte körvonalazni az algebrának, ennek a „tudományos művészetnek” a tárgyát és módszereit.

Omar Hajjám érdemei közé tartozik az is, hogy az arányokat is igyekezett számoknak tekinteni, azaz törekedett a racionális szám fogalmának a kialakítására. Ezen túlmenően az irracionális

számokra is adott közelítő értékeket, azaz elindította azt a folyamatot is, amelynek révén az irracionális számok később elnyerték a „szám” rangját. Ezzel nagyban hozzájárult a valós számok fogalmának a kialakításához. Tette ezt érdekes módon akkor, amikor a negatív számokat lényegében még nem tudta számoknak tekinteni.

Omar Hajjám *Algebrá*jában megtaláljuk a kéttagú kifejezések négyzetét, köbét, harmadik, negyedik és magasabb hatványait, vagyis a binomiális együtthatók rendszerét, amely már ekkor Kínában a „Pascal-háromszög” elrendezésben ismeretes volt (344. oldal). Valószínűnek látszik, hogy **Omar Hajjám** a kínaiaktól függetlenül fedezte fel a binomiális együtthatókat, mert az ő idejében Kína és Perzsia között gyakorlatilag nem volt kulturális érintkezés, hacsak arra nem gondolunk, hogy a Perzsián átvivő „selyemút” lehetővé tett bizonyos ismeretátszivárgást is.

Az algebrista költő érdeklődését nagymértékben foglalkoztatta az Eukleidész ötödik posztulátuma körül kialakult problémakör.

Amint azt már ALHAZENnel kapcsolatban említettem, az ötödik posztulátum vagy párhuzamossági axióma a többihez képest annyira bonyolultnak tetszett, hogy a matematikusokban az a nézet alakult ki, hogy az nem is valódi axióma, hanem a többi alapján bebizonyítható tétel. **Ptolemaiosz, Proklosz** és mások áttekinthetőbb megfogalmazásban mondták ki, helyettesítették az ötödik posztulátumot. **Alhazen** már bizonyítani akarta, mint láttuk, sikertelenül. Az első bírálója éppen **Omar Hajjám** volt, aki **Arisztotelész** tekintélyére hivatkozva kifogásolta, hogy **Alhazen** a geometriába belekeverte a mozgás fogalmát. **Omar Hajjám** a *Megjegyzések Eukleidész könyvének nehéz posztulátumához* című művében olyan négyszögből indul ki, amelynek két szembeni oldala egyenlő hosszú, és a harmadik oldalra mindkettő merőleges. Ekkor a másik két szögre, amelyeket egyenlőknek tételezett fel, három feltevés létezik: vagy mindkettő hegyesszög, vagy mindkettő tompaszög, vagy mindkettő derékszög. így indult el a XVIII. században az olasz **Giovanni Girolamo Saccheri** (1667-1733) is, akiről ezt a négyszöget Saccheri-négyszögnek hívják. **Omar Hajjám** e négyszögben kizárta azt a két lehetőséget, hogy a meg nem rajzolt szögek hegyes- vagy tompaszögek lennének, mert - ismét

ARISZTOTELÉSZre hivatkozva - két egymáshoz hajló egyenes föltétlenül metszi valahol egymást. Beleesett tehát ő is abba a hibába, amelybe **Alhazen:** nem vette észre, hogy az az állítás, amelyre hivatkozott, valójában az ötödik axióma egy más megfogalmazása, azzal egyenértékű, tehát az ötödik axiómát ő is az ötödik axiómával „bizonyította". A alapgondolat termékenységét mutatja azonban az, hogy a XVIII. században **Saccheri,** de különösen **Johann Heinrich Lambert Omar Hajjám,** illetve **Alhazen** négyszögeinek a tanulmányozásával már jobban meg tudta közelíteni a probléma lényegét.

Az említetteken kívül ismerjük még **Omar Hajjám** következő matematikai munkáit: *A párhuzamosok helyes értelméről és bizonyos kétségekről; Az arányokról, arányosságról és helyes értelmükről; Az arányok felállításáról és vizsgálatukról.* Ugyancsak neki tulajdonítják *Az arany és az ezüst meghatározásának a módja az ezekből álló ötvözetben* című munkát, amelyben **Arkhimédész** törvénye nyert alkalmazást.

Omar Hajjám halálának idején, a XII. században már nagyon zavaros politikai és társadalmi viszonyok között folyt az élet a távol-keleti arab világban. Vallási villongások, különböző hatalmi törekvések, szekták kialakulása korántsem kedveztek a tudományok fejlődésének. A térség életére erősen rányomta bélyegét a mongol hódítás, de azért ennek a korszaknak is megvoltak a maga tagadhatatlanul tehetséges arab csillagászai, matematikusai.

NÁSZIRADDÍN AT-TÚSZI ABU-DZSAAFAR MUHAMMAD IBN MUHAMMAD (1201-1274)

A mai Irán területén, az akkori Horászán tartomány fővárosában Tuszban született. Iskoláit is itt végezte. Ezekre a tényekre utal nevében az at-Tuszi jelző. Egy ideig Bagdadban is működött. 1235 és 1256 között az asszaszinok Alamut nevű erődjében élt. Asszaszin egy fanatikus mohamedán szektának a neve, amelynek a jelentése: hasisevő. Ezek egyik ága, az iszmáilita szekta, Perzsia egy részét hajtotta uralma alá, és Alamut ennek a területnek volt a központja. Az asszaszinok céljaik elérésére erőszakos eszközöket alkalmaztak, és nem riadtak vissza az orgyilkosságtól sem. E kegyetlen módszerük annyira jellemző volt, hogy az asszaszin szó

számos nyelvben orgyilkost jelent, például az angolban is. Alamutot és a szekta többi sziklavárát a mongolok vették be, akik az asszaszinokat jórészt kiirtották, utolsó főnöküket 1256-ban kivégezték. Ekkor került NÁSZIRADDIN DZSINGISZ kán unokájának, HULAGU kánnak, az akkori mongol fejedelemnek udvarába. A kán, felismerve képességeit, személyi tanácsadójává tette, és számára Maraga városban, a mai Tabriz mellett, csodálatos csillagvizsgálót építtetett. NÁSZIRADDÍN irányítása alatt ez az obszervatórium tekintélyes természettudományos központtá terebélyesedett, amely támogatta és összefogta az akkori Kelet tudósait, és működési lehetőséget biztosított nekik. Ez az intézet pótolta a mongolok által feldúlt bagdadi Tudomány Házát. A maragai csillagvizsgáló könyvtárában mintegy 400 000 kézirat állt a kutató tudósok rendelkezésére. NÁSZIRADDIN összegyűjtötte és táblázatba foglalta azokat a csillagászati megfigyeléseket, amelyeket az intézet alapításától, tehát 1259-től tettek. Ez a táblázat tartalmazza a megfigyelési eredményeket egészen 1271-ig. Segítségével meg lehetett határozni a Nap és a bolygók helyzetét. Ezt egészítette ki egy nagy csillagkatalógus, az Elkan-katalógus. Személyes érdeme még NÁSZIRADDÍNnak, hogy nagyon pontosan meghatározta a Föld precesszióját, amelyet 51,4 másodpercnek talált. Természetesnek látszik, hogy mint csillagász, a trigonometriával is foglalkozott. Használta mind a hat szögfüggvényt, és megoldott sok sík- és gömbtrigonometriai feladatot. A szinusz- és a tangensfüggvényekre egyperces szögváltozásokkal hatjegyű táblázatot szerkesztett. Legnagyobb érdeme a trigonometria terén az, hogy elsőként kezelte a trigonometriát a csillagászattól elválasztott, önálló matematikai területként, és tárgyalta rendszeres felépítésben mind a sík-, mind a gömbi trigonometriát. Sajnálatos, hogy ez a szemlélete elszigetelt maradt egészen REGIOMONTANUS felléptéig, mert műveit és eredményeit Nyugaton csak nagyon későn ismerték meg JOHN WALLIS (1616-1703) fordítása alapján. Valószínűleg ebből a fordításból értesült SACCHÉRI is NÁSZIRADDIN azon próbálkozásáról, amelynek célja az ötödik posztulátum bebizonyítása volt. A párhuzamossági axiómával összefüggő vizsgálatok tehát PROKLOSZon, ALHAZENen, Omar HAJJÁMon és NÁSZIRADDÍNon keresztül Wallis közvetítésével jutottak el LAMBERThez és SACCHERIhez, hogy végül is Bolyai János és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856) rátaláljanak a probléma teljes megoldására. Ezen a területen at-Tuszi is csak addig

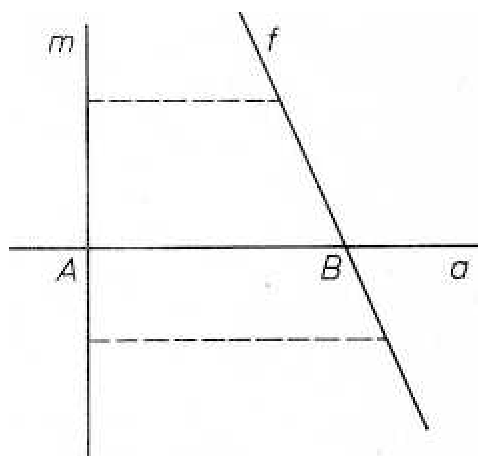
jutott el, hogy megállapítsa: Ha egy m egyenes merőleges az A pontban az a egyenesre, és egy *f* egyenes ferde az a egyeneshez képest a B pontban, akkor az m és *f* egyenes közötti, a-val párhuzamos szakaszok kisebbek AB-nél, ha azon az oldalon vannak, amelyen az (a,f) szög tompaszög (248. ábra). Amint látható, ez sem bizonyítás, hanem az ötödikkel egyenértékű axióma.

Jó összefoglaló képet nyerhetünk **at-Túszi** matematikai munkásságáról, ha átlapozzuk a *Kitáb as-sakl al-kita* (Értekezés a teljes négyoldalról, 1260) című könyvét. Ennek első részében kifejti az arányok elméletét, de EUDOXOSZtól és általában a görögöktől eltérően az arányokat ő is, mint **Omar Hajjám,** számoknak tekinti. A második részben fejti ki a teljes négyoldalak (teljes négyszögek) elméletét. A harmadik rész trigonometriai feladatok megoldási eljárásait tárgyalja mind a síkban, mind a gömbfelületen. A negyedik, befejező részben megmutatja, hogyan lehet egy gömbháromszög oldalait meghatározni a szögei alapján. Feltétlenül érdemei közé tartozik, hogy lefordította, közvetítette az arab világ számára **Eukleidész** *Sztoikheiáját,* **Ptolemaiosz** *Almageszt*jét és **Arkhimédész** műveit. A szolgai fordításokon túl azonban nemcsak magyarázatokkal látta el az említett műveket, hanem tételeiket olykor bizonyította, kiegészítette, általánosította. Ezek között kell említenünk a róla elnevezett Násziraddín-tételt, amely a mai megfogalmazás szerint így szól: Ha egy kör csúszás nélkül gördül egy másik, kétszer akkora sugarú kör belsejében annak kerületén, akkor a kisebbik kör bármelyik pontja a nagyobb kör egyik átmérőjét írja le.

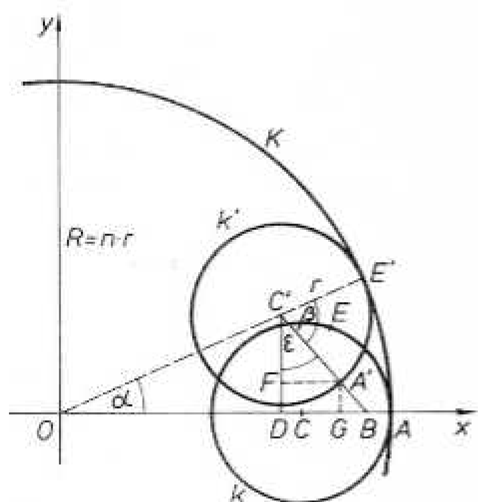
A Násziraddín-tételt beláthatjuk a következőképpen: Gördüljön csúszásmentesen az *r* sugarú *k* kör az *nr* sugarú *K* kör belsejében a *K* körvonalon *(249. ábra),* a szögelfordulás után jusson a *k* kör centruma a *C'* pontba. Ekkor *C'* az elgördült *k'* kör középpontja. Legyenek *C'* koordinátái az (x; *y)* derékszögű koordináta-rendszerben x_1 és y_1. Keressük a gördülés alatti *A* pontok mértani helyét. Evégett határozzuk meg a mértani hely tetszőleges *A'* pontjának *x* és *y* koordinátái közötti összefüggést, azaz a mértani hely egyenletét!

A feltételek szerint tehát a *C* pont tetszőleges a szögelfordulása után a *k* kör *AE* íve legördült a *K* kör *AE'* ívén, és a *249. ábra* szerint:

$$\widehat{A'E'}=\widehat{AE}=\widehat{AE'}=nr\alpha=r(n\alpha),\quad \text{azaz}\quad \beta=n\alpha.$$



248. ábra



249. ábra

Így az

$$OC'B\sphericalangle=\pi-\beta=\pi-n\alpha,$$

tehát

$$\varepsilon=\pi-\beta-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-(n-1)\alpha.$$

Az ε felhasználásával az *A'* pont abszcisszája:

$$x=OG=OD+DG=OD+FA'=(n-1)r\cos\alpha+r\sin\varepsilon=$$
$$=(n-1)r\cos\alpha+r\cos(n-1)\alpha.$$
$$x=r[(n-1)\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha].$$

Hasonló módon az *A'* pont ordinátája:

$$y=A'G=C'D-C'F=(n-1)r\sin\alpha-r\cos\varepsilon=$$
$$=(n-1)r\sin\alpha-r\sin(n-1)\alpha.$$
$$y=r[(n-1)\sin\alpha-\sin(n-1)\alpha].$$

A fentiek szerint a keresett mértani hely paraméteres egyenletrendszere :

$$x=r[(n-1)\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha]$$
$$y=r[(n-1)\sin\alpha-\sin(n-1)\alpha].$$

A Násziraddín-tétel szerint $n=2$, tehát $x=2r\cos\alpha$ és $y=0$. A mozgó *A* pont ordinátája tehát állandóan nulla, az abszcisszája pedig felveszi a [2*r, — 2r]* intervallum minden értékét. A gördülő *k* kör *A* pontja tehát valóban a *K* kör *2AO* átmérőjét írja le.

Érthető, hogy e tételt, amely szerint tehát két körmozgás eredőjeként egyenes vonalú mozgás is kapható, éppen a nagy csillagász, Kopernikusz (1473-1543) általánosította.

Azért, hogy a Násziraddín munkásságáról vázolt kép teljesebb legyen, megemlítjük, hogy eredményesen foglalkozott optikával és filozófiával is.

Habár a VIII. században elkezdődött az a folyamat, amely az Arab

Birodalom kisebb részekre, majd országokra bomlását okozta, mégis a sokszor nagyon zavaros politikai, vallási és társadalmi konfliktusok ellenére többször kialakult - rendszerint egy-egy tudományszerető uralkodó körül - olyan tudományos központ, amely folytatta az elődök által abbahagyott munkát, amely képes volt nemcsak megérteni és átvenni a tudományos eredményeket, hanem azokhoz lényegesen hozzá is tudott járulni. Ilyen kulturális centrum alakult ki a mongol hódító, TAMERLAN unokája, a tudós csillagász és matematikus MUHAMMAD GURAGAN ULUGBEK (1394-1449) pártfogásával Szamarkandban is. A centrum központja itt is a nagy csillagvizsgáló volt, amelynek hatalmas megfigyelőívei ma is láthatók. Ebben a szamarkandi obszervatóriumban állították össze az ún. Guragan csillagászati táblázatot az átvizsgált és kijavított ptolemaioszi csillagkatalógus alapján. E táblázatot használta 200 évvel később Tycho Brahe is. Sajnos ez a XV. századi imponáló tudományos iskola a hanyatló középkori arab világ utolsó nagy kulturális demonstrációja volt, és ezt állapíthatjuk meg az arab matematikáról is. Ulugbek pártfogását élvezte a Szamarkandba sereglő tudósok között az utolsó nagy perzsa matematikus és csillagász al-Kási is.

AL-KÁSI DZSAMSID GIJÁSZADDÍN (?-1429)

Mint neve is mutatja, szülőhelye az iráni Kásán. Különösen nagy jártasságra tett szert a numerikus számolás területén. Ez felölelte a harmadfokú egyenleteknek iterációval való megoldását, a „Horner-módszer” alkalmazását, a tetszőleges természetesszám-kitevővel való gyökvonást lineáris interpolációval, a π 16 tizedes pontossággal való meghatározását és trigonometriai táblázatok készítését.

1427-ben jelent meg *Az aritmetika kulcsa* című könyve. Ebben **al-Kási** ismertette a tizedes törteket, amelyeket saját találmányának tekintett, bár lehetséges, hogy legalább az ötlet Kínából származott (308. oldal). Mindenesetre könyve az első írásos ismertetés a tizedes törtekkel való számolás szabályairól. Kár, hogy ezt a könyvet nagyon későn ismerték meg Európában, így a felfedezés feledésbe merült, és ez a számfajta csak 1585-ben vált ismeretessé **Simon Stevin** *La disme* (A tizedes egység) című munkája nyomán.

Al-Kási arra volt a legbüszkébb, hogy pontosabban adta meg a 2π közelítő tizedes törtjét, mint előtte bárki, azaz 16 tizedes pontossággal. Ezt úgy érte el, hogy az *Értekezés a körről* című, 1427 körül megjelent tanulmányában kiszámította a $3 \cdot 2^{28}$ oldalú szabályos sokszög kerületét, és ezt elosztotta a sokszög köré írható kör sugarával. Ilyen módon nyerte a

$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

eredményt.

Az érdekesség kedvéért itt jegyzem meg, hogy sok olyan mondóka létezik, amely megkönnyíti a π szám valamelyik közelítő értékének a megjegyzését. Ezek közül idézek egy angol szöveget:

How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. (Mennyire kívánok egy italt, természetesen alkoholt, a nehéz kvantummechanikai előadások után.) Az angol mondat egymás utáni szavainak betűszáma adja rendre a π közelítő tizedes törtjének a számjegyeit: $\pi \approx 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 79$.

Ulugbek trigonometriai táblázatokat is készített. Ezek összeállításánál felhasználta **al-Kási** azon eredményét, amelyet a sin **1**° számára kapott. **Al-Kási** abból indult ki, hogy az egyenlő oldalú háromszögből ismeri sin 60° értékét, a szabályos tízszög egy középponti háromszögéből pedig a sin 72°-ét is.

E két érték segítségével meghatározta a 12° szinuszát. Ehhez felhasználta a Ptolemaiosz-tételt (264. oldal). A sin 12°-ból, ugyancsak a Ptolemaiosz-tétel igénybevételével, már ki tudta számítani a 6°, abból pedig a 3° szinuszát. A legnagyobb teljesítménye azonban ezután következett, amikor a sin 3° értékéből meghatározta a sin 1° értékét. Erre egy ügyes iterációs eljárást talált, amelyet kissé leegyszerűsítve ismertetek. Az eljárás alapja a $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha — 4 \sin^3 \alpha$ képlet, vagy hogy csupa pozitív együttható szerepeljen:

$\sin^3 \alpha + 0{,}25 \sin 3\alpha = 0{,}75 \sin \alpha.$

Jelöljük $\sin \alpha$-t x betűvel, és legyen $\alpha = 1°$, továbbá a középiskolás

szögfüggvénytáblázatból olvassuk ki sin 3° értékét, ami 0,0523. Ebben a speciális esetben egyenletünk így alakult:

$x^3 + 0{,}013\,075 = 0{,}75x.$

Foglalkozzunk ezután az ugyanilyen alakú

$x^3 + p = qx$

harmadfokú egyénlettel, amelyről tudjuk, hogy *p* és x azonos nagyságrendben igen kicsi szám. Rendezés után:

$$x = \frac{x^3 + p}{q};$$

Az előbbi kikötés szerint *p* mellett az x^3 elhanyagolható, azért jogos, ha első megközelítésben az egyenlet gyökét p/q-nak vesszük; Legyen tehát

$x_1 = p/q$, és így $x = x_1 + y$,

ahol *y* az x_1-hez képest kicsi. Az eredeti egyenlet szerint:

$$x_1 + y = \frac{(x_1 + y)^3 + p}{q}.$$

Mivel *y* az x_1-nél sokkal kisebb, azért hanyagoljuk el a jobb oldal számlálójában az y-os tagokat. Ekkor második és az előbbinél jobb megközelítésben x számára kapjuk az

$$x_2 = \frac{x_1^3 + p}{q}$$

közelítő értéket, amelyre nézve $x = x_2 + z$, ahol z x_2-nél jóval kisebb.

Az eredeti egyenlet szerint tehát:

$$x_2+z=\frac{(x_2+z)^3+p}{q}.$$

Lévén a z az x_2 mellett kicsiny, megint elhanyagolhatjuk a jobb oldal számlálójában a z-s tagokat, és így x számára újabb, az előbbieknél jobb közelítést kapunk:

$$x_3=\frac{x_2^3+p}{q}.$$

A most vázolt eljárást ismételve nyerjük a mind jobban közelítő értékek következő sorozatát:

$$x_1=\frac{p}{q}$$

$$x_2=\frac{x_1^3+p}{q}$$

$$x_3=\frac{x_2^3+p}{q}$$

$$\vdots$$

$$x=\frac{x_{n-1}^3+p}{q},$$

ahol x_n mind jobban megközelíti az egyenlet gyökét, ha teljesül, mint ahogy a mi konkrét egyenletünknél teljesül, hogy x^3 sokkal kisebb x-nél.

Alkalmazzuk ezt az ismétléses eljárást a mi egyenletünkre. Tekintve, hogy az általunk használt táblázat, amelyből a sin 3° értékét vettük, négyjegyű, azért a megfelelő kerekítéssel

egyenletünkben $p=0{,}0131$ és $q=0{,}75$. Ezekkel az adatokkal számolva már az iteráció második lépése után megkapjuk az

$x=\sin 1^\circ \approx 0{,}017\,473\,7$

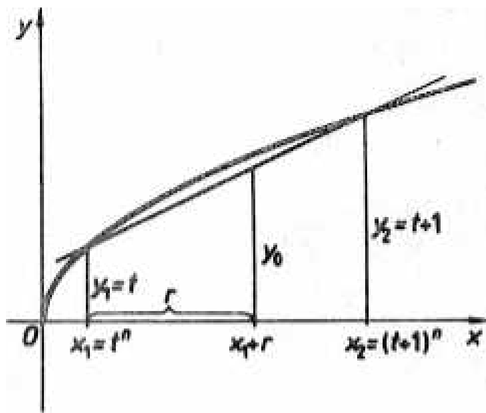
értéket, ami négy tizedesre kerekítve megegyezik a táblázatunkban feltüntetett, $\sin 1^\circ \approx 0{,}0175$ közelítő értékkel.

AL-KÁSI NÁLUNK PONTOSABBAN SZÁMOLT. AZ Ő KIINDULÓ HARMADFOKÚ EGYENLETE AZ

$x^3+0{,}785\,039\,343\,364\,400\,6=45x$

volt, amely kétféleképpen tér el a példaképpen bemutatott egyenlettől. Al-Kási szögfüggvényértékei nem az egységsugarú, hanem a 60 egység sugarú körre vonatkoznak. Ez a p/q értékét nem másítja meg. Ezenkívül azonban **Al-Kási** a $\sin 3^\circ$ értékét 16 tizedesjegy pontossággal határozta meg. Az erre alapozott szögfüggvénytani táblázatok 9 jegyre megbízhatóak voltak.

Ugyancsak ügyesen, tulajdonképpen lineáris interpolációval határozta meg **al-Kási** az $y = \sqrt[n]{x}$ közelítő értékét, a következőképpen:



250. ábra

Legyen x értéke a t^n és a $(t+1)^n$ között, azaz

$x_1=t_n<x<(t+1)_n=x_2$.

Az x_1 és x_2 „abszcisszáknak” megfelelő „ordinátákat” jelöljük y_1-gyel és y_2-vel *(250. ábra),* tehát:

Ha $x=x_1=t^n$, akkor $y=y_1=t$, és ha $x=x_2=(t+1)^n$, akkor $y=y_2=t+1$.

Ha most az $y=\sqrt[n]{x}$ görbéjén feltüntetjük az $(x_1;y_1)$ és $(x_2;y_2)$ pontokon átmenő szelőt, akkor ennek egyenlete:

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Vegyük most tekintetbe, hogy $x=x_1+r=t^n+r$, ahol $r>0$ és $t^n+r<(t+1)^n$.

Ha behelyettesítjük a szelő egyenletébe az x helyett a (t^n+r) értéket, valamint az x_1, x_2, y_1 és y_2 fentebbi kifejezéseit, akkor természetesen az egyenesnek az x_1+r abszcisszájú pontjához tartozó y_0 ordinátát kapjuk meg. Ez pedig jó közelítéssel megadja az ugyanezen abszcisszához tartozó $y=\sqrt[n]{x}$ keresett értéket. Így:

$$y\approx y_0=t+\frac{t+1-t}{(t+1)^n-t^n}(t^n+r-t^n),$$

azaz

$$y\approx t+\frac{r}{(t+1)^n-t^n},$$

amint azt al-Kási is megállapította.

Al-Kási munkáiban szintén megjelenik a „Pascal-háromszög”, jeléül annak, hogy ő is ismerte a binomiális tételt pozitív egész kitevőkre.

Mielőtt az utolsó nagy arab matematikussal búcsút mondanánk a középkori arab matematikának, megemlékezünk röviden még két olyan tudósról, akik a valamikori nagy Arab Birodalomnak a nyugati szélén éltek. Az egyik ezek közül az-Zarkáli

(Azarquel, 1029-1100), aki a mai Spanyolország déli részén fekvő Toledóban és Córdobában működött. Korának legkiválóbb megfigyelő csillagásza volt. Ő állította össze a híres toledói bolygótáblázatot, és ezzel alapot teremtett az Alfonz-féle táblázatoknak. Sokáig használták trigonometriai táblázatait is.

E megemlékezést teszem főleg azért, hogy felhívjam a figyelmet a Córdobai Kalifátusra. Területén, Córdobában, Granadában, Toledóban és Sevillában élénk kereskedelmi és kulturális centrumok alakultak ki. Az ottani egyetemeken számos európai is tanult. Córdoba könyvtára **II. al-Hakam** uralkodása (961-978) alatt egyesek szerint 400 000, más források alapján 600 000 kötetet őrzött: szépirodalmi és tudományos műveket. A X. és a XI. században Európában a tudományosság és a művészetek hordozója a mohamedán Spanyolország volt. Ez nem jelentéktelen befolyást gyakorolt a későbbi nyugat-európai kultúra kibontakozására.

Egy másik spanyolországi arab tudós **Abul-Haszan Ali ibn Muhammad al-Kalaszádi** (?-1486). Mauritániai matematikus volt. Először Granadában, aztán pedig Tuniszban dolgozott. Írt egy matematikai művet *A gobár tudomány rejtelmeinek a feltárása* címen, aritmetikai és algebrai tartalommal. Új, önálló eredményei nem voltak, mégis említésre érdemes, mert megkísérelte az algebrai szimbólumok bevezetését. Ez abban állt, hogy a megfelelő szónak a kezdőbetűjét írta le. Így az egyenletben az ismeretlent az együttható fölé írt *s* betű (sai = dolog), a második hatványát az *m* betű (murabba = négyzet) és a harmadikat a *k* betű (ka'b) jelölte.

A sajátos arab matematika kimondottan algebrai jellegű volt. Ennek az algebrának jellemzője, hogy geometriai módszerekkel bizonyít, és numerikus példákkal szemléltet. Az előbbi a görög, az utóbbi a hindu hatásra utal. Az arab algebrában a görög elméleti geometriai és a hindu-kínai gyakorlatias irányzatok összeolvadását láthatjuk. Ez eredményezte a trigonometriában a numerikus módszerek kifejlesztését és az algebrában az aritmetikai alapozást. Az arab matematika EUKLEIDÉSZ *Sztoikheiájában* tanulmányozásából, értelmezéséből nőtt ki, legalábbis részben. Ezt a művet a VIII. és a XV. század között mintegy 50 arab matematikus fordította le. Természetesnek tűnik tehát, hogy EUKLEIDÉSZ fő problémái az arab matematikában továbbéltek. Ezek közé tartozik az

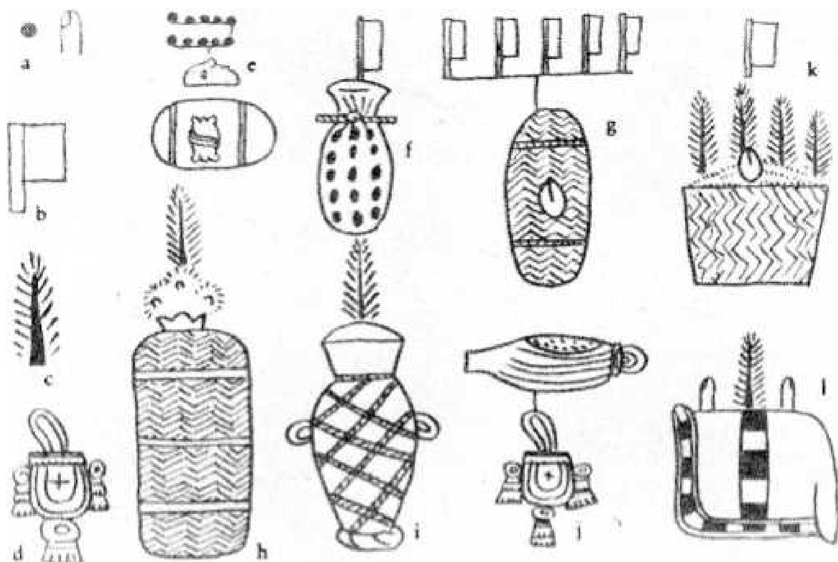
arányelmélet, az irracionalitás és a párhuzamossági posztulátum kérdése.

A MAJÁK

A MAJA SZÁMÍRÁS

Az eddigiek folyamán biztosan nem estünk a túlságos Európa-centrikus szemlélet bűnébe, hiszen szó volt ugyan Dél-Európáról, de mellette, sőt előtte beszéltünk még az ázsiai és afrikai kultúrák bennünket érdeklő történetéről. A következő lépésünk még mindig nem Nyugat-Európába vezet, hanem a tőlünk távoli földrészre, Amerikába. Ez az egyetlen olyan kontinens, ahol nem találták meg az ősember nyomát. Ezért mai tudásunk szerint úgy gondoljuk, hogy benépesedése mintegy 30 000-50 000 évvel ezelőtt bevándorlással történhetett. Ekkor állt elő kétszer is olyan helyzet, amelynél a nagyfokú eljegesedés következtében a tenger szintje olykor 100 m-rel is csökkent, és így száraz lábbal át lehetett jutni a Bering-szoroson át az amerikai kontinensre. A hideg elől délebbre menekülő állatok nyomában volt a vadászó ember is. Az Amerikába átkerült embercsoportok a tavak és folyók mentén mind délebbre vonultak. Ezt az amerikai északi-déli irányú népvándorlást siettette a később érkezők nyomása is. Tudomásunk szerint Közép-Amerikában, azon a területen, amely most bennünket érdekel - pontosabban Mexikó déli részén, a mai Guatemalában és Honduras északi felén -, az első emberi települések kb. 15 000-20 000 évvel ezelőtt keletkeztek. Érdeklődésünk azért fordult most éppen erre, az Észak-Amerikát Dél-Amerikával összekötő földszorosra, mert itt alakult ki az amerikai földrész első és a II-IX. században a legfejlettebb kultúrája.

Ez a kultúra az i. e. 3000-2000 év táján kezdett kibontakozni teljesen önálló módon. Ekkor fedezték fel az itt szétszórtan élő olmék indiánok, hogy miként lehet a trópusi őserdőkkel borított, nedves talajon, az erdőégetéssel szabaddá tett földön kukoricát termelni. Civilizációjuk magas szintjét jelzik azok a 3-4 m magas, egyetlen bazalttömbből faragott, óriási emberfejek, amelyek ezen a kő nem látta és kereket nem ismerő vidéken kivívják a ma emberének döbbent meglepetését.



Az azték „képszámírás”:

a) 1 (pont vagy ujj);

b) ***20*** (zászló);

c) 400 (haj);

d) 8000 (tarsoly);

e) 10 (maszk);

f) 20 (erszény);

g) 200 (kakaóbabköteg);

h) 400 (gyapotköteg);

i) 400 (szirupos edény);

j) 8000 (levélköteg táskával);

k) 20 (kosár kakaóbabbal);

l) 402 (gyapjútakaró két ujjal)

Az olmék civilizáció az i. sz. 300. évig tartott. Ekkor jelentek meg a színen a maja indiánok. Valahonnan északról jöttek, és megérkezésükkor már meglehetősen magas kultúra hordozói voltak. Ismerték a pontos naptárkészítés titkát, és ez a tudás vált a kezükben hatalommá. A fölégetett őserdő talajába ugyanis szinte napra pontosan kellett elvetni a szemet, hogy még kicsírázása előtt el ne rohadjon a tocsogós talajban. A talaj termőképességét még azzal is fokozták, hogy csatornákat építettek a felesleges víz elvezetésére. Ilyen módon hatalmas mértékben megnövelték a mezőgazdasági termelés hozamát. A papság irányítása alatt egy szinte teljesen elkülönült földműves osztály termelte a kukoricát, krumplit, babot, tököt és maniókát. A bő termés feleslegéből az őserdők mélyén népes városok épültek. A nagy maja városok - Tikal, Uaxactún, Copán, Quirigua, Palenque, Uxmal, Mayapán, Chichén Itzá - magas szintű kultúrája magába ötvözte és továbbfejlesztette a környező indián törzsek kulturális és civilizációs vívmányait. Erre mutat az is, hogy például az olmék és a maja írásjelek, különösen a számírás, nagyon hasonló volt.

A maják nem alkottak egységes államot, hanem szervezetileg egymástól független városállamokban éltek. Gazdagságukat tanúsítják a mindent ellepő őserdőből kiszabadított hatalmas templompiramisok, paloták és a faragott feliratokkal ellepett kőoszlopok. Éppen ezeknek az építményeknek a hieroglifái azok, amelyek a mai napig is titokban tartják a még kőemlékeiben is csodálatos nép történelmét. A maják ma élő utódai már nem ismerik sem őseik írását, sem nyelvét.

Valamikor a szó szoros értelmében létezett maja irodalom. A maja kéziratokat, könyveket azonban nagyon alaposan megsemmisítette az emberi butaság. Amikor a XVI. századi spanyol hódítók uralmukba kerítették a Yucatán-félszigetet, akkor az erőszakos hittérítés, legalábbis formailag, kereszténnyé tette az indiánokat, köztük a majákat is. Amikor azonban híre járt, hogy a „megtértek" közül sokan titokban hűek maradtak régi hitükhöz, akkor az inkvizíció vizsgálatot rendelt el. Ennek vezetője **Diego de Landa** ferencesrendi szerzetes volt, Yucatán későbbi püspöke. **Landa** következetes kegyetlenséggel irtotta a tévelygőket és mindazt, ami a régi vallásra akár csak emlékeztetett is. Ekkor vált a tűz martalékává minden fellelhető szent irat, a papok minden

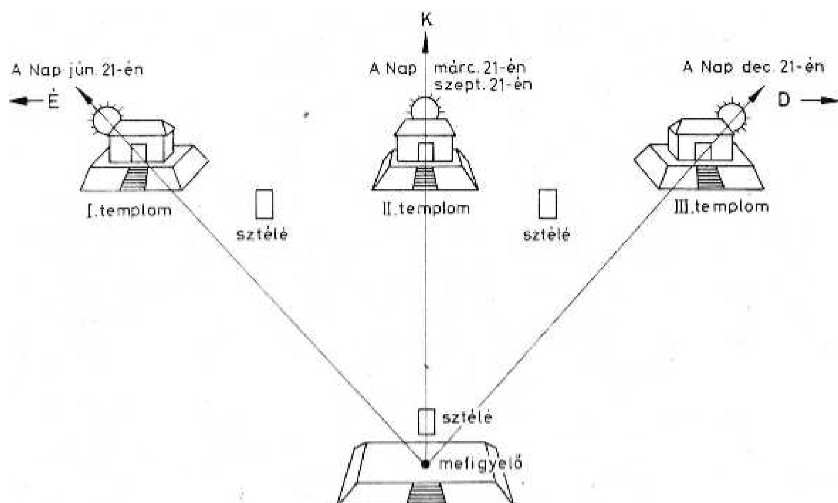
feljegyzése, azaz minden, Yucatánban elérhető írott emlék. Úgy látszik, a kínai könyvégetés (303. oldal) nem áll példa nélkül a történelemben.

Amikor azonban a XIX. században a közép-amerikai őserdő véletlenül megtalált romvárosai kiváltották a csodálatot és a rendszeres régészeti kutatásokat, megindult a nyomozás a maja írások után is. Európa nagy könyvtárainak szinte laponkénti átnézése árán csakugyan előkerült 3 maja kézirat. Az egyik, harmonika módjára összehajtható fikuszháncsra festett iratot Drezdában, a másikat Madridban, a harmadikat Párizsban őrzik. Ezeket megelőzően BRASSEUR DE BOURBOURG neves francia kutató a madridi Királyi Történelmi Akadémia könyvtárában megtalálta LANDA jelentését, vagyis a *Yucatánban történt dolgok leírását,* illetve ennek rövidített másolatát. Ebből kitűnik, hogy LANDA igen jó ismerője volt a maják életének. Annál különösebb, hogy a maja kultúra e kiváló, de elvakult szakértője megsemmisített minden „ördögi sugallatra” ihletett kéziratot, amelyből az utókor értesülhetett volna e távoli indián nép történetéről. Mégis ez a Landa-féle jelentés adta akaratlanul is az első segítséget a maja írás megfejtéséhez. Megtalálható benne ugyanis a kezdeti nagy reményekkel biztató maja ábécé. Ez a Landa-féle összeállítás azonban maga is rejtélyesnek bizonyult. A maja írás részben szótagírás volt, mint például az egyiptomi, részben pedig képírás. A Landa-féle ábécé csak a szótagjelekről ad felvilágosítást, de azt is olyan módon, hogy megértése csak 1955-ben sikerült Jurij Knorozov szovjet kutatónak. Így a maja írások egy részét „kibetűzték”, de a képírásos jelek ma is őrzik titkukat.

1

Legismertebbek a kőoszlopoknak, a sztéléknek a faragott feliratai. A görög eredetű sztélé szó olyan kőoszlopot vagy táblát jelent, amelyre domborműveket: képeket vagy feliratokat véstek.
Ilyen sztélék találhatók a maja földön mindenütt, legtöbb a déli Quiriguában. Ezek arra szolgáltak, hogy hírt adjanak az utókornak egy-egy jelentős történelmi eseményről. Minden oszlopon fellelhető a megörökített esemény napra pontos dátuma, a maja naptárkészítés tudományának beszédes tanújele.

252. ábra



A naptárkészítés pedig el sem képzelhető gondos csillagászati megfigyelések nélkül. Minden bizonnyal a hatalmas piramistemplomoknak nemcsak kultikus szerepük volt, hanem csillagászati megfigyelőhelyként is működtek. Erre mutat például Chichén Itzá piramisa, amelyre a felvezető lépcsők száma 356, vagy a tikali templomok elhelyezése is, amint azt a *252. ábránk* illusztrálja. Arról, hogy a csillagászat milyen fontos szerepet játszott a maják életében, meggyőz a 776-ban Copánban felállított sztélé, amely egy csillagásztalálkozót, valóságos csillagászkongresszust örökít meg. A különböző maja városok csillagász papjai gyűltek ekkor össze, hogy tapasztalataikat kicseréljék, megfigyeléseiket egyeztessék, a naptárkészítés titkait megbeszéljék.

A maják kétféle számírást használtak. Az egyik számjegyei igen könnyen áttekinthetők, viszont az ún. fejszámok olvasása meglehetősen nehéz, és ez a maják világában is a papok tudománya volt. Mind a két számjegyféleséggel a helyi értékes 20-as számrendszerben írtak. Az ötletet minden bizonnyal az ember 20 ujja adta. A húsz szó egyszersmind az egész embert is jelentette. A 20-as számrendszer helyi értékei:

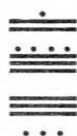
egyesek,

20-asok,

20-szor 20-asok, azaz 400-asok,

20-szor 400-asok, azaz nyolcezresek stb.

A maják helyiérték-sorozatában azonban közvetlenül a 20-asok után törés tapasztalható. Ennek az oka - mint majd meglátjuk - éppen az volt, hogy számírásukkal elsődlegesen a dátumokat jelölték. A maja helyi értékek:



$$= 11 \cdot 7200 + 19 \cdot 360 + 15 \cdot 20 + 3 = 86\,343.$$

253. ábra

egyesek,

20-asok,

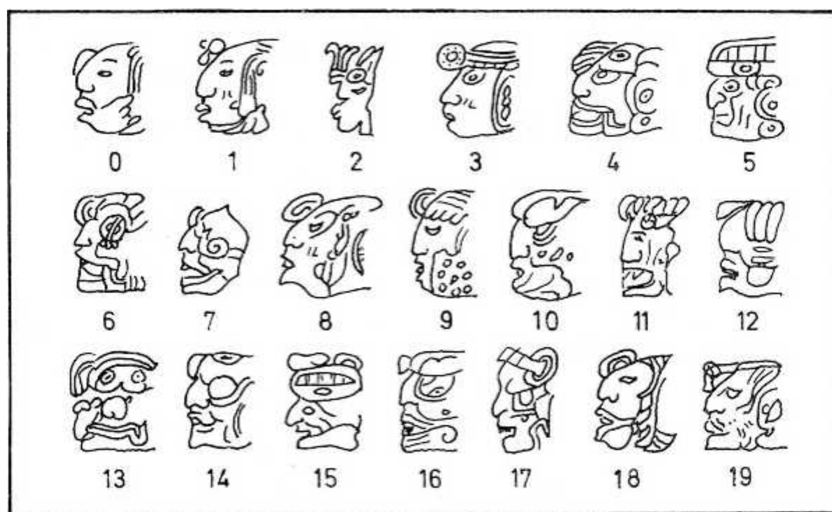
18-szor 20-asok, azaz 360-asok,

20-szor 360-asok, azaz 7200-asok,

20-szor 7200-asok, azaz 144 000-esek stb.

Számírásukban a helyi értékek növekvő sorrendben rendszerint alulról felfelé következtek, tehát függőleges irányban. Az egyszerűbb fajta számjegyeket pontokból és szakaszokból állították össze. A pont értéke 1, a szakaszé pedig 5 egység. Külön kiemelendő, hogy a nulla jelét is használták. Ezzel jó néhány évszázaddal megelőzték a hindu 10-es számrendszerű helyi értékes számírást. A *253. ábrán* látható az említett húsz maja számjegy és néhány, ezekkel felírt szám.

254. ábra



A most bemutatottakhoz teljesen hasonló az ún. fejszámok számjegyeinek a használata. Az elnevezést onnan nyerték, hogy a számjegyeket egy-egy emberi fej rajza jelöli. Ezt a húsz számjegyet szemlélteti a *254. ábra.*

Befejezésül talán nem érdektelen azt is megismerni, hogyan alkalmazták e számjegyeket a dátumok felírásában. Ez egyszersmind fényt vet arra is, hogy milyen gyakorlati szempont okozta a 400-as helyi érték 360-asra való felcserélését. A majáknak volt egy, a mi hetünknek megfelelő időtartamegységük, azonban ez 13 napból állt. Ezeknek a napoknak a 13-as héten belül nem volt nevük, hanem csak sorszámuk. A dátum első száma pedig a 13-as

hét napjának a sorszáma. A maják az évet 18 húsznapos hónapra bontották. A hónap mind a 20 napjának külön neve volt, és természetesen a hónapon belül az előbbitől független sorszáma is (az első nap a nulladik, az utolsó a tizenkilencedik). A maja dátumban ez a két adat is szerepelt, és végül megnevezték a hónapot is. A hónapok nevei rendszerint az akkor esedékes mezőgazdasági teendőkre vagy az időjárási viszonyokra vonatkoztak. Például a 2. hónap a betakarítás, a 12. pedig a vihar hónapja volt. A keltezésben tehát a következő négy adatot tüntették fel az előbbi sorrendben:

1. a napnak a 13-as héten belüli sorszáma,

2. a nap neve,

3. a napnak a hónapon belüli sorszáma,

4. a hónap neve.

Mit jelent például az *5 lamat 6 muan* dátum? Ez vonatkozik a muan nevű hónap hatodik, lamat nevű napjára, amely az akkor folyó hét ötödik napja.

Az általunk megszokott keltezéshez képest a majákét határozottan hiányosnak érezzük: hiányzik az évszám. Nálunk a hónap neve és valamelyik napjának a sorszáma, tehát a napnak e két határozója évenként ismétlődik, tehát csak egy megjelölt éven belül ad pontos időmegjelölést. Gondoljuk át, hogyan van ez a maja naptárban! A nap neve és a hónapon belüli sorszám mindig kölcsönösen és egyértelműen kapcsolódnék össze, ha a maja év pontosan 360 napos lenne. Azonban a maja csillagászok is rájöttek arra, hogy a Nap-év hossza nem 360, hanem - amint ezt kőbe vésett jeleik is megerősítik - 365,2420 nap. A Gergely-naptár szerint a Nap-év hossza 365,2425 nap, a jelenlegi csillagászati mérések szerint valójában 365,2422 nap. A maják tehát egy tízezred nappal jobban megközelítették a valóságos értéket, mint a mai Gergely-naptár. A maják ezért minden 18 hónap után beiktattak az évbe 5 napot, amelyek náluk a nem szerencsés napok közé tartoztak.

Így aztán a napok neve a hónapra vonatkozó sorszámhoz képest évenként öttel eltolódott. Ez azt jelenti, hogy, 4 évnek kellett

eltelnie, hogy a sorozatos 5 napi eltolódásból összejöjjön egy teljes hónap, azaz valamely napnév és a hónapon belüli sorszáma 4 évenként találkozott. Közben ezzel párhuzamosan változtak a 13-as hétre vonatkozó napsorszámok. Ilyen módon - mivel 365-ben a 13 megvan 28-szor és még marad 1 - minden év első napjának a hétre vonatkozó sorszáma 1-gyel ugrott, tehát csak 13 év múlva kerültek ugyanolyan kapcsolatba a hétre és a hónapra vonatkozó sorszámok. Az elmondottak szerint: 4 éves periódus hozta ugyanolyan helyzetbe a napneveket és a hónapra vonatkozó sorszámokat, ugyanakkor 13 éves periódusonként kerültek ugyanazon párba a hétre és a hónapra vonatkoztatott sorszámok, tehát 13-szor 4, azaz 52 éves ciklusonként fordult elő egyszer, hogy egy napnak mind a három, illetve négy „koordinátája” megegyezzék valamelyik előtte valóval. A példának felhozott *5 lamat 6 muan* dátum tehát 52 évre pontosan definiálta a napot.

Természetesen ennél hosszabb távra választanunk kell egy kezdeti időpontot is, ahonnan az időt számítjuk. Ez nálunk **Krisztus** születési éve. Ehhez hasonlóan a majáknál is megvolt az időszámítás kezdete, mégpedig az i. e. 3113 év. Nem tudjuk, hogy milyen nevezetes eseménynek köszönheti ez az időpont a kezdet szerepét. Azért, hogy az 52 éves periódusok se tegyék kétségessé valamely nap meghatározását, a maják bevezették a következő időegységeket:

1 kin	= 1 nap		
20 kin	= 1 vinal		
18 vinal	= 1 tun	=	360 kin
20 tun	= 1 katun	=	7 200 kin
20 katun	= 1 baktun	=	144 000 kin
20 baktun	= 1 piktun	=	2 880 000 kin
20 piktun	= 1 kalabtun	=	57 600 000 kin
20 kalabtun	= 1 kincsiltun	=	1 152 000 000 kin.

Az elnevezéseket a majakutatók adták, az eredeti ősi neveket nem ismerjük. Mit jelent a mai időszámítás szerint például a 8 baktun 5

katun 12 tun 3 vinal 12 kin?

8 baktun	= 8 ·	144 000 kin	=	1 152 000 nap
5 katun	= 5 ·	7 200 kin	=	36 000 nap
12 tun	= 12 ·	360 kin	=	4 320 nap
3 vinal	= 3 ·	20 kin	=	60 nap
12 kin	=	12 kin	=	12 nap
		összesen:		1 192 392 nap.

Ebben 1 év napjainak a száma (számoljunk 365,25 nappal) 3264-szer van meg (maradt még kb. 216 nap). Mivel a maja kezdő év i. e. 3113, azért a mi naptárunk szerint a fenti dátum az i. sz. 151. évre vonatkozik.

A most bemutatott keltezési mód mellett megmaradt a régebbi, 52 éves periódus is. Például egy korai maja történelmi dátumot őriz az ún. leideni lemez. Ezen a mi írásunkkal ez olvasható:

8 baktun 14 katun 3 tun 1 vinal 12 kin 1 eb 0 jaskin.

A felirat négy utolsó tagját nem tekintve az i. sz. 322. évre kell gondolnunk. A négy utolsó rész azonban olyan eb nevű napra mutat rá, amelynek a hétre és a jaskin nevű hónapra vonatkozó sorszáma is az első. Meg kell tehát keresnünk a 322. év környékén ezt a legközelebbi napot, és így az évszám i. sz. 317-re alakul.

A most olvasottak alapján nagy biztonsággal állíthatjuk, hogy a maja indiánok számírását szinte teljesen kisajátította a csillagászat, illetve a naptár. Sajnos még nem áll rendelkezésünkre egyetlen olyan megfejtett maja szöveg sem, amely e számírásra alapozott aritmetikának, vagy akár valamilyen gyakorlati szükségletet szolgáló más matematikai ismeretnek a létezésére utalna.

Ahogyan a maják megjelenése a kultúra színpadán rejtélyekkel teli, ugyanúgy azt sem tudjuk, miért hagyták el hirtelen, majdnem egyszerre a hihetetlen munkával és pompával felépített városaikat, hogy befedje azokat a mindent elnyelő őserdő.

AZ EURÓPAI MATEMATIKA KÖZÉPKORA

A KÖZÉPKORI EURÓPA

VALÓBAN OLYAN SÖTÉT?

A politikai történelem középkorát 476-tól, a Nyugat-római Birodalom bukásától szokás számítani. A középkor végét pedig a történészek Amerika felfedezésének évében, 1492-ben, vagy újabban inkább 1453-ban jelölik meg, abban az évben, amelyben a törökök bevették Konstantinápolyi. Ebből a korszakból a XIII. és a XIV. század már a reneszánsz időszaka, amely kb. a XVI. század végén fejeződik be. Egy tudomány fejlődésének a korszakai általában nem igazodnak a politikai történelem határköveihez, mégis az időben való jobb eligazodás végett jó, ha ilyen többé-kevésbé mesterkélt időszakokat a matematika történetében is elhatárolunk. Úgy tetszik, helyes, ha a matematika ókorát az athéni filozófiai iskola megszüntetésével, azaz az 529. évvel zárjuk, és a matematika reneszánszát **Regiomontanus** felléptétől, tehát az 1450-es évektől számítjuk. Ez nagyjából jól igazodik az általános történelem korszakaihoz is.

A középkor az egyetlen olyan időszak, amelyhez rendszerint hozzáteszik a sötét jelzőt. Amikor azonban azt mondjuk, hogy „sötét középkor”, akkor jogtalanul általánosítunk kétféle irányban is. Először is: ilyenkor csak Európára, pontosabban Nyugat-Európára gondolunk, nem törődve azzal, hogy a kínai, az indiai és az arab középkor a fejlődés századait jelentette mind a művészetek, mind a tudományok terén, beleértve a filozófiát is. Igaz, hogy ez a fejlődés sokszor távol állt a mai értelemben vett európai kultúrától, de ki állítja, hogy csak európai kultúra létezik, és milyen jogon rekesztjük ki látókörünkből a nem európai népek civilizációját és kultúráját? Ezek szerint tehát nem beszélhetünk általánosságban sötét középkorról, hanem csak Európa sötét középkoráról.

Még így is feltehető azonban két kérdés: 1. A középkor teljes időtartama megérdemli-e az elmarasztaló ítéletet? 2. Az európai középkor civilizációjának és kultúrájának minden területére ráillik-e a sötét jelző?

Az első kérdésre a válasz nyilvánvalóan: nem. Amikor a Római Birodalom testéről leváltak a nyugat-európai részek, Anglia, Hispánia és Gallia, akkor - már csak a keresztény egyház latin nyelvének köszönhetően is - még sokáig őrizték a római civilizáció vívmányait, főleg azokat, amelyek a földművelés módjára és a gazdasági rendszerre vonatkoztak. Az összetartó központi hatalom hiánya miatt a leszakadt területek azonban elkülönültek egymástól, a köztük fennálló gazdasági kapcsolatok meglazultak, majd megszűntek. A kereskedelem a meglevő kezdetleges kézműiparral együtt visszafejlődött, elsatnyult. A földművelést az ókori energiaforrásra, a rabszolgamunkára már nem lehetett alapozni. A VI-VII. században történelmi szükségszerűség volt, hogy Európában kialakult a hűbériség. Ezekben a századokban azonban a gazdasági élet egyetlen területe sem kívánta a fejlett technikát, kiváltképpen nem a természettudományos ismereteket, persze a matematikát sem. E századokban a matematika csak a legegyszerűbb mérési feladatokat szolgálta, és lehetőséget adott az egyháznak, hogy a húsvét idejét pontosan meghatározza. A középkori elméleti tudományok helyzetét jól szemlélteti az akkori, nyugat-európai matematika áttekintése.

AZ V-IX. SZÁZAD KIEMELKEDŐ MATEMATIKUSAI

Anicius Manlius Severinus Boethius (480?-524?) előkelő római család gyermeke volt. Atyját korán elvesztette, és ezért Symmachius patrícius családjában nevelkedett. Symmachius nemcsak tökéletes nevelést és képzést adott az ifjúnak, hanem később leányát is hozzáadta. Boethius a keleti gótok királyának, THEODORIKnak lett bizalmasa és tanácsadója. Ilyen minőségében sokat tett azért, hogy a gótok körében a műveltség terjedjen. Ebben segítőtársa volt a király másik bizalmi embere: Flavius Cassiodorus (480?-575?). Kettőjük nevéhez fűződik a középkori oktatás anyagának hét részre csoportosítása. A 115. oldalon említettem, hogy Arkhütasz volt, aki a püthagoreusokkal összhangban a matematikát négy részre tagolta: az aritmetikára, a geometriára, a zenére és a csillagászatra. Ehhez a négyeshez, a kvadriviumhoz csatlakozott az oktatásban - éppen BOETHIUSnak és CASSIODORUSnak köszönhetően - az ismeretek egy további hármasa, a trivium, amelynek részei a grammatika, a retorika és a dialektika. A kvadrivium meg a trivium: a „hét szabad művészet”

(septem artes liberales) képezte az egész középkorban az iskolai oktatás anyagát. Cassiodorus leveleiből tudjuk, hogy Boethius latinra fordította Eukleidész Sztoikheiáját, Arisztotelész néhány írását és Platón Timaioszának egy részét. Boethius és Cassiodorus fordításai már jelei voltak annak a folyamatnak, amely eljuttatta a görög tudományt az akkor nemzetközinek számító latin nyelven Nyugat-Európába is. 500 táján Boethius írt egy matematikai művet is. Ennek címe: Institutio arithmetica, azaz Bevezetés az aritmetikába.

A könyv nem sok eredeti részt tartalmaz, inkább NIKOMAKHOSZra alapozva ismerteti a püthagoreus számelmélet egyes fejezeteit, főként a figurális számokat. Ebből a könyvből származik a ma is használt prímszám (numerus primus) és az összetett szám (numerus compositus) elnevezés. BOETHIUSnak apósához írt ajánló soraiból értesülünk, hogy szándékában állt egy geometria-, egy zenei és egy csillagászati könyv írása is, tehát az Aritmetika a kvadrivium első része lett volna. Bizonyos utalások szerint a geometriai és a zenei tárgyú munka kéziratban el is készült. BOETHIUSnak még egy önálló, filozófiai műve ismeretes. Ezt már rabként írta. Theodorik ugyanis azzal gyanúsította, hogy ellene irányuló összeesküvés részese, ezért börtönbe vettette, majd apósával együtt Paviában kivégeztette. A római egyház BOETHIUSt, akit a skolasztikus filozófia megalapozói között tartanak számon, mártírként tiszteli, feltételezvén, hogy az ariánus Theodorik a tudóst hite miatt ölette meg.

Boethius matematikai munkásságához tartozik az is, hogy javította az abakuszon való számolási eljárásokat, továbbá használta és propagálta a hindu számírást. Aritmetikájában olykor a kombinatorika elemeivel is találkozhatunk. Mindezek mellett műve a görög matematikához viszonyítva igen szegényes tartalmú, alacsony színvonalú. A középkor kolostori iskoláiban ez a könyv volt a matematikaoktatás alapja, sőt sokszor még ez sem, mert a Boethius-könyvet forrásmunkául használó más művek még alacsonyabb színvonalat szabtak meg. Ilyen könyvet írt a már említett **Cassiodorus** és a sevillai **Isidorus** (570-636) is. **Boethius** után 150 esztendővel is még csak egyetlen „matematikus” érdemel említést:

Beda Venerabilis (673?-735), a tudomány minden ágát művelő **Tiszteletre Méltó Beda,** a szent egyházatya. Az akkori angol matematika helyzetét híven tükrözi könyvének tárgya: az egyházi naptárhoz szükséges számítások és az ujjakon való számolás. Bizonyára nem hiba, hogy **Beda** ilyen gyakorlati számtant írt, hiszen korának erre szüksége volt. Azért azonban nem lelkesedhetünk, hogy igényesebb matematikai munka a VII. század közepéig Nyugat-Európában nem jelent meg. Amelyik évben szemét lehunyta **Beda Venerabilis,** abban az évben született Angliában **Flaccus Albinus Alcuinus** (735-804), a későbbi tudós bencés szerzetes, aki Franciaországban jelentős művelődéstörténeti szerepet játszott. Tanítómestere BEDÁnak közeli barátja, a yorki **Egbert** volt. Az ő halála után **Alcuin** vette át a yorki iskola vezetését, ahol tanította a hét szabad művészet mindegyikét. Amikor 780-ban **Aalbehrt** hercegérsek meghalt, **Alcuint** küldték Rómába, hogy az érsek utódjának kinevezését elhozza. Útközben, Parmában bemutatták **Nagy Károly** francia királynak, a későbbi nyugat-római császárnak. Az uralkodó nagy súlyt fektetett egyrészt a kereszténység, másrészt a műveltség terjesztésére. Az olvasni alig, de írni egyáltalában nem tudó uralkodó el akarta érni, hogy legalább az egyház papjai írástudók legyenek. Ennek a nagy művelődési célnak nyerte meg **Alcuint,** aki hívására 782-től a királyi udvarban élt. Számos iskolát szervezett, és a királyi udvar előkelőit - beleértve a király családját is - maga oktatta.

A VIII. század második felében ő tett a legtöbbet azért, hogy a római-görög hagyományok átkerüljenek Nyugat-Európába. A matematikatörténet nevét nyilvántartja nemcsak azért, mert többek között az aritmetikát is tanította és terjesztette, hanem azért is, mert oktatási céllal írt egy könyvet *Propositiones ad acuendas iuvenis,* azaz *Feladatok az ifjú elmék élesítésére* címen. Ez voltaképpen egy kevés aritmetikát, geometriát és csillagászatot tartalmazó, a találós kérdések formájába öltöztetett, érdekes feladatok gyűjteménye, amolyan matematikát népszerűsítő könyv, amely megjelenése után mintegy 200 évig éreztette hatását. Jellemzésére következzék néhány belőle vett példa:

A 6. feladat: Ketten vásároltak 100 solidusért disznókat. Minden 5 disznóért 2 solidust fizettek. A vétel után a disznókat két egyenlő részre osztották, aztán eladták azokat úgy, hogy megint

minden 5 disznóért 2 solidust kaptak. Így nagyszerű üzletet csináltak. Hogy lehet az?

A megoldás: A vett disznók száma 250. Ezt két csoportra osztották, de úgy, hogy az egyik csoportba került a 125 legkövérebb disznó, a másik kondába pedig 125 sovány. Ezután a hízott disznókból eladtak 120-at, éspedig 2-t 1 solidusért. Ebből a bevétel 60 solidus. A sovány disznókból 3-at adtak 1 solidusért, és szintén csak 120-tól szabadultak így meg. Ennek a bevétele 40 solidus. Ilyen módon az eladásnál is 5 disznót adtak 2 solidusért, mégis visszanyerték a 100 solidust, és maradt még 10 disznójuk. Ez valóban jó üzlet volt.

A 18. feladat a jól ismert farkas, kecske és káposzta esete: Hogyan lehet átszállítani ezeket a folyón, ha közülük az egyetlen csónakkal egyszerre csak egyet vihetünk át, és nem kaphat a farkas alkalmat arra, hogy megegye az őrizetlenül hagyott kecskét, sem a kecske, hogy megehesse a káposztát?

Megint csak azt mondhatjuk, hogy ez a könyv nagyon hasznos volt, mint ahogy az effajta könyvek ma is hasznosak. A baj csak az, hogy Alcuin kedves könyvecskéje mellett más, komolyabb mű vagy 200 évig nem látott napvilágot Nagy Károly nagy birodalmában.

Itt nyílik alkalom arra, hogy rámutassak a középkori nyugateurópai matematika egy érdekes sajátosságára. Amikor Alcuin az egyik Nagy Károlyhoz írt leveléhez mellékelt egy „elmeélesítő” feladatot is, akkor a levélíró nem feltétlenül azt az elmeélesítést értette, amire mi gondolnánk. Nála az elmeélesítés sokszor azt jelentette, hogy az aritmetikát is igyekezett felhasználni a *Biblia* magyarázatára. Például: Isten 6 nap alatt teremtette a világot. A 6 tökéletes szám. Ez azt jelzi, hogy a teremtés tökéletes. Hasonló példa: Az írás szerint Noé bárkájában 8-an voltak, és tőlük származik a mai emberiség. A 8 azonban nem tökéletes szám, és mutatja, hogy az emberiségnek ez a második eredete nem hibátlan. Végül még egy példa a sok közül: Péter a csodálatos halfogás története szerint 153 halat fogott. Ennek a számnak a

$$153 = 3 * 3 * 17 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15 + 17$$

csodálatos tulajdonsága rejtve tükrözi az esemény rendkívüliségét.

A görög matematika a püthagoreusi számmisztikával indult, az európai középkor matematikája pedig a keresztény számmisztikával.

ALCUINnal kapcsolatban meg kell emlékeznünk kitűnő tanítványáról, Hrabanus MAURUsról (784-856), aki Németországban végezte azt a kultúrmunkát, amelyet mestere Frankhonban. Szülővárosában, Mainzban érsekként fejezte be életét. Ő alapította Fuldában az akkor hatásaiban jelentős kolostori könyvtárat és iskolát. Súlyt helyezett a matematika oktatására is, de csak olyan alacsony szinten, mint volt tanítója.

Első feltett kérdésünkre, ez után az áttekintés után, azt hiszem, nyugodt lélekkel válaszolhatjuk, hogy a matematikai tudományok területén az európai középkor V-IX. százada bizony sötét volt. Európának ekkor még arra sem volt igénye, hogy a görög elődök vagy a kortárs arabok matematikai ismereteit átvegye. A kezdetleges földműveléssel együtt járó satnya iparnak és kereskedelemnek nem volt szüksége a négy alapműveletre sem. Még a X. századi **Gerbert** szerzetest is egy időben azzal vádolták, hogy képes bármekkora szám elosztására, ez pedig nincsen az ördöggel való cimboraság nélkül. Egyébként a később pápává lett **Gerbert** szerzetes lehet az időben az a határkő, amelynél az európai matematika középkorának sötétje már kezdett világosodni.

Mielőtt azonban ennek a már megvilágosodó korszaknak a megismeréséhez fognánk, kíséreljünk meg válaszolni a második, az elsőnél valamivel általánosabb kérdésünkre: a középkori civilizáció és kultúra minden területére ráillik-e a sötét jelző. Nem vitás, hogy az V-VIII. században Európa teljesen visszaesett a félbarbár állapotba. A kezdetleges ipar és a pénzt is nélkülöző cserekereskedelem, a városok elsorvadása, sok helyen szinte teljes eltűnése (Anglia) a civilizáció és a kultúra halódását eredményezték. A nyugaton kialakult királyságok nagyon nehezen álltak ellen az északi normannok, a déli arabok és a keleti magyarok támadásainak. Az elszabadult erkölcsök is hozzájárultak ahhoz, hogy az emberi élet mindenütt bizonytalanná vált. A földművelést akadályozták az erdőrengetegek és a nehéz, kötött talaj. Mégis ezen a területen jelentkezett a kibontakozás, ami intő példa arra, hogy nem eshetünk az ókori görögök hibájába, akik a fennen szárnyaló,

testetlen gondolatok világa mellett nem voltak hajlandók becsülni a fizikai munkával „beszennyezett” gyakorlati találmányokat. Amint Nyugat-Európa példája mutatja, éppen a sokszor jelentékteleneknek látszó kis találmányokra épülhet a civilizáció és a kultúra egésze. Ezek az emberi életet megkönnyítő, a művészi és a tudományos élethez időt és energiát biztosító lelemények lettek Európában a kultúra pilléreivé.

Miről is van szó? Lényegében annak a felfedezéséről, hogy Európa belső területein is lehet jó eredménnyel földművelést folytatni, hogy kellő technológia mellett itt bőséges termést ad a búza, a rozs, az árpa, a komló, a szőlő. A X. században sikerült a földművelést két irányban is szerencsésen átalakítani. Dél-Európában és általában a Földközi-tenger mentén a lazább talajoknak megfelelő faekével szántottak. Ez az eke vékony barázdát húzott, és ahhoz, hogy a vetés alá némileg előkészítsék a földet, kétszer kellett szántani, hogy egyszer fel legyen szántva: először hosszában, azután keresztben. A X. században Nyugat-Európában feltalálták a széles ekevasú, kerekes ekét. Ezen nem a szántó paraszt izomereje szabta meg a szántás mélységét, hanem előre be lehetett azt állítani. Az ekevas szélessége feleslegessé tette, hogy egy területet kétszer kelljen felszántani. Ehhez a mélyszántáshoz azonban húzóerő kellett, amit azzal az egyszerűnek látszó fogással biztosítottak, hogy a lófojtogató nyakhám helyett szügyhámot használtak, és így a ló teljesítőképessége megháromszorozódott. Lehetővé vált tehát a mélyszántás. Az évi termést jelentősen növelte még egy forradalmi újítás. A Földközi-tenger mellékén a gazda a földjének csak a felét vetette be. Ez a rész a következő évben pihent, és az előbbi ugaron hagyott területbe került a mag. Nyugat-Európában a IX-X. században a kétnyomásos gazdálkodást felváltotta a háromnyomásos. Az egész föld egyharmad részébe őszi, a második harmadba tavaszi vetés került, és csak a harmadik harmad pihent, illetve maradt legelőnek. A következő években a parcellák szerepe ciklikusan cserélődött. Így minden évben a földterület fele helyett a kétharmada hozott termést.

Az új földművelési módszerekhez járult a X-XI. században a vízikerekek elterjedése. A XI. század Angliájában minden 400 főre jutott egy vízimalom. A XIII. században a természetes energiaforrásokhoz csatlakozott a vízszintes őrlőkövű szélmalom

is. A forgómozgásnak egyenes vonalúvá alakítása lehetővé tette a kalapács, a fűrész, a gyalu, a présgépek és más munkaeszközök a vízi erővel való működtetését. Ekkor már az európai ember felszabadult fizikai és szellemi energiáit fordíthatta az ókori kultúra befogadására, megújítására és továbbfejlesztésére. Az újjáéledő és az újonnan születő városokban felhalmozódó gazdagságból már tellett hatalmas templomok építésére, iskolák, egyetemek létesítésére, sőt még olyan kockázatos kalandra is, mint a keresztes háború. A XII. és XIII. században csupán Franciaországban mintegy 80 pompás katedrális épült. A XIII. században a Hanza Társaság széles hajói már az Anglia és Oroszország közötti hatalmas területen közvetítették az élelmiszereket és iparcikkeket északtól délig, kelettől nyugatig. A vízi energiával működtetett fújtatók nagy lökést adtak a vaskohászatnak, tehát az öntöttvasgyártásnak is és ezáltal az iparnak.

A messze földeket bejáró kereskedők nemcsak az árukat, hanem az ismereteket is közvetítették. Útjaik nyomán számos kínai és arab találmány és tudás lelt új hazára és újszerű felhasználásra. A papírkészítés titka Kínából érkezett hozzánk a XII. században az arab Ibér-félszigeten át. A nyomtatás tudományát bizonyára ugyancsak Kínából hozták a mongolok, de a nyomtatás nagyüzemi módszere már európai érdem. A fa nyomólapokra metszett szöveget felcserélték a különálló betűk szedésével, és 1436-ban **Gutenberg** Mainzban útjára indította a modern könyvnyomtatást.

Az emberiség egy részének bizonyára nagyon küzdelmes korszaka volt ez, amelyből azonban az ember győztesen került ki. Ez a kor szükségszerűen készítette elő és rakta le az újkori Európa kultúrájának az alapjait. Nélküle nehezen születtek volna meg a XVII-XIX. század csillogó felfedezései és az emberi életet tovább könnyítő találmányai.

Amikor az európai középkor sötétségére gondolunk, akkor főképpen a gondolkodás szabadságának a hiányára akarunk rámutatni. Nem vitás, hogy a kereszténység a középkorban nem tartozott a türelmes vallások közé. A térítés sokszor történt erőszakosan, olykor könyörtelenül. Mielőtt ítélkeznénk, itt is feltétlenül figyelembe kell vennünk két dolgot. Az egyik az, hogy a X. századig Európában az

egyház volt az egyetlen olyan szervezet, amely ha nem is teljességében, de őrizte a régi civilizáció és kultúra értékeit a barbár támadások idején, és ugyanakkor harcolnia kellett fennmaradásáért. Befolyásának növelésére a leghatásosabb eszköz az volt, hogy maga is feudális szervezetté vált. Ilyen módon a feudális közigazgatásnak is részese lett, és nagy világi hatalomra tett szert. A XII. században már ellenőrzése alá tudta vonni az európai élet egészét. A tudásnak szinte egyedüli birtokosa és a hatalomnak tekintélyes részese lévén, filozófiájával, de ha úgy látta jónak, akkor az inkvizíció kegyetlenségével is üldözte mindazokat a gondolatokat, amelyek vezető szerepét kétségessé tehették. A filozófia a teológia szolgálólányává lett. A gondolkodás korlátozása, az egyházéval ellentétes véleménynyilvánítás szabadságának a hiánya - el kell ismernünk - a filozófiát is fojtogatta, de - és az ítéletalkotásnál ez a másik meggondolandó tény - hol van az a rendszer, akár ma is, amely ne üldözné - meggyőzéssel vagy erőszakkal - a magára nézve veszélyesnek tartott gondolatokat? Milyen jogon mondhatja a mi, atomkatasztrófától rettegő korunk a középkort sötétnek? Bizonyára a középkor mindennapi embere nem érezte a maga korát sem sötétebbnek, sem világosabbnak, mint a mai ember a saját évszázadát. A középkor tudományos életének hajnalát sokan

Gerbert d’Aurillac (950?-1003) tudós szerzetes működésétől számítják. Ez kissé a matematikára is vonatkoztatható, ő ugyan nem volt igazán matematikus, de kultúrtörekvéseivel elősegítette a matematika kibontakozását is. Valószínűleg szegény család gyermekeként látta meg a napvilágot Auvergne-ben, Aurillac Benedek-rendi kolostora közelében. Itt kezdte tanulmányait. 967-ben a barcelonai **Borel** grófot kísérte Spanyolországba, ahol Vich püspökében, HATTÓban atyai jó barátra talált. A püspök irányította további tanulmányait. Ekkor ismerkedett meg Barcelonában vagy talán a córdobai egyetemen az arab matematikával és a hindu számírással. 970-től Rómában folytatta tanulmányait. Itt figyelt fel a tudós szerzetesre I. Ottó német-római császár, és megbízta unokájának, a későbbi III. OTTÓnak a nevelésével. Az egyházi pályán gyorsan ívelt felfelé. A babbiói apátságot a reimsi, majd a ravennai érsekség követte. Kiemelendő a reimsi működése (972-982). Az általa szervezett iskolában maga is tanította korának szokásos ismereteit. Ezen a körön belül oktatta az abakuszon való számolást is az általa kitalált módszerrel. Abakuszának (71. old.)

elrendezését a *255. ábra* mutatja.

255. ábra

Ezen, az oszlopok tetején, római számok jelzik az egyes helyi értékeket. **Gerbert** 27 oszlopot használt. Az oszlopokban nem az odahelyezett kövecskék száma jelezte az illető helyi érték egységeinek a számát, hanem egy zseton, amelyre ráírta a hindu számírásból ellesett megfelelő számjegyet. Ez volt **Gerbert** újítása. Ábránk a 32 045 kirakását mutatja. Most a százasok oszlopa (C) üres. **Gerbert** azonban a nulla jelét nem használta még a szám felírásánál sem. A művelet elvégzése után az eredményt már nem helyi értékes 10-es számrendszerben, hanem római számokkal írta le. Eljárása tehát különös átmenet a római és a hindu számírás között. Ez arról árulkodik, hogy **Gerbert,** ez az alapjában „humán" beállítottságú tudós foglalkozott ugyan a matematikával, sőt a kor igényeinek megfelelő szinten tanította is, a helyi értékes számrendszer teljes lényegét mégsem tudta megérteni. Példája mutatja, hogy milyen nehéz átállnunk valamely régiről az újra, még akkor is, ha az újat jobbnak látjuk.

Gerbert egyik levelében megmagyarázta az utrechti **Adelbold-**nak, hogy a szabályos háromszög területének a mérőszáma nem azonos az oldal mérőszáma szerinti háromszögszámmal (89. oldal). Példájában a 7 egység oldalú szabályos háromszög területének mérőszáma 21, amiből kitűnik, hogy a $\sqrt{3} \approx 12/7$ közelítést használta. Ugyanekkor a hetedik háromszögszám a $(7*8)/2 = \mathit{28}$ nem a háromszög területét jelenti, hanem 28 darab egységnégyzet területének az összegét - írta Gerbert.

Gerbert ismerte és népszerűsítette Eukleidész Sztoikheiáját, rámutatva arra, hogy a pont, a vonal és a felület mindig csak testhez kötötten jelentkezik, de önálló létük nincs. Vele hoznak kapcsolatba három matematikai tárgyú írást. Az egyik címe: Az abakuszon számolás szabályai, a másiké: Könyvecske az osztásról.

A harmadik geometriai tárgyú, pontosabban: alapismeretekkel, földméréssel és a figurális számokkal foglalkozik. Ezekben a művekben is - ha ugyan valóban az **ő** munkái - még a római számírást használta, de pápa korában (999-1003) szorgalmazta a hindu számírás elterjesztését. Ő honosította meg az *osztó* és az *osztandó* kifejezéseket. Foglalkozott csillagászattal is, készített csillagászati eszközöket, és jártas volt az orgonakészítésben is.

Pápaként ő küldte I. István királyunknak a koronát, a mai korona felső részét, és ő alapította az esztergomi érsekséget. A politikában az egyház és a császárság szövetségének gondolatát képviselte. Ezért is vette fel a II. Sylvester nevet, ezzel is kifejezve, hogy elődjének, I. SYLVESTERnek a nézeteit követi. II. Sylvesternek, az első francia pápának, a tudós GERBERTnek emlékét szülővárosában szobor őrzi. **EURÓPA MEGÉRETT A TUDOMÁNYOK BEFOGADÁSÁRA**

Gerbert tudományos működése és kultúraterjesztő munkája még bátortalan, elszigetelt kezdet volt. A XI. és XII. században azonban az erősödő gazdasági alapokon már kifejlődhetett az arabok által kínált ókori műveltség befogadására és megértésére alkalmas európai szellem. A kezdeti nehézség egyik fő oka az volt, hogy a kereszténység eleinte kritika nélkül elutasította a pogány tudományokat, az alexandriai könyvtár elpusztításában éppen úgy részt vett, mint a túlzó mohamedánok . Az egyház megerősödésével azonban kezdett megszűnni a félelem mindattól, ami pogány, sőt felfedezték, hogy üdvös módosításokkal **Platón** és **Arisztotelész** filozófiájában még támaszra is találhat az egyház. Az ókori tudományok átvételének másik jelentős akadálya a nyelvi nehézség volt. A római egyház hatására a középkor tudományos nyelve a latin lett. Ez előnyt jelentett olyan szempontból, hogy bármelyik nemzet fia latin tudással hozzájuthatott a korabeli ismeretekhez. A XII-XV. századi egyetemekké fejlődött egyházi iskolákon (Bologna és Párizs 1160 körül; Oxford 1167: Cambridge 1202; Padua 1222; Nápoly 1224; Prága 1347; Krakkó 1364; Bécs

1367; Pozsony 1467; Nagyszombat 1558) mindenütt latinul tanítottak. Ahhoz tehát, hogy a nyugati keresztény világ tudósai hozzájuthassanak a görög és az arab művekhez, először latinra kellett fordítaniuk azokat.

Ez a nyelvi nehézség természetszerűen nem jelentkezett az ókori képzőművészeti alkotások felfedezésénél. Egy gyönyörű kép, szobor vagy épület nemzetközi nyelven szól az őt szemlélőhöz. Valószínűleg ez az oka annak, hogy Európa néhány száz esztendővel előbb kezdte csodálni a görög és a római képzőművészetet és ennek nyomán az irodalmat is, mint a természettudományokat vagy éppen a matematikát . Az irodalom esetében persze a nyelvi korlátot szintén le kellett dönteni, de néhány vers vagy egy-egy színdarab lefordítása korántsem jelentett akkora nehézséget, mint például **Arkhimédész** áttétele latinra, hiszen az utóbbi esetben a fordítónak jó matematikusnak is kellett lennie, sőt az ógörög, mindent csupán csak szavakkal leíró matematikai tolvajnyelvben is el kellett igazodnia. A görög irodalmat is őrző római irodalmat nem is kellett lefordítani. Bizonyára szerencsésebb helyzet alakult volna ki, ha annak idején a rómaiak hajlandók lettek volna átvenni a hellén művészeti törekvések szelleme mellett a görög természetfilozófiai és matematikai ismereteket is, de egyetlen római matematikust sem ismerünk, aki a görög matematikát legalább közepes szinten művelte volna.

Európában a művészetnek és a tudománynak, a kultúra e két tartópillérének megismerése és továbbépítése az időben eltolódott. Amikor a nyugat-európai művész már elleste a klasszikus alkotások titkait, és azokat a maga munkájában hasznosította, akkor a görög matematika még szinte ismeretlen terület volt az európai gondolkodók számára. Bizonyára ekkor kezdődött el az ún. humán és reál kultúra kettéválása, amely nagyon sajnálatos módon korunkban még erősödött is. A középkor ég felé fordított tekintete nem vette észre, vagy ha igen, akkor lebecsülte, a hiábavalóságok közé sorolta, sőt veszedelmesnek tartotta a természettudományokat. A kultúra kettéosztottságának középkori szelleme kísért ma is, amikor a csak humaniórákkal foglalkozó vagy a csak reáliák iránt érdeklődő ember nem veszi észre, hogy így vagy úgy félművelt.

A XII. században azonban tekintélyes méretekben megindult a tudományos művek latinra fordítása is. A latin, görög vagy arab nyelvekhez közvetítőül sokszor társult még a zsidó is. Számos fordítás született e században szinte a felsorolt nyelvek mindegyikéről mindegyikére. Az ókori kultúrjavak Nyugat-Európába áramlása, legtöbbször az arab nyelv közvetítésével, három úton történt. Leghatásosabban Spanyolországon át, azután Szicília szigetéről indulva Itálián keresztül, valamint az előbbi kettőnél jóval vékonyabb erecskén Bizánc felől. A széles körű fordítói munka elindítója 1126-ban

Adelard (1090?-1160?). Ez az angliai Bathból származó zsidó filozófus és tolmács tanulmányait a francia Tours-ban végezte, azután bejárta Görögországot, Kis-Ázsiát. Megfordult Itáliában, Szicíliában, Észak-Afrikában és Spanyolországban is. Sejthetőleg ez utóbbi útján sajátította el az arab nyelvet. Úgy mondják, hogy arabnak öltözve, álruhában látogatta a muzulmán egyetemeket. Utazásaiból hazatérve nevelője lett a későbbi II. **Henrik** királynak, és élete végéig élvezte a királyi ház pártfogását.

Önálló filozófiai munkát is írt, de igazán maradandó érdeme az, hogy jó érzékkel és nagy tájékozottsággal válogatott össze néhány ókori művet, és ezeket latinra fordította. Mint említettem, 1126-ban kezdetnek lefordította **al-Hvárizmi** csillagászati táblázatait arabról latinra. Neki köszönhetjük, hogy fennmaradt **al-Hvárizmi**nek *A hindu számokról* című könyve latinul, *De Numero Indorum* címen. Ennek a műnek már valóban nagy szerepe volt a mai számírás és számolási technika európai elterjedésében. Éppen **Adelard** 1142-es fordítása nyomán került a középkori matematikaoktatás középpontjába **Eukleidész** *Sztoikheiája.* 1155 táján ültette át latinra **Ptolemaiosz** *Almagesztjét.*

Adelard Angliában tevékenykedett, de az igazi nagy „fordítóüzem” Spanyolországban virágzott. Toledóban **Raymond** hercegérsek karolta fel a fordítókat, és a fordításhoz bőséges anyaggal szolgált a toledói könyvtár. Számos tudós és fordító dolgozott itt, köztük a matematikatörténet szempontjából a legnagyobb volt a cremonai **Gherardo** (1114-1187). A csodálatos hangú Amati- és Stradivari-hegedűk városából azért utazott Spanyolországba, hogy megtanuljon arabul, és eredetiben olvashassa **Ptolemaiosz**

Almagesztjét. Európa főként az ő fordításából ismerte meg **Ptole**maioszt. Gherardo aztán végleg Toledóban kötött ki, és egész életét a fordításnak szentelte. Több mint 85 mű lefordítása után érte a halál. Eukleidész Sztoikheiáját latinra tette át Szábit ibn Kurra fordítása alapján, és az ő keze alól került ki al-Hvárizmi Algebrájanak egy latin példánya. Ekkor azonban már népszerűvé vált Robert of CHESTERnek egy 1145-ben megjelent fordítása.

Robert of Chester (XII. század), angol matematikus fordító 1150-ig tartózkodott Spanyolországban, aztán hazatért Angliába. Tőle való az első *Korán*-fordítás is. Neki köszönhetjük a trigonometria „szinusz” szavát, aminek a megszületését a 364. oldalon már elbeszéltük. Ezt a műszót átvették más fordítók, így a cremonai **Gherardo** és a tivoli **Plató** is. Ekkoriban lett **al-Hvárizmi** nevéből „algoritmus”, és a könyvének címében szereplő al-dzsabr főnévből „algebra” (388. és 390. oldal).

Az említett fordítók Európában népszerűsítették az arab algebrát még a görög geometria igazi megismerése előtt. Az algebra iránti érdeklődés egyik oka hihetőleg az volt, hogy az arab algebra könnyebben érthetőnek bizonyult a sokszor fejlett térszemléletet is követelő, csupán szavakkal leíró, valóban magas színvonalú görög geometriánál.

A XI-XIII. században tehát latinra fordítottak számos kulcsfontosságú görög és arab művet. Ezzel megteremtették Európa számára a tanulás lehetőségét. Ez természetesen nemcsak a matematika területén történt meg. Lássunk erre is néhány példát:

Szicíliát 1091-ben hódította vissza a kereszténység a muzulmánoktól. Itt II. **Frigyes** (1194-1250) uralkodása idején komoly támogatásra találtak a tudományos törekvések. Az ő égisze alatt ültette át **Michael Scot** (1175-1234) **Arisztotelész** biológiai írásait latinra.

Különösen a XIII. századból sikerül sok tudós nevét felsorolnunk. Az egyházi filozófusok közül nem maradhat említés nélkül Albertus Magnus (1206-1280), Aquinói Tamás (1225-1274) és Robert Grosseteste (1168?-1253) tanítványa, Roger Bacon (1219?-1292?). Aquinói Tamás Arisztotelész tanait igyekezett összehangolni a

teológiával, és ezért igen sürgette egy teljes és hiteles Arisztotelész-fordítás megszületését. Véleménye szerint az egyházi dogmák nem lehetnek ellentétesek a józan ész megállapításaival, sőt az igazság kutatása az ember egyik legfontosabb feladata. A tudás önmagában sem nem hasznos, sem nem káros, ezzé vagy azzá csupán az alkalmazása teszi. Nem mondhatunk le a tudás hasznáról csupán azért, mert rosszra is felhasználható. Ő is hirdette az oxfordi GROSSETESTE-tel és Roger BACONnel egybehangzóan, hogy a megismerés alapja a tapasztalat. Hangsúlyozták a matematika fontosságát is, hiszen észrevették, amit már a püthagoreusok is hirdettek, hogy a természet megismeréséhez elengedhetetlenek a matematikai ismeretek. Ezért az iskolai oktatásban fontos szerepet szántak a matematikának. **Roger Bacon** maga is végzett optikai kísérleteket, és gondolatvilágában a tudományt az ember szolgálatába állította.

Roger Bacon barátja: **Pierre de Maricourt (Peregrinus)** 1269-ben egy könyvecskében tette közzé mágneses kísérleteit. Ugyancsak ebben a században élt az anatómia egyik úttörője: **Mondino de Luzzi.** Ekkor végezte kutatásait a vértanúhalált szenvedett **Raimundus Lullus** (1234-1315), az alkimista. Oxfordban **William Ockham** (1280?-1349?) felelevenítette az alexandriai **Johannesz Philoponosz** (530 körül) impetuselméletét, amely először mert ellentmondani **Arisztotelész** mozgáselméletének. (Az impetus, a lendület miatt mozog a test a mozgató erőhatás megszűnése után.) Az impetuselméletet a párizsi egyetem rektora, **Jean Buridan** (1300?-1358?) fejlesztette tovább. Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy a XIII. században épült, többek közt, a Notre-Dame, a westminsteri apátság és a reimsi székesegyház.

Kanyarodjunk azonban vissza a matematikához. A X-XIV. században vívták elkereseredett harcukat az abacisták és az algoritmikusok. Az abacisták nem akartak megválni az abakusztól (71. oldal) és a római számírástól. Az algoritmikusok viszont szorgalmazták a hindu számírást és a helyi értékekre alapozott műveleti eljárásokat, az algoritmusokat. Az algoritmusra esküdött a már említett bathi **Adelard** is és **Abraham ibn Ezra** (1090-1167?). A bizánci algoritmikus számolómesterek nem a hindu-arab számjegyeket használták, hanem a görög ábécé első 9 betűjét és a nulla jelét (70. oldal). Hasonlóan a zsidó **Ibn Ezra** a zsidó ábécé első 9 betűjét és a

nulla jelét használta számjegyekként. E két példa jól érzékelteti az új számírásra való áttérés lassúságát. Még az algoritmikusok között is voltak, akik ragaszkodtak az általuk megszokott számjelekhez, habár a helyi értékes 10-es számrendszerű számírást már elfogadták. Különösen a kereskedők berzenkedtek a hindu-arab számjegyek ellen, mert úgy vélték, hogy ezekkel könnyebb az üzleti könyvek hamisítása. Különben is nehéz volt elszakadni az abakusztól, hiszen azon még az írástudatlan is megtanulhatott számolni.

Az új számírás és számolás legeredményesebb terjesztői közé tartozott **John Halifax** (1200?-1244 és 1256 között), más nevén **Sacrobosco,** az angol iskolamester, aki kitűnő gyakorlati könyvet írt *Algoritmus vulgaris,* azaz *A közönséges algoritmus* címen. Elemi csillagászati könyvét, a *Sphaerá*t sokáig tanították az iskolákban. A francia **Alexandre de Villedieu** 1225 körül versbe szedte az alapműveletek ismertetését *Carmen de algorismo* (Dal az algoritmusról) címen. A most felsoroltak mellett ki kell emelnünk

Leonardo Pisano (1170?-1240 után) munkásságát. Ismertebb neve **Fibonacci,** vagyis **Bonacci** fia. Ez az arab mintájú olasz név (ibn Bonacci = Fi-Bonacci) sejteti, hogy tulajdonosa közvetített az arab és a keresztény világ között. Apja Pisa kereskedelmi ügyvivője volt a Bugia nevű észak-afrikai arab városban. Az ifjú **Leonardo** Algírban tanult, és nemcsak az arab nyelvet sajátította el, hanem felébredt érdeklődése az arab nyelvű tudományos irodalom iránt is. Különösen a matematika vonzotta. Igen nagyra becsülte **al-Hvárizmi** műveit. Kereskedőként megismerte az akkori arab és keresztény világ nagy részét. Járt Egyiptomban, Szíriában, Szicíliában és természetesen Itáliában. 1202-ben írta meg nagy összefoglaló munkáját, a *Liber abacit, Az abakusz könyvét.* Ebben rendezte és saját eredményeivel is kiegészítette az általa összegyűjtött aritmetikai és algebrai ismereteket. Ez a munka már lényegesen több egyszerű fordításnál, kétségkívül átmenet a passzív fordítói tevékenység és az aktív kutatómunka között. 1228-ban írt egy másik, hasonló jellegű geometriai összefoglalást is. Ennek címe: *Practica geometria,* azaz *Gyakorlati geometria,* amely főleg **Eukleidédsznek** *Az alakzatok felosztásáról* szóló, elveszett műve nyomán született. **Leonardo** összeállított még két matematikakönyvet. Mind a kettő egyenletmegoldásokkal

foglalkozik, és főleg azokat a feladatokat gyűjti össze, amelyek II. **Frigyes** szicíliai király matematikai viadalain szerepeltek. Az egyik mű - amint a *Liber quadratorum* cím is jelzi - négykötetes, a másik címe *Flos* (virág, valaminek a színe, virága).

Érdemes még néhány szót szólni a *Liber Abaciról.* A címe félrevezető, mert éppen nem az abakuszon való számolás a mondanivalója. Mindjárt a bevezetésben megismerteti az olvasót a hindu számírással, és megtanítja az aritmetikai műveletek elvégzésére egészen a gyökvonásig bezárólag. Aztán rögtön gyakorlati feladatok következnek a kereskedelmi számtan köréből. E feladatoknál - természetük szerint - főleg törtekkel kell számolni. Ez pedig az új számolási eljárás bevezetését élesen megszakítja, hiszen **Fibonacci** nem alkalmazta az akkor még ismeretlen tizedes törteket, tehát nem használta ki a helyi értékes számolás előnyeit éppen ott, ahol annak fölénye szembeszökő lenne. Inkább nehézkesen számolt az egyiptomi egységtörtekkel vagy a közönséges törtekkel, bár használt hatvanados törteket is. Az utóbbiak példájára kézenfekvő lett volna a tizedes törtek bevezetése. **Leonardo** ezt elmulasztotta, pedig ez hatalmas újítás és elsöprő érv lett volna a 10-es számrendszerű helyi értékes algoritmusok elfogadása mellett. A közönséges törtek írásánál következetesen használta a törtvonalat. A vegyes számoknál előbb írta a törtrészt, és ezt követte az egész, tehát például a 2 3/4 nála 3/4 2. Egészen szokatlanok az araboktól átvett rövidítő törtjelölései.

Gyakorlatában például az

$$\frac{1\ 5\ \ 7}{2\ 6\ 10}$$

azt jelentette, hogy:

$$\frac{7}{10}+\frac{5}{6\cdot 10}+\frac{1}{2\cdot 6\cdot 10}\,.$$

Nem lehetett nagy vonzóereje annak a feladatának sem, amely szerint ha

$$\frac{1}{4}\ \frac{2}{3}$$

rotulus

$$\frac{1}{7}\,\frac{1}{6}\,\frac{2}{5}$$

bizánci pénzt ér, akkor

$$\frac{1\ \ 4\ \ \ 7}{8\ \ 9\ \ 10}$$

bizánci pénz értéke

$$\frac{3\ \ \ 8\ \ \ 83\ \ 11}{4\ \ 10\ \ 149\ \ 12}$$

rotulus.

Tartalmuk szerint a feladatok között előfordultak árszámítások, valuták átszámításai, ötvözetek finomságának meghatározása és más, a kereskedelmi életből vett problémák. Módszerüket tekintve, találunk hármasszabályt az egyenes és a fordított arányosságok esetén, regula faisit (59. oldal) és egyenletmegoldást. Annak ellenére, hogy LEONARDÓnak jó érzéke volt a jelölések használatára, sőt újak bevezetésére is, algebrájában, azaz az egyenletmegoldásokban teljesen visszaesett a retorikus algebra színvonalára. Nem használta az ő korában már szokásos arab jelöléseket sem. Algebrájának másik jellemzője, hogy nem tud elszakadni a geometriától. Egész könyvében a geometria és az algebra egymást támogatása észlelhető. Amint a bevezetőben mondtam, a *Liber abaci* LEONARDO matematikai tapasztalatait gyűjti össze, tehát nem csodálható benne a sokféle hatás. A geometria segítségül hívása a görögökre emlékeztet, a 60-as számrendszer Mezopotámiára, a legtermészetesebb, hogy az arab hatás alól sem tudta kivonni magát, és az egyiptomi egységtörtekkel való számolás mellett felbukkan az Ahmesz-papirusz 7 macskás feladatának (61. oldal) egy változata. Van azonban FIBONACCInak egy világhírnévre vergődött feladata is. Ez a következő:

Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti egy pár, ha a nyulak 2 hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet? Az egymást követő hónapokban a nyúlpárok száma:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Ez az ún. Fibonacci-sorozat, amelynek rengeteg olyan érdekes

tulajdonsága van, amely felkeltette a későbbi matematikusok érdeklődését is. Ezek közül talán a „legizgalmasabb” az, hogy amennyiben e sorozat két szomszédos eleme a_n és a_{n+1}, annyiban

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ami pedig az aranymetszés arányszáma (95. oldal).

Fibonacci 15 fejezetből álló Liber abacija a kortársak számára nehéz olvasmánynak bizonyult. Egészen más jellegű volt az 1225-ben megjelent Flos és a Liber quadratorum. Ezek számos kitűnő példát mutatnak a határozatlan egyenletekre is. Befejezésül ismerjük meg a Flos egy nagyon előremutató feladatát, amelynek gondolatmenete a maga korában méltán dicséri szerzőjét.

Megoldandó az

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

harmadfokú egyenlet!

Fibonacci először kimutatja, hogy a megoldás nem lehet egész szám, hiszen az egyenletből, ha

$$10\left(x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10}\right) = 20, \quad \text{illetve} \quad x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2$$

alakba írjuk, akkor leolvasható, hogy $x < 2$. Így az egész számok közül megoldásként csak az 1 jöhetne számításba, de ennek lehetetlenségéről könnyű meggyőződnünk.

Nem lehet azonban *x* racionális szám sem - folytatja FIBO**nacci** -, mert kizárt, hogy

$$x+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}=2$$

legyen, ha x-nél a nevezőbe jön egy egész szám, x^2-nél egy másik és x^3-nél meg egy harmadik is.

Valamely racionális szám négyzetgyöke ugyancsak nem lehet az egyenlet gyöke, mert az

$x=(20-2x^2)/(10+x^2)$

alakjából az következnék, hogy az egyenlet bal oldala irracionális, (mivel már előbb kimutatta, hogy racionális nem lehet), a jobb oldala pedig racionális lenne. Ez lehetetlen. A továbbiakban kimutatja *Fibonacci,* hogy az $a+\sqrt{b}$ alakú irracionális számok sem elégíthetik ki az egyenletet.

Miután **Fibonacci** mindezeket tisztázta, csak azután fogott az *x* közelítő értékének a meghatározásához, és úgy találta, hogy a 60-as számrendszerben

$x\approx 1;\ 22,07,42,33,04,40.$

Sajnos azt már nem árulta el, hogy miként jutott ehhez a meghökkentő pontossághoz. Nem lenne meglepő, ha hallott volna a kínai Horner-módszerről (315. oldal).

Leonardo da Pisa munkásságáról összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy ő volt az első európai matematikus, aki a korabeli arab matematika színvonalát elérte, sőt némely vonatkozásban talán túl is szárnyalta. Igaz, hogy ő is elszigetelt tehetség volt, matematikai iskola nem alakult ki körülötte.

Ha FIBONACCIhoz nem is mérhetjük, de korának szintén kiváló matematikusa volt

Jordanus Nemorarius (?-1236). Minden valószínűség szerint azonos azzal a Jordanus TEUTONICUSSZal, illetve Jordanus Saxoniával, aki Párizsban a dominikánusok második generálisa, rendjének főnöke volt. Ha így van, akkor a Szentföldre zarándoklása után, hazautaztában hajótörés áldozata lett. Ő az első

német matematikus, aki a matematikatörténetben helyet érdemel. Talán róla mondhatjuk el először, hogy algebrai jelölései - amikor egy számot betűvel jelöl - már nem ragadnak a számok megfelelő geometriai alakzatához. A betűszám tehát nála nem szakaszként, vagy két szám szorzata nem téglalapként jelenik meg, hanem a szorzat is egy szám, amelyet egyetlen betű jelöl. Figyeljük meg Nemorarius betűhasználatát egy kis példán! A De numeris datis, azaz Az adott számokról című feladatgyűjteményéből való a következő feladat:

Legyen adott az *abc* szám. Osszuk ezt két, *ab* és *c* részre. Legyen adott *d* is, az *ab* és c részek szorzata. Legyen az *abc* négyzete *e,* és legyen *d* négyszerese *f,* valamint legyen *g* az a szám, amelyet akkor nyerünk, ha e-ből kivonjuk *f*-et. Ekkor *g* az *ab* és *c* különbsége. Mivel *h* ismert, azért *ab* és *c* meghatározható.

Amint látjuk, ez nagyon nehézkes dolog, vég nélkül szaporodnak a betűk, és ami a fő baj, áttekinthetetlenül. Ma ezt a feladatot legrövidebben az

$xy=a$

$x^2—4xy=b$

egyenletrendszer fogalmazná meg, ahol x és *y* a keresendő részek, *a* és *b* pedig adott számok.

Az említett könyv négykötetes, és 115 olyan feladatot tárgyal, amelyek első-, illetve másodfokú egyenletre vagy egyenletrendszerre vezetnek. Ezek között sok, másoktól átvett feladat is van, de a megoldási módjuk általában mindig egyéni. Szemléltesse ezt a mai jelölésekkel az

$$x+6=\frac{5}{3}y$$

$$y+4=2z$$

$$z+2=\frac{5}{7}x$$

egyenletrendszer NEMORARIUS szerinti megoldása. Először az első egyenlet mindkét oldalához hozzáadott 6 2/3-ot. Ekkor

$$x+12\frac{2}{3}=\frac{5}{3}(y+4).$$

Ezzel elérte, hogy a második egyenlet szerint az (y + 4) helyett 2z-t írhatott, tehát:

$$x+12\frac{2}{3}=\frac{10}{3}z.$$

Most az így nyert egyenlet mindkét oldalához hozzáadott 20/3-ot. Ekkor

$$x+19\frac{1}{3}=\frac{10}{3}(z+2).$$

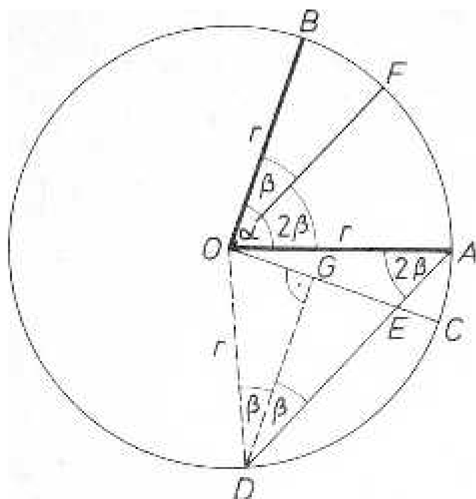
A harmadik egyenlet alapján (z + 2) helyett (5/7)x írható, így

$$x+19\frac{1}{3}=\frac{50}{21}x.$$

Innen már x = 14.

NEMORARIUS vigyázott arra, hogy az ismeretlenek természetes számok legyenek. Olykor megvizsválta a megoldhatóság feltételeit is. Írt még egy *Arithmetica decem libris demonstrata* (Aritmetika tíz könyvben) című művet, amely inkább filozófiai tárgyú, de ebben is megtalálható a számoknak betűvel való jelölése. Az elmondottak alapján NEMORARIUS az algebrai szimbólumok bevezetésének egyik előfutára volt, bár ilyen irányú törekvése elszigetelt, utánzásra nem talált.

Ismeretes NEMORARIUSnak még egy négykötetes geometriakönyve is A háromszögekről (De triangulis). Ebben, a címhez hűen, háromszögekkel foglalkozik, és különböző síkidomok különböző felosztásával. Ebből a könyvből szemeltünk ki egy szögharmadolást, amely hihetőleg a saját eredménye. A *256. ábra* a szögét a következőképpen harmadolta: Az α szög csúcsából, mint centrumból *r* sugarú kört rajzolt, azután az *O* középpontban merőlegest állított az *OB* szögszárra (*OC*). Vonalzócsúsztatással (neuszisz szerkesztés: 104. oldal) megrajzolta az *AD* húrt úgy, hogy annak a *DE* szakasza a kör sugarával legyen egyenlő. Végül az *O* pontból meghúzta az *AD* szakasszal párhuzamos *OF* sugarat. Az ekkor keletkezett β szög éppen az α harmada. Ennek igazolása az ábra alapján a kedves olvasónak bizonyára nem okoz nehézséget.



256. ábra

Nemorarius matematikai érdemei közé tartozik, hogy

Ptolemaiosznál is részletesebben írta le a sztereografikus projekció tulajdonságait (267. oldal).

A fizika területén is szerzett érdemeket, ő volt, aki először állapította meg helyesen a lejtőre helyezett test súlyának a lejtő irányába eső összetevőjét. Következtetésének az volt az alapja, hogy ha egy testet éppen *h* magasságra tudunk felemelni, akkor n-szer súlyosabb testet csak h/n magasra emelhetünk. Ez a megállapítás feltétlenül eszünkbe juttatja az energia megmaradásának elvét. Nemorariusnak ez a mechanikai tétele elsőként haladta túl az ókori és az arab mechanikai eredményeket. Mint filozófus, a hamisítatlan, tehát a teológiához még nem igazított arisztotelészi tanok mellett szállt síkra.

Még a XIV. században sem keletkeztek Európában matematikai iskolák. A néhány kiemelkedő tudós köré nem csoportosultak tanítványok, akik a mester által megtalált úton továbbhaladtak volna. Ilyen kis gócok már keletkezőben voltak a filozófiával nagyon összefonódó fizika területén. Az oxfordi Merton College-ban például a század első harmadában központi kérdéssé vált az egyenletesen változó mozgás törvényeinek kutatása. Itt született meg az ún. Merton-szabály, amely kimondja, hogy a megtett út kiszámítása szempontjából az egyenletesen változó mozgás helyettesíthető egy olyan egyenletes mozgással, amelynek a sebessége a változó mozgás kezdő- és végsebességének a számtani közepe, amennyiben a két mozgás útja és időtartama megegyezik. Ennek az eredménynek a megszületésében - amely az ókor mechanikájához képest újat állapít meg - szerepe volt

Thomas Bradwardine (1290?-1349) angol fizikusnak, a későbbi canterburyi érseknek. Valószínű, hogy a Chichester melletti Hardfieldben született a sussexi járásban. Magas tudományos és teológiai fokozatot szerzett, aztán Oxfordban tanított filozófiát, kezdetben a Balliol College-ban, majd 1323-tól 1335-ig a Merton College-ban. Ezután lett a londoni Szent Pál-templom kancellárja. III. Edward király őt választotta gyóntatójának a canterburyi érsek ajánlatára. Ennek halála után, 1349-ben ő került az érseki székbe, de egy hónappal beiktatása után elragadta a pestis.

Írt egy filozófiai művet, a *De Causa Deit* (Isten ügyéről). Ebben hadakozik az angliai Pelagius (380 táján) szerzetes azon

vallásfilozófiai tanítása ellen, amely szerint az ember kiérdemelheti az isteni kegyelem minden formáját, és a már egyszer elnyert kegyelem megtartásához nem kell újabb kegyelem. Ez a vitairat persze nem hatott különösképpen sem a matematika, sem a fizika fejlődésére, de egy másik könyve, a *Tractatus de proportionibus velocitatum* (Értekezés a sebességek arányairól) kimondottan fizikai tárgyú. Érdem, hogy meg merte támadni ARISZTOTELÉSZ azon állítását, hogy a sebesség (v) a mozgató hatással *(F)* arányos, és a mozgást gátló hatással (*R*) fordítva arányos. Ma ezt így foglalnánk képletbe:

$$v=k\frac{F}{R},$$

ahol *k* arányossági tényező.

Ez nem lehet igaz - érvelt BRADWARDINE -, mert e szerint akkor is van sebessége a testnek, ha a rá ható mozgatóerő akkora, mint a mozgást akadályozó, sőt még akkor is, ha az *R* ellenállás nagyobb az *F* mozgatóerőnél. E részben helyes megállapítás után azonban tisztán spekulatív úton azt a hibás kijelentést tette, hogy a sebesség függ ugyan az F/R viszonytól, de nem egyszerűen arányos vele, hanem ha a sebesség kétszer, háromszor, n-szer nagyobb lesz, akkor az *F/R* hányados második, harmadik, n-edik hatványával arányos:

Ugyanúgy, ha a sebesség a felére, harmadára, n-ed részére csökken, akkor az nem az F/R hányadossal arányos, hanem annak második, harmadik, n-edik gyökével. Ma ezt úgy mondanánk, hogy a sebesség az F/R logaritmusával arányos. Képletszerűen:

$$v=k\cdot\log\left(\frac{F}{R}\right).$$

Valóban, ha $v_n=nv$, akkor

$$v_n = k \cdot \log \left(\frac{F}{R}\right)^n,$$

és ha $v_n = v/n$ akkor

$$v_n = k \cdot \log \sqrt[n]{\frac{F}{R}}.$$

Ez a megállapítás jellegzetes példája annak, hogy egy tévedés is lehet a haladás előmozdítója. Ha ugyanis legutóbbi képletünket a

$$v_n = k \cdot \log \left(\frac{F}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

alakban írjuk, akkor nem is nagyon erőszakoltan azt mondhatjuk, hogy Bradwardine fizikailag téves törvényében a fizikán keresztül belopakodott a matematikába nemcsak a logaritmusfüggvény fogalma, hanem a hatványnak a törtkitevőre való általánosítása is.

A fizikusként matematikai érdemeket szerző BRADWARDINE írt még néhány jelentéktelen matematikai tárgyú munkát is EUKLEIDÉSZ, ARISZTOTELÉSZ és BOETHIUS szellemében. *Arithmeticája* és *Geometriá*ja tankönyvekül szolgáltak. A *Geometria speculativa* és a *Tractatus de continuo* (Értekezés a folytonosságról) filozofikus jellegű könyvei. Ezek fő matematikai mondanivalója az, hogy a folytonos mennyiségek végtelen sok oszthatatlan részt tartalmaznak, de matematikai atomok mégsem létezhetnek. BRADWARDINE már nem egészen magános kiválóság, határozottan befolyást gyakorolt kortársaira, akik őt tisztelettel doctor profundus-nak, nagy doktornak (profundus = mély, kimeríthetetlen) nevezték.

BRADWARDINE angliai működésével majdnem párhuzamosan, néhány év eltolódással, élt és dolgozott Franciaországban a

középkor utolsó nagy matematikusa:

NICOLE ORESME (Oresmicus, 1320?-1382). Abban is hasonlít angol kortársához, hogy ő szintén fizikusként szerzett matematikai érdemeket. Valószínű, hogy Caen mellett született. 1340-ben már a párizsi egyetemen látjuk. Itt igen nagy hatással volt rá BURIDAN, akinek impetuselméletét azonban csak félig fogadta el. BURIDAN felfogása szerint Isten a teremtéskor, amikor megindította a világ gépezetét, az égitestekkel annyi impetust (lendületet) közölt, hogy azok az ellenállás nélküli térben már örökké mozogni képesek anélkül, hogy szükség lenne további, folyamatos isteni beavatkozásra. BURIDAN nagy tette tehát az volt, hogy egységes világképet alkotott. Ugyanazon törvények szerint mozognak az égitestek, mint a földiek: az égi és a földi mechanika törvényei azonosak. ORESME álláspontja ehhez képest visszalépés. Lehet - mondja -, hogy Isten a teremtéskor az égitestekbe különös mozgató és ellenálló hatásokat beleteremtett, amelyek által azok úgy mozognak, mint egy mechanikus óra, de ezen erők természete különbözik a Földön működő erőkétől. A mozgásra késztető erő a testben impetust kelt, de ez a mozgó testben nem állandó - mint ahogy ezt BURIDAN állítja -, hanem csökken. Az Istennek tehát állandóan pótolnia kell az égitestek lendületét, hogy mozgásuk meg ne szűnjék. Ilyen tehát ORESME világképe, világórája, amelyet állandóan fel kell húzni, hogy járjon.

Tanulmányait a Navarra Kollégium teológiáján végezte el 1355-ben vagy 1356-ban. A kollégium nagymestere lett, és ebben a minőségében szerezte meg a francia trónörökösnek, a későbbi V. KÁROLYnak a barátságát. A kollégiumot csak 1362-ben cserélte fel a roueni kanonoksággal. Rouenban a katedrális dékánja lett. Püspöki kinevezését valószínűleg azzal érdemelte ki, hogy V. KÁROLY kívánságára, 1369-ben latinból franciára fordította ARISZTOTELÉSZT és a fordítást jegyzetekkel is ellátta.

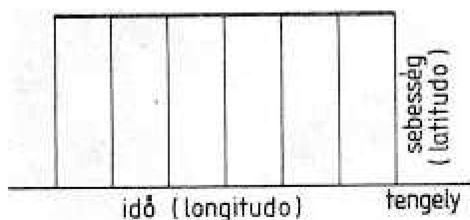
ORESMICUS korának talán legnagyobb műveltségű, gyakorlati érzékkel is megáldott tudósa volt, aki lelkes prédikátori és teológusi hivatásának gyakorlása mellett felvilágosult elvekkel ítélte el az asztrológiát, fordításaival hozzájárult a francia tudományos nyelv kialakításához, és nem lebecsülendő a tudományokat népszerűsítő munkája sem. A matematikatörténet sem feledkezhet

meg róla, mert nála találjuk az exponenciális függvény fogalmának a csíráit; a koordinátageometria megszületésének egyik jeles úttörője volt, és ügyesen bánt a sorokkal. Vegyük sorra matematikai érdemeit!

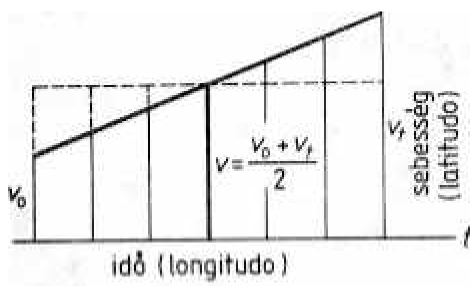
Ugyanúgy, mint BRADWARDINE, ő is támadta ARISZTOTELÉSZ mozgástörvényét, hogy ti. a sebesség egyenesen arányos a mozgatóerővel és fordítottan arányos az ellenállással. ORESME azonban BRADWARDINE törvénye helyett egy másikat agyait ki, amely éppen olyan helytelen volt, mint az angol fizikusé, de matematikai szempontból éppen olyan figyelemre méltó is. A *De proportionibus proportionum* (Az arányok arányairól) című tanulmányában azt állítja, hogy ha a v_1 sebességet az R_1 ellenállással szemben az F_1 erő hozza létre és a v_2 sebességet az R_2 ellenállással szemben az F_2 erő, akkor

$$\frac{F_2}{R_2}=\left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}.$$

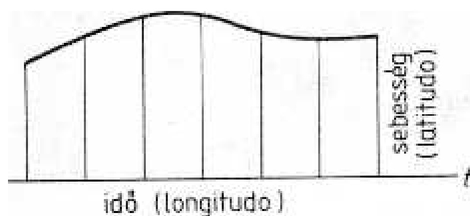
Ez a fizikai szempontból hibás képlet matematikai viszonylatban két előremutató fogalmat rejt. Az egyik az exponenciális függvény, a másik pedig a hatvány általánosítása törtkitevőre. ORESME éppen a törtkitevős hatványt nevezte az arány arányának. A szóban forgó, 1360-ban megírt művében tárgyalta az egyenlő alapú hatványok szorzásának és hatványozásának azonosságait törtkitevőkre is, sőt egy későbbi könyvében, az *Algoritmus proportionumban* (Arányok algoritmusa) ismerteti a törtkitevős hatványok néhány fizikai és geometriai alkalmazását is. A törtkitevőjű hatvány fogalmának a bevezetése nála tehát teljesen tudatos, annyira, hogy számukra jelölést is ajánl. Nekünk szokatlan jelölései a következők;



257. ábra



258. ábra



259. ábra

$$\frac{p}{2}\frac{1}{2}=2^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{2}{3}\frac{p}{8}=8^{\frac{2}{3}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1\cdot p\cdot 1}{4\cdot 2\cdot 2}=\sqrt[4]{2^{\frac{1}{2}}}\ .$$

További általánosítást jelent az, hogy ORESME irracionális törtkitevőjű hatványt is ismert, mégpedig kétfélét: az egyiknél az alap irracionális, mint például a

$$(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}},$$

a másiknál pedig a kitevő, mint például a

$$_{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

esetén.

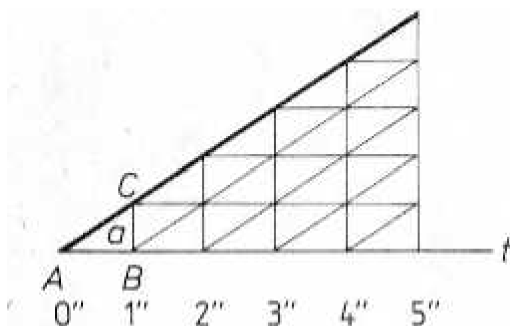
Matematikai vonatkozásban szintén érdekes az alapjában véve fizikai tárgyú *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Értekezés a minőségek és a mozgások elrendezéséről) című könyve. A XII-XIV. században jelentkezett az a törekvés, hogy különböző tulajdonságok, minőségek erősségét, intenzitását mérőszámokkal jellemezzék. Ez még az egyház által fontosnak tartott emberi tulajdonságokra is kiterjedt. Az egyik ember jámborsága, bűnbánata vagy szeretete hányszor nagyobb egy másikénál? Ugyanazon ember hite hogyan változik az időben? A fizikában ilyen minőség volt valamely változásnak (mozgásnak, hőmérséklet-emelkedésnek stb.) a sebessége. A mérési lehetőségek hiánya vagy korlátozott volta miatt a minőségek intenzitásainak az összehasonlítása a skolasztikus filozófiában sok badarságot szült. Oresme azonban az említett könyvében mind fizikai, mind matematikai szempontból értékes ötlettel igyekezett szemléltetni a minőség intenzitásának időbeli változását. Rajzolt egy vízszintes tengelyt, amelyet longitúdo-(hosszúság-) tengelynek nevezett. Ha példánkban a vizsgált minőség egy mozgó test sebessége, akkor a tengelyen egyenlő távoli pontok jelölték a mozgás időpillanatait. Minden ilyen ponthoz, azaz időpillanathoz tartozik valamekkora sebesség (a minőség intenzitása). Oresme ezen sebességekkel arányos hosszúságú szakaszokat emelt a megfelelő időpillanatokban, a longitúdotengelyre merőlegesen. Ezeket a szakaszokat latitúdóknak (szélességnek) hívta. A latitúdók felső végpontjait összekötő görbe valóban nagyon szemléletessé tette a mozgás sebességének változását. Az Oresme-féle ábrázolásban nem nehéz ráismernünk a derékszögű koordináta-rendszer azon grafikonjára, amely a sebességet az idő függvényeként fejezi ki. Ilyen Oresme-féle grafikonokat mutat a *257.*, a *258.* és a *259. ábra,* az egyenletes, az egyenletesen változó és az egyenlőtlenül változó mozgások esetén.

Oresme azt is észrevette - magyarázni nem tudta hogy a grafikon alatti terület számértékben megadja a mozgás útját. Így a *258.*

ábráról leolvashatta a Merton-szabályt:

$$s=\frac{v_0+v}{2}t.$$

Az ő szemléletében azonban nem a latitudók végpontjait összekötő folytonos görbe a változás grafikonja, hanem a görbe alatti terület. Ha tehát valamely minőség intenzitása, azaz egy jelenség mérhető tulajdonsága állandó, akkor ezt a tényt egy téglalap, ha az intenzitás egyenletesen változik, akkor ezt egy háromszög vagy trapéz, és végül ha a figyelt tulajdonság egyenlőtlenül változó, akkor egy görbével és három szakasszal határolt síkidom szemlélteti. Úgy érezzük, és joggal, hogy ezekben a gondolatokban valahol ott bujkál a határozott integrál szemléletes fogalma. Azt ugyan ORESME nem tette meg, de nekünk érdemes észrevennünk, hogy az ábrázolásnak ez a módja a szabadesés esetében elvezet a GALILEI által megtalált úttörvényhez. Ábrázolja ugyanis ORESME módjára a nulla kezdősebességű szabadesést a *260. ábra,* amelyen a longitudo az idő és a latitudo az egyenletesen növekvő sebesség. A *t* tengelyen feltüntetett egyenlő szakaszok jelentsenek 1 másodpercet. Ekkor az első másodpercben megtett út mérőszáma akkora, mint az *ABC* háromszög területéé. Ezt a-val jelöltük. A grafikon mutatja, hogy a második másodpercben megtett út *3a,* a harmadik másodpercben *5a,* és a negyedikben 7*a* stb. Az egymást követő másodpercekben megtett utak aránya tehát: 1 : 3 : 5 : 7 : ...



260. ábra

Ugyanígy leolvasható, hogy az első másodpercben megtett az eső

test *a* utat, az első két másodpercben 4a-t, az első háromban 9a-t, az első négyben 16a-t és így tovább. A megtett út tehát az idő négyzetével arányos. Képletszerűen: $s = at^2$.

Oresme grafikonjai tehát egyrészt megfelelnek a derékszögű koordináta-rendszerben való ábrázolásnak, másrészt magukban hordozzák a határozott integrál fogalmának a csíráit, és amint a szabadesés példáján megmutattuk, igen gyümölcsöző fizikai gondolatmenetekre adtak alkalmat.

A középkornak ez a kiemelkedő matematikusa érdeklődéssel és eredményesen foglalkozott a sorok összegezésével is. Rendszerint itt is segédeszközül használta a grafikus ábrázolást. Teljes tudatossággal megkülönböztette a divergens sorokat a konvergensektől. Ő látta be először, hogy az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

harmonikus sor divergens, azaz a mai kifejezéssel élve - a részletösszegek sorozata végtelen naggyá nőhet. Ezt a sor tagjainak megfelelő csoportosításával látta be a következőképpen:

$$S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}\right)+\dots$$

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \ldots$$

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots$$

Az n-edik részletösszeg tehát minden számnál nagyobbá válhat, azaz a sor divergens.

Ugyancsak *Oresme* határozta meg az

$$S = \frac{1 \cdot 3}{4} + \frac{2 \cdot 3}{16} + \frac{3 \cdot 3}{64} + \ldots + \frac{n \cdot 3}{4^n} + \ldots$$

sor összegét is. Ez történhet így is:

Tekintsük az

$S' = 1 * 3x + 2 * 3x^2 + 3 * 3x^3 + \ldots + n * 3x^n + \ldots$

sor n-edik részletösszegét:

$S'_n = 1 * 3x + 2 * 3x^2 + 3 * 3x^3 + \ldots + n * 3x^n$.

Ennek x-szerese:

$xS'_n = 1*3x^2 + 2*3x^3 + 3*3x^4 + \ldots + n*3x^{n+1}$.

így

$$S_n'(x-1)=n\cdot 3x^{n+1}-(1\cdot 3x+3x^2+3x^3+\ldots+3x^n)=$$
$$=n\cdot 3x^{n+1}-3x(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})=$$
$$=n\cdot 3x^{n+1}-3x\frac{x^n-1}{x-1},\quad \text{ahol } x\neq 1,$$

tehát

$$S_n'=\frac{3nx^{n+1}}{x-1}-3x\frac{x^n-1}{(x-1)^2}.$$

Ha most $x=1/4$, akkor a segítségül hívott sor éppen az eredetit adja, vagyis annak az n-edik részletösszege:

$$S_n=\frac{3n}{4^{n+1}\left(\frac{1}{4}-1\right)}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4^n}-1}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2}=$$
$$=-\frac{n}{4^n}-\frac{3\cdot 16}{4\cdot 9}\left(\frac{1}{4^n}-1\right)=$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{n}{4^n}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}.$$

A sor összege tehát:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{n}{4^n}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}\right)=\frac{4}{3}.$$

Említésre méltó még, hogy ORESME felismerte a mozgások relatív voltát, amikor leszögezte, hogy egyetlen érvet sem ismerünk annak az eldöntésére, hogy a csillagos ég forog az álló Föld körül,

vagy az álló égi szférában forog a Föld a tengelye körül. Közgazdasági elméleteit a *De mutationibus monetarum* (A pénzek változásairól) című könyvében foglalta össze.

Az itáliai FIBONACCI, a német NEMORARIUS, az angol BRADWARDINE, a francia BURIDAN és a Normandiából való, tehát szintén francia ORESME a XIII. és XIV. század kiemelkedő matematikusai voltak. Talán nagy tévedés nélkül elmondhatjuk róluk, hogy mindegyik környezetében - mint kristályosodási centrum és mint vezető körül - kialakulhatott volna a tanítványok egy olyan csoportja, amely kezdeményezéseiket továbbviszi. Ez azonban nem történt meg, így követők nélkül, egymás eredményeiről sem tudva, csupán magános fénysugarak lehettek. E fénysugarak nyomában azonban korántsem a hajnal derengett fel Európa egén. A gazdasági és technikai fejlődést és a nyomában haladó természettudományos kibontakozást hanyatlás követte. A fejlődés lelassulásához, sőt számos területen a teljes megállásához nagyban hozzájárult az időjárás kedvezőtlenné válása. A XIV. században egész Európa mezőgazdaságát hideg, esős nyarak sújtották. A gabonatermés elmaradásának következtében számunkra elképzelhetetlen módon pusztított az éhhalál. A nagy városok ellátása különösen nagy nehézségekbe ütközött. Ehhez járult, hogy az elégtelen egészségügyi és köztisztasági viszonyok nyomán az éhező lakosságot ragályos betegségek pusztították. Az 1348-1350-es nagy pestisjárvány után Európa 73 milliós lakossága 51 millióra csökkent. Ez az európai méretű tragédia és gazdasági katasztrófa kiélezte a különböző osztályok közötti, már korábban is meglevő ellentéteket. A XIII. századi sztrájkokat a XIV. században hatalmas méretű parasztfelkelések és velük párhuzamosan nagy munkáslázadások követték. Ezek megbuktak ugyan, de mégis bizonyos egyensúlyi állapotot hoztak létre a nemesség, a polgárok, a parasztság, a kereskedők és a munkások között. Ez a helyzet aztán hosszú időre állandósult az akkori kulturális és civilizációs színvonallal együtt. Még a kezdetben haladó szellemű céhek is a technikai fejlődést akadályozó, szűk látókörű érdekvédelmi testületekké váltak.

A hallatlanul rossz gazdasági viszonyok nagymérvű szellemi elnyomást indukáltak. Ebben az elnyomásban sajnálatos módon az egyház játszotta a fő szerepet. Az egyházi dogmákkal

ellenkező eretnekséget az 1215-ös lateráni zsinattal állandósított inkvizíció kegyetlenül büntette. Az egyházi inkvizíció csak 1542-ben szelídült a ma is működő egyházi bírósággá, de az államhatalmat is szolgáló spanyol inkvizíció borzalmai csak a XIX. század elején szűntek meg. Ilyen szellemi légkörben érthető, hogy a XIII. és XIV. század önálló eszméket kibontakoztató tudósai csak magános nagyságok lehettek. A szélesebb alapokon folyó tudományos kutatások megindulásához hiányzott a megfelelő általános kultúrszint, hiányzott a természettudományokat ösztönző technikai fejlődés és hiányzott a gondolat szabadságának légköre. Ez volt a középkor hajnal előtti sötétsége.

A MATEMATIKA RENESZÁNSZA

A RENESZÁNSZ KORI MATEMATIKUSOK

A XV. század mélyreható változást hozott Európa gondolkozásmódjában. E században bontakozott ki a humanizmus teljes virágjában, főként Itáliában. Az eddig ég felé fordított tekintetek visszairányultak a Földre, és újra az ember lett a középpont, az ember, aki a földi életben keresi a boldogságát. E törekvés kulturális vetülete a sokoldalúan művelt személyiség eszménye, amelynek eszközét a középkor humanistája az antik kultúra újjáélesztésében és továbbfejlesztésében találta meg. Ez - amint már említettük - nem előzmények nélküli, csupán XV. századi jelenség, hiszen az előző századokban már megindult különösen a művészetek reneszánsza. A XIII. századi hatalmas katedrálisok mellett már a világi építészet is számos remeket hozott létre. Ilyen volt például a velencei Doge-palota, hogy legalább egyet említsünk. A szobrászok is az élethű ábrázolásra törekedtek. **Niccoló Pisano** és **Giovanni Pisano** szobrainak mesterien rendezett ruharedői mögül kitetszik a szép emberi test. A festő **Giotto di Bondone** újra felfedezte, hogy miként lehet a festményen, tehát a síkon térhatást elérni. Hatására Itáliában új festészet született. A toscanai, pontosabban a pisai és sienai festőiskola teljes kibontakozását a pestisjárvány akadályozta meg. **Geoffrey Chaucer** már megírta az angol irodalmi nyelvet megteremtő *Canterburyi meséket* és **Dante Alighieri** is az *Isteni színjátékot.* A XIV. században már

gyönyörködhettek az irodalomkedvelők **Francesco Petrarca** szonettjeiben. Mellékesen megjegyzem, hogy az 1471-es Petrarca-kiadás volt az első olyan könyv, amelynek lapszámozására hindu-arab számjegyeket használtak. E szűk felsorolás talán érzékelteti, hogy a XIII. és XIV. század már jól előkészítette a XV. és XVI. századi humanista művészetek kiteljesedését.

Láttuk, hogy ehhez hasonló előkészítés a matematika területén hiányzott. A XV. századra azonban már általánosan elterjedt számos technikai találmány. Az ipar megerősödésével, a mesterségek elterjedésével széles területet hódított meg a gyakorlati technikában felhalmozódott természetismeret. A kézművesség lebecsülése megszűnt. **Bradwardine** és mások is az isteni teremtést és a teremtett mindenség működését az órásmesterséghez, illetve az óra járásához kezdték hasonlítani. A „hét szabad művészet" teljesen elméleti ismereteivel egyenrangú lett a mesteremberek „szolgai", gyakorlati munkája, a gyakorlati tudás. Az egyenrangúság kivívása nem csupán a filozófusok érdeme volt, hanem a legértelmesebb kézműveseké is, akik mesterségbeli tudásukat, fogásaikat, technológiájukat le is írták, mások számára is hozzáférhetővé tették. Ne feledkezzünk meg arról sem, hogy a reneszánsz előtt a festőt, az építészt és a szobrászt is csak „alantas" rangú kézművesnek tekintették. A reneszánsz képzőművészei, mérnökei, építői, ötvösei, fegyvermesterei és más iparosai kiharcolták maguknak, hogy a munkájukhoz megkívánt ismeretek a tudományok rangjára emelkedjenek. Ez a sokféle gyakorlati tudomány a XV. és XVI. századra annyira felgyülemlett, hogy alapja és elindítója lehetett az elméleti természettudományok fejlődéséhez szorosan kapcsolódó matematika művelésének. Ezt mi sem bizonyítja jobban, mint az, hogy a matematika iránti új érdeklődés azokon a területeken jelentkezett, ahol felvirágzott a városi élet, az ipar, a hajózás, a csillagászat és a kereskedelem. A XV. és XVI. század matematikai központjai Itália nagy városaiban, valamint a közép-európai Bécsben, Nürnbergben és Prágában alakultak ki. E korszak első nagy matematikusa a német **Regiomontanus** (1436-1476) volt.

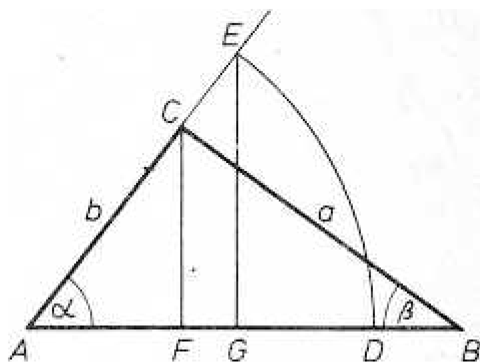
Eredeti neve **Johannes Müller.** A kor szokása szerint szülővárosának, a frankhoni Königsbergnek latin nevét vette föl. Nagy műveltségű, széles látókörű tudósként foglalkozott a matematikán és a csillagászaton kívül műszerkészítéssel,

könyvnyomtatással és fordítással is. Lipcsében és Bécsben tanult. Bécsi mestere, **Georg Peuerbach** (1423-1461) megkezdte **Ptolemaiosz** *Almagesztjének* görögből latinra fordítását. Ezt a munkát **Regiomontanus** fejezte be. Rómában, Velencében és más itáliai városokban ismerkedett meg a görög matematika és csillagászat klasszikus műveivel. A bécsi egyetem katedrájáról barátja, a nagy humanista, **Vitéz János** esztergomi érsek csábította át Esztergomba, ahol néhány évet töltött. Tanított a pozsonyi egyetemen is és 1468-tól 1471-ig **Mátyás** király udvarában élt, ahol a Corvina könyvtár görög kéziratait rendezte. Itt írta az *Ephemerides* című csillagászati művét, amelyet **Kolumbusz** is felhasznált felfedező útján. **Regiomontanus** korának szokásaihoz híven, asztrológiával is foglalkozott. Érdekesség, hogy hazánkban a legelterjedtebb asztrológiai könyv **Regiomontanusé** volt, amint annak címlapján a **Királyhegyi János** név is tanúsítja. Ő készítette 1473-ban az első olyan csillagászati táblázatot, amely bármely időpontra meghatározta a Nap és a Hold egymáshoz viszonyított helyzetét. Ennek a földrajzi hosszúság meghatározásában volt fontos szerepe, különösen éjszakai hajózásnál. **Regiomontanus** 1471-ben Nürnbergbe költözött, ahol **Bernhard Walter** nevű tanítványa egy csillagvizsgálót és egy nyomdát rendezett be számára. A következő három évben ebben a nyomdában adta ki műveit. 1475-ben IV. Six**tus** pápa hívására Rómába utazott, hogy közreműködjék a sürgőssé vált naptárreformban. Ebben azonban megakadályozta hirtelen halála. Azt beszélték, hogy a trapezunti **Georgiosz** (1393-1486) fiai mérgezték meg, amiért apjuk *Almageszt-fordítását* **Regiomontanus** élesen megbírálta. Halálának hivatalos oka a pestis. A következőkben tekintsük át a nagy humanista matematikai érdemeit.

1464-ben Páduában előadás-sorozatot tartott **al-Fargáni (Al-fraganus, ?—861)** arab csillagászról. Ennek bevezetésében matematikatörténeti összefoglalást adott, a maga nemében Európában az elsőt. Ebben azt is megemlítette, hogy **Diophantosz** 13 könyvét ő fordította le először görögről latinra.

Ugyancsak 1464-ben fejezte be a Rómában, még 1462-ben megkezdett, *De triangulis omnimodis libri quinque* (Öt könyv mindenféle háromszögekről) című, legjelentősebb matematikai

munkáját. Nyomtatásban ez a mű, amely csak halála után, 1533-ban jelent meg Nürnbergben, meghatározó módon előmozdította a trigonometria fejlődését. **Regiomontanus** könyve után vált el véglegesen a trigonometria a csillagászattól, és lett a matematika külön fejezete. Igaz, hogy már **Násziraddín at-Túszi** (409. oldal) is a csillagászattól külön tárgyalta a trigonometriát, de ő követőkre nem talált. **Regiomontanus** kifejtette, hogy a síkgeometriai problémák lényeges hányada visszavezethető háromszögmegoldásokra, és ezért szükséges kidolgozni egy, a háromszögekkel foglalkozó elméletet.



261. ábra

A *De triangulis* mesterien összegyűjti és rendezi a háromszögekre és a trigonometriára vonatkozó görög és arab ismereteket. **Regiomontanus** az elődök eredményeit kibővítette saját felfedezéseivel és bizonyításaival, de munkájának fő érdeme módszertani, azaz a nagy területű anyag egységes szempontú tárgyalása. Rövid tartalmi áttekintés: Az első kötetben az alapozást olvashatjuk, az arányokra és a háromszögekre vonatkozó definíciókat és alaptételeket. A második kötet a síkháromszögekre vonatkozó legfontosabb feladatokat tárgyalja. A harmadik kötet a gömb geometriájának alapjaival ismertet meg. A két utolsó kötet részletes gömbi trigonometria.

A könyv jellemzésére kiragadunk néhány példát:

A második kötet **33.** pontjában így igazolja **Regiomontanus** a szinusztételt: Legyen az *ABC* háromszögben *(261. ábra)* $\alpha > \beta$, és igazoljuk, hogy

a : b = sin α : sin αβ.

Ehhez rajzoljunk az *A* pontból mint középpontból *BC* sugárral körívet az α szög két szára közé *(DE)*. Állítsunk a *C* és *E* pontból az *AB*-re merőlegest *(CF* és *EG)*. A rajz szerint:

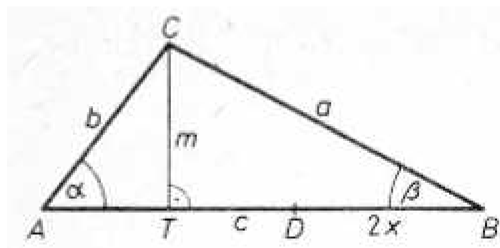
$$\sin\alpha = \frac{EG}{AE} \quad \text{és} \quad \sin\beta = \frac{CF}{BC}.$$

Mivel *AE*=*BC,* azért sin α : sin β=*EG : CF,* de az *AFC* és *AGE* hasonló háromszögekből:

EG : *CF* = *AE : AC* = *a : b.*

Így valóban: a : b = sin α : sin β.

Algebrai jellegű megoldáshoz vezet a második kötet 12. feladata. Ebben adott a *262. ábra ABC* háromszögének c oldala és a hozzá tartozó *m* magasság, valamint a másik két oldal aránya. Számszerűen: c=20, *m*= *5 és a : b*=*5 : 3.* Ezen adatokból keressük az *a* és *b* oldalt!



263. ábra

Regiomontanus megoldása: Mivel *a:b*= **5** : **3,** azért **a**>**b,** illetve α>β. Így a *TB* szakaszra rámérhető a *TD*=*AT* távolság. **Regiomontanus** a *DB* szakaszt 2x-szel jelölte. Ekkor

AD=c—2x=20—2x, tehát AT= 10—x.

A Pitagorasz-tétel szerint:

$b^2 = AT^2 + m^2 = x^2 - 20x + 125.$

Hasonlóképpen: $TB = TD + DB = 10 - x + 2x = 10 + x$ lévén,

$a^2 = TB^2 + m^2 = x^2 + 20x + 125.$

Az $a : b = 5 : 3$ szerint pedig:

$(x^2 + 20x + 125) : (x^2 - 20x + 125) = 25 : 9.$

Ebből pedig Regiomontanus a

$16x^2 + 2000 = 680x$ másodfokú egyenlethez jutott.

262. ábra

Módszere miatt ide csatoljuk REGIOMONTANUSnak egy harmadfokú egyenletre vezető feladatát, amely főleg az utólagos megjegyzése miatt érdekes. Giovanni Bianchini (?-1466) olasz csillagásznak adta fel a következő feladatot: A 263. ábrán az ABC háromszögben ismerjük az oldalakat: $a = 25$, $b = 18$ és $c = 29$. Húzzuk meg a C csúcsból a CD szakaszt úgy, hogy x^2-nek és a by szorzatnak az összege b^2 legyen. Mekkora x? A feltétel szerinti egyenlet:

$x^2 + 18y = 18^2.$

Legyen most a C csúcshoz tartozó magasság: $CT = m$, akkor

$m^2 = b^2 - z^2 = a^2 - (c - z)^2,$ ■

illetve az adatokkal:

$18^2-z^2=25^2-(29-z)^2.$

Ebből:

$$z=\frac{18^2+29^2-25^2}{58} \quad \text{és} \quad m^2=18^2-\left(\frac{270}{29}\right)^2.$$

Viszont az

$$(x-z)^2=x^2-\frac{540}{29}x+\left(\frac{270}{29}\right)^2.$$

A TDC háromszögből pedig:

$$y^2=m^2+(x-z)^2=$$
$$=18^2-\left(\frac{270}{29}\right)^2+x^2-\frac{540}{29}x+\left(\frac{270}{29}\right)^2=$$
$$=x^2-\frac{540}{29}x+18^2.$$

Mivel a feltételi egyenletből

$$y=\frac{18^2-x^2}{18}, \quad \text{és így} \quad y^2=18^2-2x^2+\frac{x^4}{18^2},$$

azért

$$18^2-2x^2+\frac{x^4}{18^2}=x^2-\frac{540}{29}x+18^2.$$

Az $x\neq 0$-val való egyszerűsítés és rendezés után nyerjük az

$$\frac{x^3}{324}+\frac{540}{29}=3x$$

harmadfokú egyenletet, amivel azonban a két csillagász már nem boldogult. **Regiomontanus** viszont a félbemaradt megoldást a következő megjegyzéssel kísérte: „Adja ön meg nekem az *AD* szakaszt, és akkor én megadom az l°-hoz tartozó húrt.” E megjegyzés alapján biztosra vehetjük, hogy **Regiomontanus** ismerte a

$4\sin^3\alpha+\sin 3\alpha=3\sin\alpha$

összefüggést, amely sin α-ban olyan típusú harmadfokú egyenlet, mint amelybe a két csillagász bicskája beletörött. Bizonyára **Regiomontanus** a sin 3° értékét is meg tudta határozni, és látta, hogy a tárgyalt típusú harmadfokú egyenlet megoldását ismerve eljuthatott volna a sin 1° meghatározásához.

Regiomontanus készített igen részletes szinusztáblázatot, sőt egy tangenstáblázatot is. Éppen ezért látta meg az előbbi harmadfokú egyenletnek és a szögharmadolásnak az összefüggését. Említést érdemel az a táblázata is, amely a derékszögű gömbi háromszög befogóját adta meg a vele szembeni szög és az átfogó különböző értékeire a

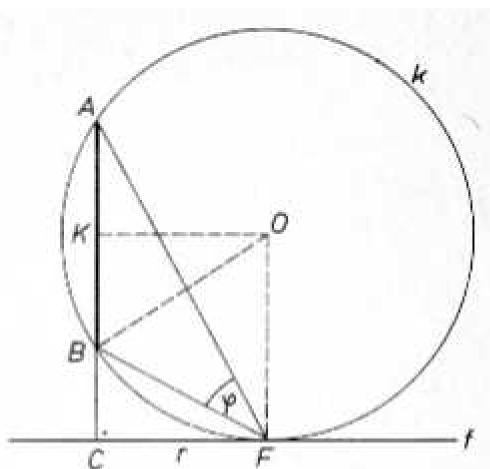
sin a = sin *c* * sin α

összefüggés alapján. E kétváltozós táblázatban c és α l°-os ugrásokkal változik.

Nem feledkezhetünk meg REGIOMONTANUSnak arról a feladatáról, amelyben Arkhimédész és Apollóniosz után elsőként vetett fel szélsőérték-problémát. A feladat így szól: Egy függőlegesen felfüggesztett 10 láb hosszú rúd a Föld felszínének melyik

pontjából látszik a leghosszabbnak, ha az alsó vége 4 láb magasságban van a talaj fölött?

A megoldás a *264. ábra* alapján történher. Az *f* egyenes jelöli a Föld felszínét. A 10 láb hosszú rudat ábrázolja az *AB* szakasz. Ez a szakasz ugyanolyan hosszúnak látszik a talajra rajzolt *C* középpontú kör bármely pontjából. Ezen körök közül kell kiválasztanunk a megfelelőt, ennek a sugarát kell meghatároznunk. Tegyük fel, hogy a keresett kör *r* sugara éppen a rajz szerinti *CF* szakasz. E talajon levő kör *F* pontjából az *AB* rúd φ szögben látszik. A kiszemelt F pont rajta van a talajra merőleges síkú *ABF* háromszög köré írható *k* körön is. Lássuk be, hogy ha az *F* pontot helyesen választottuk, akkor a *k* kör a talajt jelző *f* egyenest az *F* pontban érinti. Ha ugyanis nem így lenne, akkor a *k* kör az *f* egyenest az F-en kívül még egy *G* pontban is metszené. Az F ekkor nem a φ maximumához tartozó pont lenne, hiszen az *FG* húr minden belső pontjából az *AB* rúd nagyobb szögben látszik, mint a húr két széléről. A keresett F pont tehát csak az *A* és *B* ponton átmenő és az *f* egyenest érintő kör F érintési pontja lehet. A *k* kör centruma rajta van az *AB* felezőmerőlegesén, *KO*-n, így e kör sugara



264. ábra

$$OF = CK = \frac{AB}{2} + BC = 5 + 4 = 9 \text{ láb.}$$

A keresett r = CF = *KO* sugár pedig a *BOK* derékszögű háromszögből:

$$r = \sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56} \text{ láb.}$$

REGIOMONTANUS levelezéséből tudjuk, hogy foglalkoztatta számos egyenletmegoldási és számelméleti kérdés is. Ő találta meg az ötödik tökéletes számot, a 33 550 336-ot (86. oldal). Fennmaradt még egy kis matematikai tárgyú műve, amelyben a csillagsokszögekkel foglalkozik.

Méltányolnunk kell azt is, hogy REGIOMONTANUS vezette be az európai matematikába a gyökmennyiségek fogalmát, illetőleg ő dolgozta ki a gyökmennyiségek műveleti szabályait. Ennek a látszólag kicsi, és nem is egészen új területnek a meghódítása - hiszen a gyökvonás-műveletnek akkor már több ezer éves múltja volt - az algebra területén jelentősnek bizonyult, mert általa vált lehetővé az egyenletek gyökkifejezésekkel való megoldása. E fogalom birtokában a megoldhatóság kutatása kiterjedhetett új egyenlettípusokra is.

Éppen a XV-XVI. században született meg Európa új matematikai vívmányaként a rövidítéseket, jelöléseket tervszerűen használó és fejlesztő ún. szimbolikus algebra. Ennek egyik jelentős képviselője volt a francia

Nicolas Chuquet (1445?-1500?). Ez a francia orvos Párizsban született és Lyonban praktizált. 1484-ben fejezte be a *De triparty en la* ***Science des nombres*** (A számok tudománya három részben) című művét, amely nyomtatásban csak sajnálatosan későn, 1880-ban jelent meg. Mégsem maradt teljesen hatástalan, mert a lyoni ÉTIENNE DE LA ROCHE tekintélyes részeket vett át CHUQUET kéziratából az 1520-ban és 1538-ban megjelent, *L'arismetique nouvellement composée* (Új aritmetikai írások) című könyvében. Ezzel a közvetítéssel CHUQUET újításai befolyásolhatták az algebra korabeli fejlődését. Valószínű, hogy a francia orvost a matematika

művelésére FIBONACCI *Liber Abacija* késztette, hiszen Lyonban nem elhanyagolható számban éltek olaszok. Lapozzuk át sietve a *Tripartyt!*.

A bevezetés a racionális számok aritmetikai műveleteit ismerteti meg, a hindu-arab számírást használva. Itt olvashatók először a millió utáni billió, trillió stb. számnevek a nonillióig bezárólag. Ismertette a negatív számok közti műveleteket is. A négy alapművelet számára a francia plus (több), moins (kevésbé), multiplier (szorozni) és partir (osztani) neveket használta. Az első kettőt rövidítette is a felül jelölt p és m kezdőbetűkkel. Az m a negatív számot is jelentette. Az ismeretlen részére nem vezetett be betűjelet, hanem annak fokát az együtthatójának a kitevőjébe írta indexként. Például 4^1 jelentette a 4x-et, 4^2 a $4x^2$-et, általában 4^n a $4x^n$-t. A konstans tagot az egyenletben a 0 kitevővel jelezte, tehát például az 5-öt úgy írta, hogy 5°. Ezekkel a szimbólumokkal a

$6x^3 + 4x^2 — 2x + 3 = —5$ egyenletet így írta volna fel

$$6^3\ \tilde{p}\ 4^2\ \tilde{m}\ 2^1\ \tilde{p}\ 3^0 \quad \text{egaulx} \quad \tilde{m}\ 5^0.$$

Négyzetgyökjelnek a radice (gyökér) szó kezdőbetűjét használta, így $R^2 30$ jelentette a $\sqrt{30}$-at.

Alkalmazta a negatív kitevőt is, például a

$42x^2 : 6x^5 = 7x^{-3}$

osztást így írta:

$$42^2 \div 6^5 \quad \text{egaulx} \quad 7^{3\tilde{m}}.$$

Megokolás nélkül ugyan, de állította, hogy az $(a+b)/(c+d)$ tört értéke az a/c és a b/d között van, amikor is feltételezte, hogy *a, b, c* és *d* természetes számok. Ennek a középnek a segítségével nem ötlettelenül,

bár kissé hosszadalmas módon közelítette meg az egyenletek pozitív

gyökét. Módszerét mutassuk be az

$$x^2+x=4\frac{4}{25}$$

egyenlet esetében. Kis számolás meggyőz arról, hogy

$$\frac{1}{1}<x<\frac{2}{1}.$$

Legyen az első közelítő érték az 1 és a 2 fent definiált közepe.

Behelyettesítve az $x_1=\frac{3}{2}$ -et látjuk, hogy $\frac{3}{2}<x<\frac{2}{1}$.

A következő közelítés: $x_2=\frac{5}{3}$. Ekkor $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$.

A harmadik becslés: $x_3=\frac{8}{5}$. Ekkor $\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{8}{5}=4\frac{4}{25}$,

tehát az egyenlet egyik gyöke éppen az $x=x_3=8/5$.

A zárójel helyett Chuquet aláhúzást használt. Így például azt állította, hogy

R² $\underline{14\ \tilde{p}\ R^2\ 180}$ egaulx 3 p̃ R² 5,

azaz, hogy

$$\sqrt{14+\sqrt{180}}=3+\sqrt{5},$$

amire a két oldal négyzetének az egyenlőségéből mi is

következtethetünk.

Érdemes végigkísérni sorról sorra néhány nála előforduló egyenletmegoldási lépést, hogy lássuk, mennyire használható CHUQUET algebrai jelölésrendszere. Megoldandó tehát a

$$R^2\, \underline{4^2\, \tilde{p}\, 4^1}\, \tilde{p}\, 2^1\, \tilde{p}\, 1^0 \quad \text{egaulx} \quad 100^0 \quad (\sqrt{4x^2+4x}+2x+1=100)$$

egyenlet! A megoldás kezdeti lépései:

$$R^2\, \underline{4^2\, \tilde{p}\, 4^1} \quad \text{egaulx} \quad 99^0\, \tilde{m}\, 2^1 \quad (\sqrt{4x^2+4x}=99-2x)$$

$$4^2\, \tilde{p}\, 4^1 \text{ egaulx } 9801^0\, \tilde{m}\, 396^1\, \tilde{p}\, 4^2 \quad (4x^2+4x=9801-396x+4x^2)$$

$$400^1 \text{ egaulx } 9801^0 \qquad (400x=9801).$$

Feltétlenül figyelmet érdemel, hogy CHUQUET egy táblázatba társította 2-nek a természetesszám-kitevőjű hatványait a kitevőkkel, és így nyerte az alábbi elrendezésben a következő két sorozatot:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad \ldots,\quad 18,\quad 19,\quad 20.$$

$$2^1,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad 2^5,\quad \ldots,\quad 2^{18},\quad 2^{19},\quad 2^{20}.$$

E két, egymáshoz rendelt számtani és mértani sorozatra vonatkozólag megjegyezte, hogy a második sorozatban két elem szorzatának a kitevőjét megkaphatjuk, ha az első sorozat megfelelő két elemét összeadjuk. Ez a megfigyelés a XVII. század elején a logaritmusfogalom megszületéséhez vezetett.

CHUQUET algebrai szimbólumrendszere annyira fejlettnek mutatkozik, hogy kényszerülünk előzményekre gondolni. Valóban találunk előtte működő úttörőket. Közéjük tartozott a német **Johannes Widmann** (1462?-1498 után!) a lipcsei egyetem tanára, aki elsőként adott elő önálló egyetemi stúdiumként algebrát. Az ő *Behende und hübsche Rechnung auf allén Kaufmannschaft* (Gyors és szép számolás minden kereskedő számára) című, 1489-ben kiadott könyvében először látjuk nyomtatásban a + és a —

jeleket. A két jel azonban már előfordult korábban is számos névtelen német matematikai kéziratban.

A szimbolikus algebra kibontakozásának Németország és Franciaország mellett fontos színtere volt Itália. **Chuquet** maga is feltehetőleg jelentős itáliai hatás alatt állt. Nem lehet véletlen, hogy p, m, és R jelölései teljesen azonos formában jelennek meg például a kortárs olasz **Luca Pacioli** (1145?-1517) matematikai munkáiban is. Úgy látszik, hogy ebben az időben ezek az algebrai jelek már széles körben használatosak voltak. A kereskedőcsaládból származó **Pacioli** a Tiberis völgyében fekvő Borgo San Sepolcróban született, ott, ahol kortársa, **Piero della Francesca** (1416?-1492) festőművész is, aki a De prospectiva pingendi című művével jeles előfutára volt a perspektivitás kutatásának. Itt említjük meg Leon Battista Alberti (1404-1472) építésznek a Della pictura című tanulmányát (1435), amelyben először bukkant fel a perspektíva fogalma. Egyébként 1471-ben Pacioli Rómában találkozott Albertivel, és ekkoriban öltötte fel a franciskánusok reverendáját. Milánóban kötött barátságot Leonardo da Vincivel (1452-1519). Pacioli számította ki LEONARDÓnak, hogy mennyi bronz kell a lovasszobrához, Leonardo pedig szép illusztrációkkal látta el a matematikus 1509-ben megjelent Divina proportione (Az isteni arány) című könyvét. Ebben a szerző Eukleidész alapján tárgyalta az aranymetszést, és ismertette a szabályos és félszabályos testeket. Barátja hatására az aranymetszés szerinti komponálás LEONARDÓnak szinte művészi hitvallása lett.

PACIOLI fő műve, a *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita* (Az aritmetika, a geometria, az arányok és arányosságok s.ummázata) 1494-ben jelent meg Velencében. Címéhez híven ez a könyv összefoglalja a XV. századi Európa matematikai ismereteit. Az aritmetikai rész a püthagoreusi misztikus számelméletből indulva számos szorzási és osztási eljárást ismertet, köztük azokat is, amelyeket ma használunk. Tárgyalja a törtekkel való műveletek után az arányossági feladatokat, a hármasszabállyal együtt. Végül rátér az algebrára. A jelölések kis különbséggel megegyeznek a CHUQUET-nél látottakkal. PACIOLI azonban több szórövidítést használt. Ilyenek: n° (numero) az állandó tag jele; *co* (cosa = dolog) az ismeretlen neve; *cu* (cubo) a köb rövidítése stb.

A zárójel helyett aláhúzást ő nem használt. Például a $\sqrt{(35-\sqrt{50})}$-et így jelölte: R V 35 m R 50. A V betű, amelyet abban a korban gyakran használtak az *u* helyett is, az universale (közös, általános) szó kezdőbetűje. Ez jelzi, hogy arra, ami utána következik, mindre vonatkozik a gyökvonás. A gyökmennyiségekkel kapcsolatban például ilyen megállapításai is vannak:

$$\sqrt{10}+\sqrt{40}=\sqrt{90}, \text{ a } \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

összefüggés alapján.

Érdekes, hogy bár a negatív mennyiségekre már jele is van, mégsem vette észre - miként kortársai sem -, hogy a másodfokú egyenleteknek közös alakot lehet adni. Mivel csak pozitív együtthatójú egyenletekkel foglalkozott, azért külön tárgyalta az

$ax^2 = bx$, $ax^2=c$, $bx=c$,

$ax^2+bx=c$, $bx+c=ax^2$, $ax^2+c=bx$

típusú egyenleteket. A felsoroltakon kívül még további 8 egyenlettípust sorolt fel. Ezek:

ax^4-e, $ax^4=dx$, $ax^4=cx^2$,

$ax^4 + cx^2 = dx$, $ax^4+dx = cx^2$, $ax^4+ ex^2=e$,

$ax^4+e=cx^2$, $ax^4=cx^2+e$.

Az utóbbi csoport negyedik és ötödik egyenletéről, valamint az $ax^3 + bx^2=d$, $ax^3+cx=d$ és $ax^3+bx^2+cx=d$

harmadfokú egyenletekről azt állította, hogy megoldásuk lehetetlen. Egy további mondatából azonban látszik, hogy nem zárja ki azt a lehetőséget, hogy később ezek is megoldást nyerhetnek.

Figyeljük meg az algebrai résznek azt az egyenletmegoldását, amely megkívánja a köbszámok összegezését is! Az egyenlet:

$(1+2+3+ \dots + x)+(1^3+2^3+3^3+ \dots + x^3)=20\,400$.

A megoldás:

$$\frac{x(x+1)}{2}+\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2=20\,400.$$

A kijelölt műveletek elvégzése és a 4-gyel való osztás után :
$x^4+2x^3+3x^2+2x=81\,600$.

Ha most mind a két oldalt növeljük 1-gyel, akkor:

$(x^2+x+1)^2=81\,601$,

ahonnan az

$x^2+x+1 = \sqrt{81601}$

másodfokú egyenlethez jutunk. **Pacioli** a negatív gyököt nem vette figyelembe. Valamely egyenlet 0 megoldását sem fogadta el.

A könyv kereskedelmi számtan részében van olyan kamatos-kamat számítási feladat, amelyben az idő, tehát az

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n=T$$

képletben az n kitevő keresendő. A $T=2$ esetre Pacioli a téves $72/p$ közelítő megoldást adja a $69/p$ helyett. Ebben a fejezetben a szerző gondosan rögzíti a kettős könyvvitel szabályait is.

A *Summa*ban a különleges feladatok között valószínűségszámítási kérdések is szerepelnek. Ezekből az egyik: Két kockajátékos közül az nyer, aki először éri el a 6 pontot. A játék azonban félbeszakadt akkor, amikor az egyik játékosnak 5, a másiknak pedig 2 pontja volt. Hogyan kell igazságosan felosztani a betétet? **Pacioli** megoldásul a hibás 5 : 2 arányt jelöli meg.

A könyv geometriai része — főleg **Leonardo Pisano** hatására - háromszögekre és körre vonatkozó síkgeometriai feladatokat közöl.

Mint érdekességet említem meg, hogy **Luca Pacioli** az első matematikus, akinek hitelt érdemlő képmása maradt fenn. A képen **Jacopo de Barbari** (1445?-1516?) olasz festő magyarázat közben ábrázolja, előkelő pártfogójával együtt.

Azok az események, amelyek az ókorhoz képest igazán újat hoztak a matematika történetébe,

Girolamo Cardano (1501-1576) itáliai orvos, filozófus és matematikus személye körül csoportosultak. Az ő nevével forrt össze a harmadfokú egyenlet megoldásának regényes története. **Facio Cardano** milánói jogász törvénytelen fiaként látta meg a napvilágot Paviában, ahova anyja, **Clara Miceri** menekült, miután **Facio** házából elűzte. A kis **Girolamo** már 4 éves volt, amikor apja Milánóban CLARÁnak házat vett, sőt ő maga is odaköltözött, bár élettársát feleségül nem vette. A fiúcska gyermeki életét beárnyékolta a szeretetlen, sokszor kegyetlen bánásmód. Anyja szégyelte, apja szolgaként tartotta, kortársai csúfolták. Szülei csak akkor gondoltak taníttatására, amikor apja már annyira megöregedett, hogy nehezére esett a mindennapi szükségletek előteremtése. **Facio** 75 éves volt, amikor **Clara** asszonynak - aki jövőjét így vélte biztosítani -sikerült rábeszélnie, hogy fiát egyetemre küldje. Három évbe került, amíg az ifjú megszerezte azokat az alapokat, köztük a latin nyelv ismeretét is, amelyek feltételei voltak az egyetemi tanulmányoknak. Először Paviában tanult jogot. Ezt abbahagyta, és 1524-től a páduai egyetemen részesült orvosi képzésben. Még megalázott gyermeki lelkében született meg a nagy elhatározás, hogy mindenképpen híres ember lesz. Ez a célkitűzése megmaradt egész életében. Talán a matematikatörténetet nem érdekli az a hihetetlenül szívós küzdelem, amelyben bohém alaptermészete ellenére, szabadságára mindvégig vigyázva, a szegénységgel dacolva, két fia tragikus elvesztése feletti keserűségét is legyűrve, ontotta magából a filozófiai, orvosi és matematikai műveket. Elérte, hogy híresebb orvos az ő idejében Európában nem volt. Királyok és fejedelmek csábították udvarukba hiába, és mi több, még szeretett városában, Milánóban is sikerült megbecsülést kivívnia, ott, ahol kortársai sokáig nem akarták befogadni a zabigyerekből lett orvost. Munkásságából igyekszem kiemelni a matematikai vonatkozásokat.

Az első csillagászati tárgyú könyvét, illetve füzetecskéjét 15 éves korában írta *A testek távolságának meghatározásáról.* Ebben megmutatta, hogy két égitest távolságát hogyan lehet kiszámítani a hosszúsági és szélességi adatokból. Ez és a *Hogyan lehet elérni a halhatatlanságot?* című írása csak arra volt jó, hogy a dicsvágyó ifjú belássa tudatlanságát. Betöltötte a 33 évet, mire elérte, hogy Milánóban megtűrjék a szegényház orvosaként. Ebben az évben egy kártyapartnere beajánlotta a szegények iskolájába is, ahol matematikát, csillagászatot és földrajzot tanított. Akkoriban írta tanulmányait **Eukleidész** *Sztoikheiájáról,* **Ptolemaiosz** *Geographiá*-járól és **Sacrobosco** egy geometriai munkájáról. 1536-ban, amikor első gyermeke, Clara megszületett, fogadta házába **Ludovico Ferrarit,** aki afféle mindenesből nőtte ki magát tanítvánnyá, majd a milánói egyetem matematikaprofesszorává. Két év múlva 1538-ban fejezte be *Gyakorlati aritmetika és egyszerű mérések* című könyvének kéziratát. Ekkor értesült arról, hogy **Scipione del Ferro** bolognai professzor és **Niccoló Tartaglia** bresciai számolómester egymástól függetlenül felfedezték az $x^3+px=q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását. Igen szerette volna ezt az eredményt is könyvébe belevenni, de a megoldással ő maga nem boldogult, **Tartaglia** pedig akkor még nem volt hajlandó titkát elárulni. A könyv Nürnbergben jelent meg 1539-ben. Itt talált **Cardano** készséges kiadóra annak a **Johann** PETREIUSnak a személyében, akinél 1543-ban **Kopernikusz** világhírű munkája is napvilágot látott. Ekkor **Cardano** már a milánói orvosi kollégium igazgatója és a paviai egyetem rektora volt. Ez a két előkelően hangzó tisztség azonban anyagilag nagyon keveset jelentett. A konyhapénz jórészt kockázásból, kártyázásból és sakkozásból került elő. A szerencsejátékok kedvelésének is volt valamelyes matematikai haszna, mert igyekezett megfigyelni a játékok „törvényeit”, és kidolgozni a lehető legjövedelmezőbb játékmódszereket. E tapasztalatokat később *A kockajátékról* írt könyvében rendszerezte, amely így a valószínűségszámítás egyik korai jelentkezése lett. 1543-ban Nürnbergben ismét megjelent két, a naptárszámítással foglalkozó könyve. Itt került ki a nyomdából 1545-ben a valóban világhírt biztosító műve, az *Ars magna sive de regulis algebraicis* (A nagy tudomány, azaz az algebra törvényeiről). Ez először tartalmazott olyan matematikai felfedezéseket, amelyek túlhaladták az ókori görög és a középkori arab eredményeket. Ez a könyv az, amely miatt **Cardano** neve a matematikatörténetből nem

hagyható ki, és amely bizonyítja, hogy szerzője aktív részese volt az európai új tudományok megszületésének.

Abban az időben nemcsak új matematika született, amely főleg **del Ferro, Tartaglia, Cardano** és **Ferrari** működésének köszönhető. A **XVI.** században jelent meg **Kopernikusz** korszakot indító csillagászati műve a *De revolutionibus orbium coelestium* (Az égi pályák körforgásairól, 1543), és ugyancsak 1543-ban indult el útjára az új anatómia, **Andreas Vesalius** (1514-1564) *De humani corporis fabrica* című, az emberi test felépítéséről szóló könyve nyomán.

1552-ben kezdődött CARDANÓnak mint orvosnak a diadalútja, amelynek végén valóban ő lett az akkori Európa leghíresebb orvosa. Ez az út Párizson át vezetett Edinburghbe **Hamilton** hercegérsekhez, akit sikerült meggyógyítania. Hosszasabban időzött Párizsban, ahol hozzájutott egy latin nyelvű Arkhimédész-kiadáshoz és **Ptolemaiosz** asztrológiai művéhez. Ez utóbbi ismertetését 1555-ben adta ki Párizsban, benne még **Krisztus** horoszkópját is felállította. Párizsi népszerűségét azonban nagyon sértette

Oronce Fine (Fineus, 1494-1555) matematikus barátságtalan viselkedése. ő volt a párizsi College de Francé első matematikaprofesszora. Tizenöt kötetes *Elemi matematikájában* (1532) áttekintette a korabeli aritmetikát, geometriát, csillagászatot és trigonometriát. Tárgyalta a 60-as számrendszert is. ő maga nem, de tanítványai erősen támadták **Cardano** nem életszerű feladatait.

Cardano Flandrián és Svájcon keresztül tért vissza Milánóba. Közben Leuvenben találkozott

Gemma Frisius (1508-1555) flamand matematikussal, aki igen jó navigációs térképeket készített. - Közbevetőleg jegyezzük meg, hogy hazánkban is megjelent egy matematikakönyv **Gemma Frisius** neve alatt: a *Debreceni Arithmetika* 1577-ben. Ezt a nálunk időrendben harmadik matematikai kézikönyvet **(György Mester** *Arithmetikája* 1499-ben és **Kristóf Pühler** *Geometriája* 1563-ban után) azonban ismeretlen szerző írta ízes magyar nyelven, és csak azért tüntette fel fordításnak, hogy a könyv tekintélyét emelje a flamand matematikus nevével. **Gemma** Frisiusnak volt ugyan egy Antwerpenben 1536 táján kiadott *Arithmeticája,* de a

Debreceni Arithmetika nem ennek a magyarra való átültetése.

Cardano 1553 januárjában érkezett vissza Milánóba. Visszautasítva minden királyi ajánlatot, sőt a mantuai herceg fenyegetésével sem törődve, nem lett udvari orvos. Így nyert hat békés évet, amikor, ha nem is gazdagon, de gyötrő gondok nélkül dolgozhatott. 1557-ben született meg nagy enciklopédikus műve, a *Különféle dolgokról.* 1559-ben visszament a paviai egyetemre, de 1562-ben már a bolognai egyetem orvosi karán látjuk. Ezekben az években vesztette el két fiát. Az idősebb GIAMBATTISTÁt, apja nagy reménységét, gyilkosságért végezték ki, a kisebbik ALDÓT pedig rablásért (apját is kirabolta) örökös száműzetéssel büntették. 1570-ben CARDANÓT is bebörtönözték, ismeretlen okból, Bolognában, ahol rengeteg ellensége volt. Talán azért csukták le, mert egyik filozófiai művével egyházi dogmákat sértett. 1571 szeptemberében kiszabadult, de minden nyilvános szerepléstől eltiltották, és így unokájával, a kis Facióval és egyik tanítványával együtt Rómába költözött. Itt élt visszavonultan, önéletrajzán dolgozva haláláig.

Ahhoz, hogy CARDANO matematikai érdemeit világosan láthassuk, meg kell ismernünk a harmadfokú egyenlet megoldásának történetét. Tudnunk kell, hogy e téren az első eredmény

SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526) bolognai matematikus nevéhez fűződik. Kezdetben Bolognában, majd a velencei egyetemen tanított algebrát és perspektivitást. Mestere volt az állandó körzőnyílással való szerkesztésnek. Ez a XVI. századi „mathematico eccelentissimo” megtalálta, de titokban tartotta az

$x^3+bx=c$ (b > 0 és c > 0)

alakú harmadfokú egyenlet megoldóképletét. Titkát csak vejének, a bolognai egyetemen utódjának: Annibale della NAVÉnak és professzortársának, a brescai Antonio Maria FIORÉnak (Floridus vagy Florido) árulta el.

FIORE 1530-ban nyilvános versenyre hívta a szintén bresciai DE Coit(Kolla) főleg harmadfokú egyenletekhez vezető feladatok megoldásában. A kihívott segítségül hívta honfitársát, TARTAGLIÁT, akinek valódi neve NICCOLÓ FONTANA (1500?-1557) volt. FONTANA egy szegény lovasküldönc fia, apját 6 éves korában vesztette el. 1511-ben a Bresciát feldúló francia katonák elől

anyjával egy templomba menekült. A franciák azonban könyörtelen kegyetlenséggel öldösték le az előlük rejtőzködni igyekvő nőket és gyermekeket. NICCOLÓ is több kardvágást kapott, amelyek egyike felhasította száját és szájpadlását. A barbár öldöklést a gyermek túlélte ugyan, de sérült szájával nehezen, hebegve beszélt. Ekkor ragadt rá a TARTAGLIA (dadogó) melléknév, amely élete végéig elkísérte, sőt a matematikatörténet is rendszerint így idézi. 14 éves korában 15 napig iskolai képzésben is részesült. Ennyi időre tudta anyja megfizetni a tandíjat. Az ifjú ezalatt csak az ábécé „k" betűjéig jutott. A szegénység azonban, úgy látszik, jó további mesternek bizonyult, mert megtanította nemcsak olvasni, hanem a tudományok nyelvére, a latinra is. A 23 éves TARTAGLIA Veronában már matematikatanítással kereste meg a kenyerét, és azzal, hogy megoldotta a hozzáforduló iparosok, kereskedők, építészek, tüzérek számolási problémáit. Ezt az autodidakta számolómestert kérte meg DA COI, hogy oldaná meg az

$x^3+6x^2=5$ és az $x^3+6x^2+8x=1000$

egyenleteket. TARTAGLIA elhárította magától a kérést, de kijelentette, hogy „a köb plusz négyzet egyenlő szám" fajtájú egyenletet meg tudja oldani, sőt „a köb plusz négyzet plusz dolog egyenlő szám" alakú egyenlet megoldását sem tartja lehetetlennek. Erről a kijelentéséről FIORE is tudomást szerzett, és 1535-ben TARTAGLIÁt is kihívta matematikai párbajra. Mindkét versenyző átadott a másiknak 30 feladatot, amelyeket 15 nap alatt kellett megoldaniuk. Az nyert, aki több feladattal birkózott meg sikeresen. A vesztes pedig tartozott a győztest és annak 29 barátját megvendégelni. Az előzmények után TARTAGLIA biztosra vette, hogy ellenfele feladatainak zömét az $x^3 + bx=c$ alakú egyenletek köréből fogja kitűzni. Minden erejét összeszedve a február 12-ről 13-ra virradó éjjel sikerült megtalálnia az ilyen egyenletek megoldását, sőt néhány nap múlva az $x^3= bx+ c$ alakúakét is. A verseny napján, február 22-én a felkészült bresciai számolómester két óra alatt megoldotta Fiore professzor minden feladatát, mialatt ellenfele eggyel sem boldogult.

Amint említettük, CARDANO DA Coitól értesült arról, hogy TARTAGLIA ismeri a szóban forgó harmadfokú egyenletek megoldási eljárását, és mivel ő maga a problémával nem boldogult,

elhatározta, hogy a számolómestertől megtudakolja a „nagy tudományt”. Akkor írta ugyanis *Gyakorlati aritmetikáját,* amely jórészt LUCA PACIOLI *Summájának* a kritikája volt. Szerette volna megcáfolni LUCA PACIOLI azon állítását is, hogy a harmadfokú egyenletek megoldása lehetetlen. Ekkor azonban TARTAGLIA még hajthatatlan maradt, de 1539-ben, amikor CARDANO kilátásba helyezte, hogy TARTAGLIA tüzérségi találmányainak előkelő pártfogót szerez, eskü alatt fogadott titoktartás mellett TARTAGLIA átadta az „ars magná”-t a milánói orvosnak. CARDANO 1542-ig nem is szegte meg szavát, de amikor ebben az évben Bolognában ANNIBALE DELLA NAVE megmutatta neki apósának, SCIPIONE DEL FERRÓnak hátrahagyott írásait, és ebben megtalálta TARTAGLIA féltve őrzött formuláját, akkor a titoktartás alól felmentve érezte magát. Az 1545-ben megjelent *Ars magna sive de regulis algebraicisben* közölte nemcsak az addig titkolt képletet, hanem továbbfejlesztését is, a negyedfokú egyenletek megoldásával együtt. Az utóbbi a már említett LUDOVICO FERRARI műve, a továbbfejlesztés CARDANO vagy pedig CARDANO és FERRARI közös érdeme. Műve első részében a tényeknek megfelelően leírta, hogy: „A mi nagy időnkben Scipione del Ferro felfedezte az ismeretlen köbe plusz ismeretlen egyenlő szám megoldóképletét. ... aki ilyen dicső felfedezésre képes, attól várható, hogy mindent elérhet. Amikor a brescia i Niccoló TARTAGLIÁt, az én barátomat kihívta versenyre del Ferro tanítványa, Antonio Maria Florido, akkor Tartaglia is megoldotta ugyanezt a problémát, ezért nem lehetett legyőzni, és hosszas kérésemre engem is megismertetett azzal. ... megláttam, hogy segítségével még több elérhető, és annak az erejében rejlő nagy biztonsággal vizsgálataimban további eredményeket tártam fel, részben magam, részben Ludovico FERRARIval, volt tanítványommal együtt.”

E sorok tanúsítják, hogy **Cardano** a maga módján becsületesen járt el. A TARTAGLIÁnak tett ígéretét betartotta mindaddig, amíg nem értesült **del Ferro** elsőbbségéről, és idegen toliakkal sem ékeskedett. Hibát követett el, amikor a nyilvánosságra hozatal előtt szándékáról **Tartagliát** nem értesítette. Így aztán a magát megcsalva és kifosztva érző matematikus csak az esküszegést látta, és bosszúra szomjazott. 1546-ban kiadta a *Kérdések és különböző találmányok* című könyvét. Abban a dolgot a maga szemszögéből nézve leírta, hogy milyen fondorlattal csalta ki titkát **Cardano,** és hogy esküvel megpecsételt

titoktartási ígéretét milyen rútul megszegte. Így indult el egy áldatlan, semmit sem tisztázó vita **Tartaglia** és **Ferrari** között, aki **Cardano** védelmére kelt. A civódás végén **Ferrari** nyilvános vitára és versenyre szólította fel **TARTAGLIÁt.** A két ellenfél 1548-ban Milánóban találkozott. Itt az együttlét első délutánján **Tartaglia** belátta, hogy a barátoktól és tanítványoktól körülvett **Ferrari** ellen nem győzhet, hiszen beszélni is alig engedték. Este keserű szívvel, szó nélkül elhagyta a küzdőteret. A döntőbizottság természetesen a megfutamodott bresciait nyilvánította vesztesnek.

Ennek a döntésnek gyakorlati következménye az lett, hogy **Ferrari** rengeteg hízelgő ajánlatot kapott: nyilvános előadásokat tarthatott Rómában és Velencében, szolgálatukba hívták előkelő főurak. Ő a mantuai hercegség milánói adóhivatalának a vezetését vállalta el. Hét év múlva egy fekély a hivatalával járó utazásokat lehetetlenné tette, és ezért nyugalomba vonult. Utolsó éveiben a bolognai egyetem matematika tanszékén működött.

Tartaglia sorsa viszont rosszra fordult. Városa a vetélkedő kimenetelétől tette függővé a nyilvános előadások engedélyezését és műveinek kiadatását. A balul sikerült verseny minden ajtót bezárt előtte. Bresciát végleg elhagyta, és Velencében élte le további küzdelmes életét. Itt két könyvet írt: *Általános tanulmány a számokról és a mértékegységekről,* valamint *Általános szabályok valamely elsüllyedt hajó kiemelésére* címmel.

Ezek után lássuk, mit jelent a matematikatörténet számára *a nagy tudomány,* vagyis a harmadfokú egyenlet megoldásának felfedezése?

A XVI. században az egyenleteket még mindig pozitív együtthatókkal írták fel, és ezért megoldás szempontjából külön problémát jelentett például az $x^3+bx=c$, az $x^3=bx+c$ és az $x^3+c=bx$ egyenlet. Megoldásukat külön-külön keresték. Az első harmadfokú egyenlet, amellyel TARTAGLIA próbálkozott,

$$\mathrm{x}^3+\mathrm{ax}^2=\mathrm{c}$$

alakú volt. Gondolatmenete, amely nem maradt ránk, E. Bartalotti olasz matematikatörténész szerint a következő lehetett: Feltételezte, hogy az egyenlet gyöke

$x = \sqrt{p} - q$

alakú. E feltételezett kifejezés négyzete és köbe:

$x^2 = p + q^2 - 2q\sqrt{p}$

és

$x^3 = -q(3p + q^2) + (3q^2 + p)\sqrt{p}$.

Szorozzuk most a négyzetet $(3q^2 + p)$*-vel* és a köböt 2q-val:

$(3q^2 + p)x^2 = (p + q^2)(3q^2 + p) - 2q(3q^2 + p)\sqrt{p}$

és

$2qx^3 = -2q^2(3p + q^2) + 2q(3q^2 + p)\sqrt{p}$.

összegük: $2qx^3 + (3q^2 + p)x^2 = q^4 - 2pq^2 + p^2 = (q^2 - p)^2$.

Ez osztva 2q-val:

$$x^3 + \frac{3q^2 + p}{2q} x^2 = \frac{(q^2 - p)^2}{2q}.$$

A most nyert és az eredeti egyenlet összehasonlítása alapján:

$$a = \frac{3q^2 + p}{2q} \quad \text{és} \quad c = \frac{(q^2 - p)^2}{2q}.$$

Az elsőből $p = 2aq - 3q^2$.

Ezt beírva a másodikba: $c = 2q(2q - a)^2$.

Innen azonban TARTAGLIA nem jutott tovább, mert ez az egyenlet q-ban teljes harmadfokú, megoldása tehát nehezebbnek látszik, mint az eredetié.

Sikerrel próbálkozott azonban az

$x^3 + bx = c$

egyenlet megoldásával. Itt - bizonyára több kísérlet után - azt tételezte fel, hogy az egyenlet gyöke

$$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$$

alakú. Ennek köbe:

$$x^3=u-3\sqrt[3]{u^2v}+3\sqrt[3]{uv^2}-v.$$

Ugyanakkor

$$3\sqrt[3]{uv}\cdot x=3\sqrt[3]{u^2v}-3\sqrt[3]{uv^2},$$

tehát

$$x^3=u-3\sqrt[3]{uv}x-v,$$

ahonnan

$$x^3+3\sqrt[3]{uv}x=u-v.$$

Az eredeti egyenlettel való összehasonlítás azt eredményezi, hogy

$$b=3\sqrt[3]{uv} \quad \text{és} \quad c=u-v.$$

E két összefüggést u-ra és v-re egyenletrendszernek tekintve, a *v* kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$b^3=27u(u-c),$$

azaz

$$u^2-cu-\left(\frac{b}{3}\right)^3=0.$$

Ebből

$$u=\frac{c+\sqrt{c^2+4\left(\frac{b}{3}\right)^3}}{2}=\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

és

$$v=u-c=-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Ekkor pedig a feltételezés szerint

$$x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}.$$

Hasonló módon oldotta meg TARTAGLIA az

$x^3=bx+c$

egyenletet, azzal a feltételezéssel, hogy annak egyik gyöke

$$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$$

alakú.

Az $x^3+c=bx$ megoldásáról csak annyit mondott, hogy ennél is ugyanúgy kell eljárni, mint az $x^3=bx+c$ egyenletnél, mert e kettő „természete majdnem azonos”.

CARDANO AZONBAN ERRE AZ ESETRE KÜLÖN MEGOLDÓRECEPTET ADOTT, DE AZ AHHOZ VEZETŐ UTAT NEM MUTATTA MEG. ÚGY SEJTJÜK, HOGY FELHASZNÁLTA AZ $x^3=bx+c$ egyenlet megoldhatóságát, a következőképpen:

Legyen a megoldandó egyenlet

$x^3+c=bx$

és egy segédegyenlet az $u^3=bu+c$.

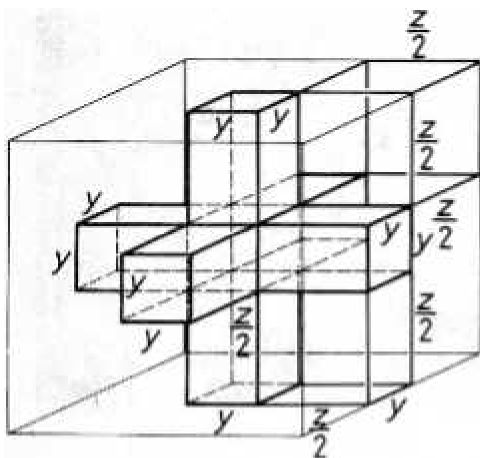
A kettő összege $x^3+u^3=b(x+u)$.

Osztva (x + u)-val: $x^2—ux+u^2=b$.

Ebből az *x-re* másodfokú egyenletből

$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4u^2+4b}}{2}=\frac{u}{2}\pm\sqrt{b-\frac{3}{4}u^2}.$$

Az *u* meghatározását pedig Tartaglia már megmutatta.



265. ábra

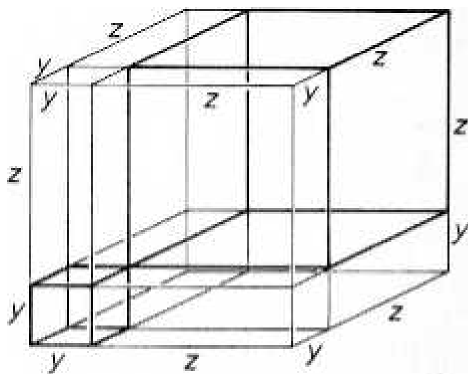
Az *Ars magna* tanúsítja, hogy CARDANO nem csupán szolgaian átvette és közölte TARTAGLIA eredményeit, hanem azokat részben továbbfejlesztette, részben pedig megindokolta. A műben érdekes geometriai gondolatmenetet olvashatunk az $x^3=bx+c$ egyenlet megoldásának magyarázatára. Ez az eszmefuttatás az

$(y+z)^3=y^3+3yz(y+z)+z^3$

azonosság szemléletes bizonyításával kezdődik a *265. ábra* segítségével. A kiindulási alap az *y* élű kockára épített „térkereszt", amelyet úgy kapunk, hogy a kocka minden lapjára y^2 alapú, z/2 magasságú négyzetes oszlopot állítunk. A kocka és e hat oszlop által alkotott testet neveztük térkeresztnek.

Egészítsük ki e térkeresztet egy (y + z) élű kockává! Ekkor a térkereszthez hozzá kell illesztenünk 12 darab $(z/2)^2$ alapú, *y* magasságú négyzetes oszlopot és 8 darab z/2 élű kockát. Így:

$(y+z)^3=3yz(y+z)+y^3+z^3.$



266. ábra

Érdekes, hogy CARDANO nem az egyszerűbben áttekinthető *266. ábra* felosztásából indult ki, amely talán kézenfekvőbb lett volna. Az összefüggést, geometriai belátása után, CARDANO (vagy FERRARI?) úgy alakította át, hogy $(y+z)$ helyébe x-et helyettesített. Ekkor

$$x^3 = 3yzx + y^3 + z^3.$$

Ha továbbá a *3yz-t b-vel*, az (y^3+z^3)-t c-vel helyettesítjük, azaz ha

és

$$\left.\begin{aligned} 3yz &= b \\ y^3+z^3 &= c, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

akkor nyerjük az

$$x^3 = bx + c$$

alakú Tartaglia-féle egyenletet, amelynek megoldásához elvezet az *y*-ra és z-re felírt (1) egyenletrendszer. Ha ugyanis ennek első egyenletéből a $z = b/3y$-t behelyettesítjük a második egyenletbe, akkor rendezés után az

$$y^6 - cy^3 + \left(\frac{b}{3}\right)^3 = 0$$

y^3-ban másodfokú egyenlethez jutunk. Ebből

$$y^3=\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3},$$

amennyiben a négyzetgyök negatív előjelétől eltekintünk.

Mivel egyenletrendszerünk y-ra és z-re szimmetrikus, azért

$$z^3=\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3},$$

ha most a négyzetgyök pozitív előjelét nem vesszük figyelembe.
Ezek alapján jutunk el az

$$x=y+z=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia-féle képlethez.

Teljesen hasonló módon kaphatjuk az

$(y—z)^3=y^3—z^3 + 3zy(z—y)$

azonosságból az $y—z=x$, az $y^3—z^3=c$ és a $3zy=b$ helyettesítések után az

$x^3+bx=c$

alakú Tartaglia-féle egyenletnek az

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}+\frac{c}{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}-\frac{c}{2}}$$

megoldóképletét.

Kétségkívül **Cardano** érdeme annak a kimutatása, hogy - ma így fogalmaznánk - minden

$x^3+ax^2+bx+c=0$

harmadfokú egyenlet az $x=y—a/3$ helyettesítéssel

$y^3+b'y+c' = 0$

alakra hozható, ahol

$$b'=b-\frac{a^2}{3} \quad \text{és} \quad c'=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c,$$

és amely már valamelyik Tartaglia-féle egyenlettel azonos.

Ludovico Ferrari érdeme, hogy megoldási eljárást talált a negyedfokú egyenletekre is. 1540-ben da Coi adta fel CARDANÓnak a következő feladatot: 10 három részre bontandó úgy, hogy a részek geometriai haladványt alkossanak és az első két rész szorzata 6 legyen! Ha a sorozat középső elemét x betűvel jelöljük, akkor teljesülnie kell a következő egyenletnek:

$$\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10,$$

azaz

$x^4+6x^2+36=60x.$

Az egyenletet **Ferrari** oldotta meg. Először mindkét oldalát növelte $6x^2$-tel. Így

$(x^2+ 6)^2=60x+ 6x^2.$

Olyan egyenletnél, amelynél a bal oldal fenti teljes négyzetté kiegészítése után a jobb oldal is láthatóan teljes négyzetté alakul, a további lépés természetesen a négyzetgyökvonás lenne, és az így nyert másodfokú egyenlet már nem okoz gondot. Ha azonban olyan eset adódik, mint **a** mostani, akkor **Ferrari** új ismeretlent vezet be *(y)* úgy, hogy a bal oldal $(x^2+6+y)^2$ alakú legyen. Konkrét példánkon tehát:

$(x^2+6+y)^2 = 60x+6x^2+2(x^2+6)y+y^2,$

vagy

$(x^2+6+y)^2=(2y+6)x^2+60x+y^2+12y.$

Mivel itt a bal oldal teljes négyzet, azért a jobb oldalnak is annak kell lennie, azaz a jobb oldalhoz tartozó, x-ben másodfokú egyenletnek kettős gyöke van, tehát a diszkriminánsa nulla. Példánknál

$60^2—4(2y+6)(y^2+12y)=0,$

illetve rendezés után

$y^3+15y^2+36y=450.$

Ferrari tehát a negyedfokú egyenletet harmadfokúra vezette vissza, és így lehetővé tette az eredeti megoldását. E harmadfokú egyenletet a negyedfokú rezolvens egyenletének, röviden rezolvensének nevezik. A további lépéseknél vegyük figyelembe, hogy a diszkriminánsra vonatkozó kikötés első alakjából

$$y^2+12y=\frac{30^2}{2y+6},$$

azért az *y* bevezetésével nyert egyenlet így írható:

$$(x^2+6+y)^2=(2y+6)x^2+60x+\frac{30^2}{2y+6},$$

azaz

$$(x^2+6+y)^2=\left(x\sqrt{2y+6}+\frac{30}{\sqrt{2y+6}}\right)^2.$$

Ha most mindkét oldalból négyzetgyököt vonunk, akkor a

rezolvensből kapott y segítségével az

$$x^2+6+y=x\sqrt{2y+6}+\frac{30}{\sqrt{2y+6}}$$

másodfokú egyenlet megoldható.

A vázolt eljárás alkalmazható minden olyan negyedfokú egyenletre, amely a harmadfokú tag kivételével a többit tartalmazza. FERRARI azonban megtette a még hiányzó lépést is, mert megmutatta, hogy minden teljes negyedfokú egyenlet átalakítható a fentebb már megoldott negyedfokú egyenlettípusra. Ha ugyanis az

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d= 0$

egyenletben az $x=y+\alpha$ helyettesítést végrehajtjuk, ahol y új ismeretlen és α egy később célszerűen megválasztandó konstans, akkor átalakul az

$(y+\alpha)^4+a(y+\alpha)^3+b(y+\alpha)^2+c(y+\alpha)+d= 0$ egyenletté, amely az y fogyó hatványai szerint rendezve

$y^4+y^3(4\alpha +a)+y^2(6\alpha^2 +3a\alpha + b)+y(4\alpha^3 + 3a\alpha^2 +2b\alpha + c)+\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0.$

Válasszuk most meg α értékét úgy, hogy a harmadfokú tag eltűnjék, azaz legyen $\alpha=$ — a/4. Ekkor az egyenlet

$$y^4+\left(b-\frac{3a^2}{2}\right)y^2+\left(c-\frac{ab}{2}+\frac{a^2}{8}\right)y+\left(d-\frac{ac}{4}+\frac{a^2b}{16}-\frac{3a^4}{256}\right)=0,$$

vagyis

$y^4+b'y^2+c'y+d'=0$

alakú.

Mind TARTAGLIA, mind CARDANO és FERRARI számos speciális harmad- és negyedfokú egyenletet oldott meg ügyes átalakításokkal is, nem használva az ismertetett általános eljárást. Egyikük

sem tudott azonban megbirkózni azzal az esettel, amelyben a harmadfokú egyenlet gyökei nyilvánvalóan léteznek, sőt valós számok, de a megoldóképlet mégis felmondja a szolgálatot, mert a benne szereplő négyzetgyökjel alatt negatív szám lép fel. Ezt az esetet, a casus irreducibilist fedezte fel CARDANO az $x^3=7x+6$ egyenletnél. Semmiképpen nem értette, hogy a máskor jól bevált képlet most „értelmetlenül” az

$$x=\sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

eredményt adja, hiszen nem nehéz kitalálni, hogy az egyenlet egyik gyöke 3, és ha a negatív számok között is keresgélt volna, bizonyára észreveszi a (—l)-et és a (—2)-t is. Ezzel az érthetetlen esettel CARDANO igen sokat foglalkozott, és ha a megnyugtató módon való tisztázás az utódokra maradt is, fáradozása több értékes megfigyelésre vezetett. Az említett példa nyomán feltételezte, hogy a

$$\sqrt[3]{p\pm\sqrt{q}}$$

köbgyökvonás eredménye $r\pm\sqrt{s}$ alakú, mert csak így képzelhető el, hogy a megoldóképlet két tagjának az összegéből a negatív számból vont négyzetgyök - amint ő nevezte: a *mínusz gyöke* vagy a *szofisztikus mínusz* - eltűnjék. Ezen túlmenően a másodfokú egyenletekre is kiterjesztette vizsgálatait. Így például az

$$x^2-10x+40=0$$

egyenletnél (10 két részre osztandó úgy, hogy a részek szorzata 40 legyen!) felírta a két gyököt:

$$x_1=5+\sqrt{-15} \quad \text{és} \quad x_2=5-\sqrt{-15},$$

és megállapította, hogy ha helyes a két eredmény, akkor a szorzatuk 40, azaz

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=$$

$$=25+5\sqrt{-15}-5\sqrt{-15}-\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=40.$$

Ez valóban így is van, ha

$$-\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=15.$$

Egy másik megfigyelése az $x^2+b=ax$ egyenlettel kapcsolatos. Ilyet kapott, amikor két szám összegéből és szorzatából kereste a két számot. Az *Ars magná*ban felsorolja a következő eseteket:

1. Ha a két szám összege 6 és a szorzata 40, akkor az $x^2+40=6x$ egyenlet gyökei: $x_1 = 3+\sqrt{(-31)}$ és $x_2=3-\sqrt{(-31)}$.

2. Ha az összeg 6, a szorzat pedig —40, akkor az $x^2-40= 6x$ egyenlet gyökei: $x_1= 10$ és $x_2= -4$.

3. Ha az összeg — 6 és a szorzat 40, akkor az $x^2+40= -6x$ egyenlet gyökei: $x_1=4$ és $x_2= -10$.

4. Ha az összeg — 6 és a szorzat — 40, akkor az $x^2-40= -6x$ egyenlet gyökei: $x_1= -3+\sqrt{(-31)}$ és $x_2= -3-\sqrt{(-31)}$.

Megállapította, hogy a két gyök összege mindig az elsőfokú tag együtthatója, a szorzata pedig az állandó tag, ha a *szofisztikus negatívok (a* képzetes számok) fenti szorzási szabálya helyes. Ugyancsak a gyökök és az együtthatók összefüggését vette észre, amikor megfigyelte, hogy az $x^3 + bx=ax^2+c$ alakú, olyan harmadfokú egyenletnél, amelynek három megoldása van, a három gyök összege mindig a másodfokú tag együtthatóját adja.

Amint látjuk, a matematika fejlődésére nézve határozottan hasznos volt, hogy TARTAGLIA titkát CARDANO nem vitte magával a sírba. A matematikatörténet szempontjából nagyon lényeges az, hogy a XVI. századi Itáliában DEL FERRO, TARTAGLIA, CARDANO és FERRARI lefektették egy matematikai iskola alapjait, amely iskola először haladta jelentősen túl az antik és az arab matematikát. Ezzel az európai matematika fejlődése előtt szélesre tárták a lehetőségek kapuját. Az itáliai matematikusok ráirányították a

figyelmet az egyenletek megoldhatóságának a kérdésére, siettették az algebrai módszerek kialakulását, nyilvánvalóvá tették a számkör kibővítésének, a számfogalom kiépítésének szükségességét.

A Cardano nevéhez kapcsolódó itáliai algebrai iskola köréből nem maradhat említetlenül

Raffaello Bombelli (1526-1572), a bolognai mérnök-matematikus, illetőleg az ő l'*Algebra* című, háromrészes könyve. Az első rész a gyökmennyiségek közti műveleteket ismerteti. A második rész az egyenletmegoldásokkal foglalkozik. A harmadik részben mintegy 300 feladat van. Ebben az 1572-ben Milánóban megjelent műben figyelemre méltó a négyzetgyök megközelítése lánctört segítségével, az

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}$$

séma szerint. **Bombelli** az eljárást az $a=$ **3,** $b=$ **4** vagyis a **√13** esetén mutatja be. Gondolatmenete szerint:

$$\sqrt{13}=\sqrt{3^2+4}=3+x,$$

azaz

$13=9+6x+x^2$,

vagyis

$6x+x^2=4$, illetőleg $x(6+x)=4$.

Innen

$$x=\frac{4}{6+x}.$$

Ha most a jobb oldali x helyébe folytonosan a 4/(6 + x)-et helyettesítjük, akkor az

$$x=\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\dots}}}$$

végtelen lánctörtet kapjuk, tehát

$$\sqrt{13}=\sqrt{3^2+4}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\dots}}.$$

Így a √13 tetszőleges pontossággal megközelíthető. A számpélda gondolatmenete nyilván általánosságban is helytálló.

A számfogalom fejlődésére és a harmadfokú egyenlet irreducibi-lis esetének magyarázatára Bombelli fontos lépése volt, ami ugyan már CARDANÓnál is megtalálható, hogy feltételezése szerint a

$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}$ kifejezhető $p+\sqrt{-q}$ alakban,

a $\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ pedig $p-\sqrt{-q}$ alakban.

Bombelli azonban e gondolatot továbbvitte úgy, hogy a

$(+\sqrt{-q})$-t és a $(-\sqrt{-q})$-t

számnak tekintette, azaz definiálta a velük való műveleteket. Az elsőt „piu di menó”-nak (negatív pozitívjának), azaz a negatív számból vont pozitív négyzetgyöknek nevezte. A másodikat pedig „meno di menó”-nak (negatív negatívjának), vagyis a negatívból vont negatív négyzetgyöknek hívta. Ezekkel a nevekkel fogalmazta meg például a szorzás előjelszabályait, amelyeket most a mai

elnevezésekkel ismétlünk:

Pozitív szám szorozva pozitív képzetes számmal pozitív képzetes számot ad.

Negatív szám szorozva pozitív képzetessel negatív képzetest ad. Pozitív szám szorozva negatív képzetessel negatív képzetest ad. Negatív szám szorozva negatív képzetessel pozitív képzetest ad.

Pozitív képzetes szorozva pozitív képzetessel negatív számot ad.

Pozitív képzetes szorozva negatív képzetessel pozitív számot ad.

Negatív képzetes szorozva negatív képzetessel negatív számot ad.

Negatív képzetes szorozva pozitív képzetessel pozitív számot ad.

BOMBELLI tehát a negatív számból vont négyzetgyököt is számnak tekintette, és így a komplex számfogalom megalapozásának jelentős úttörőjévé vált, egyszersmind magyarázatot adott arra, amit már CARDANO is sejtett, hogy ti. a casus irreducibilisnél a harmadfokú egyenlet valós gyöke úgy jöhet ki, hogy a képletben szereplő két köbgyök két konjugált komplex számot szolgáltat, és az összegükből a képzetes rész kiesik. E magyarázat azonban nem vitt közelebb az ilyenkor fellépő valós gyökök meghatározásához. Ha ugyanis - és ez még mindig BOMBELLI okoskodása -

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q}+p-\sqrt{-q}=2p,$$

akkor p kiszámítása így történhet: Mivel

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}=p+\sqrt{-q},$$

azért

$$a+\sqrt{-b}=p^3+3p^2\sqrt{-q}-3pq-q\sqrt{-q},$$

ahonnan

$a = p^3 - 3pq.$

Továbbá igaz, hogy

$$(p+\sqrt{-q})(p-\sqrt{-q})=\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}\cdot\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}},$$

vagy

$$p^2+q=\sqrt[3]{a^2+b}=\alpha.$$

Így *p* meghatározására két egyenletünk van:

$p^3 - 3pq = a$

és

$p^2 + q = \alpha.$

A *q* kiküszöbölése után nyert $4p^3 - 3p\alpha = a$ egyenlet azonban a *p* meghatározása szempontjából ugyanazokat a nehézségeket rejti, mint amelyeket az eredeti harmadfokú egyenlet.

BOMBELLI *Geometriája* kéziratban maradt meg, és csak 1929-ben adták ki. Ez főként olyan geometriai feladatokat tartalmaz, amelyek másod- vagy harmadfokú egyenlethez vezetnek.
BOMBELLI munkássága jól kimutathatóan hatással volt STEVINre és LEIBNIZre is. Érdemei közé tartozik még, hogy az elsők között fordította le DIOPHANTOSZ *Arithmetikáját.*

Nagyon szellemesen húzta ki a harmadfokú egyenlet casus irreducibilisének méregfogát a mai Ausztria nyugati szélén, a Feldkirchben (a régi Ratien) született GEORG JOACHIM VON LAUCHEN (RHATICUS, 1514-1574), aki 1537 és 1542 között a wittenbergi egyetemen tanított matematikát és csillagászatot, azután pedig Lipcsében és Krakkóban. Mint KOPERNIKUSZ barátja, sokat tett a kopernikuszi tanok népszerűsítéséért. Élete nagy részét trigonometrikus táblázatok készítésének szentelte (1551). Nála találkozunk először a koszinusz névvel.

Említettük már, hogy REGIOMONTANUSnál is felvetődött a harmadfokú egyenletnek és a háromszoros szögekre vonatkozó trigonometrikus képletnek az összekapcsolása. RHATICUSnál ez a gondolat eredményhez is vezetett, a következőképpen: Legyen a megoldandó egyenlet

$$x^3 = bx + c.$$

Emlékezzünk vissza a 493. oldalon leírt, Cardano-féle gondolatmenetre, amely az

$$(y+z)^3 = 3yz(y+z) + y^3 + z^3$$

azonosságot alakította át *az* $y+z=x$ helyettesítéssel az

$$x^3 = bx + c$$

egyenletté, amikor is:

$$3yz = b$$

és

$$y^3 + z^3 = c.$$

Akkor ennek az egyenletrendszernek a megoldása árán jutottunk el a keresett $x=y+z$ végeredményhez.

Most azonban RHATicusszal együtt vegyük figyelembe a

cos 3a = $\cos^3$ a—3 cos «• $\sin^2$ a

azonosságot is, valamint tételezzük fel, hogy a szóban forgó *y és z* konjugált komplex számok, azaz hogy éppen az irreducíbilis esetről beszélünk. Ekkor tehát:

y = £+»} és z=f — *írj*

alakú, ahol $i=$ 1. Ezekkel a jelölésekkel:

3yz=3(!;^{2}*+if)=b*

és

y^3+ *z*^{3}= (| + *irj)*^{3}+ (| - *ir])*^{3}*—2^*^{3}*-c.* Rendelkezésünkre állnak tehát a

S^2+*?^{2}=|

és a

“-3|rj^2=ˆ

egyenletek. Ha most ezekbe behelyettesítjük a

|=j/|cosa és >7=1ˆ1 sin a

kifejezéseket, akkor az első egyenlet nyilvánvalóan azonossággá válik, a másodikból pedig

lesz, amiből

n

(cos^3 a— 3 cos a sin^{2}a)=r

cos^3 a — 3 cos a sin^2 a=

Mivel a bal oldal éppen cos 3a, azért

3c/3 2 *bVb*

$$\cos 3\alpha = \frac{3c\sqrt{3}}{2b\sqrt{b}} = \frac{c}{2} : \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Az irreducíbilis esetben a megoldóképletből leolvashatóan (493. oldal)

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad \text{vagyis} \quad \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{c}{2},$$

tehát cos 3α-ra valódi törtet kaptunk, ami azt jelenti, hogy létezik

olyan 3α szög, amely megfelel a cos 3α most nyert értékének. Ez a szög, illetve ezek a szögek táblázatból jó közelítéssel kiolvashatók, és harmadrészükkel a

$$\xi=\sqrt{\frac{b}{3}}\cos\alpha \quad \text{és az} \quad x=y+z=2\xi$$

gyökök közelítő értékeit is meghatározhatjuk.

A harmadfokú egyenletek megoldásának trigonometriai útra való terelése sokat segített a képzetes számokhoz fűződő fogalmi bonyodalmak eloszlatásában, de e nehézségeken csak GAUSS lett úrrá a XIX. század elején, amikor megalkotta a komplex számok geometriai színezetű, tehát szemléletes elméletét (1831). Nekünk magyaroknak jó tudnunk, hogy a komplex számoknak mint rendezett számpároknak az elmélete egyszerre bukkant fel WILLIAM ROWAN HAMILTON ír matematikus egyik munkájában (728. oldal) és BOLYAI JÁNOS *Responsió*jában, 1837-ben. Addig azonban még sok minden történt.

Az itáliai algebrai iskola működésével párhuzamosan Európa más országaiban is éltek kiváló matematikusok, akik vagy tovább tökéletesítették az egyenletmegoldási eljárásokat, vagy más irányban mozdították elő a matematika fejlődését. Ezek közé tartozott

SIMON STEVIN (1548-1620) holland matematikus, aki Brüggében született, tanított a leideni egyetemen, majd szolgált ORÁNIAI MORIG hadseregében, és Hágában halt meg. Ő a hidrosztatikai paradoxon felfedezője, és ő vezette be Európában a tizedes törteket 1585-ben, a flamand nyelvű *De thiende* (A tizedes egység) című könyvével és annak francia változatával *(La disme),* amint azt a 308. és 414. oldalon már ismertettük.

Még nem használta a tized, század, ezred stb. elnevezéseket, hanem ezeket a prime, second stb. sorszámnevekkel jelölte, amint az a 60-as számrendszernél szokásos volt. A tizedes törtek mai alakjukban 1616-ban jelentek meg JOHN NAPIER *Descriptiójában,* amelyben a szerző az egész és a törtrészeket ponttal választotta el. Az 1617-ben

megjelent *Rabdologiában* NAPIER a tizedespont mellett ajánlotta a tizedesvessző használatát is. Angliában a pont, de a legtöbb európai országban a vessző használata terjedt el.

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy STEVIN 1586-ban közölte azt a megfigyelését, hogy két különböző súlyú golyó 30 láb magasról, egyszerre ejtve, egyszerre érkezik meg az alájuk helyezett vízszintes deszkára. Az ő flamand nyelvű közlése korántsem keltett akkora figyelmet, mint GALILEI későbbi, hasonló megállapítása.

A számolási technika javításában és az algebrai jelrendszer kialakításában játszott fontos szerepet

MICHAEL STIFEL (1487-1567) német matematikus. Esslingenben született, és szerzetesként nyerte kiképzését, de csakhamar LUTHER papja lett. Kezdetben minden érdeklődését lekötötte a számmisztika. Igyekezett kikutatni a szent könyvekben szereplő számok rejtett jelentését. E „tudományban” odáig vitte, hogy 1533. október 19-ére megjósolta a világ végét. Az, hogy jövendölése nem teljesült, annyira megrendítette, hogy végleg elfordult a számmisztikától, belátta, hogy az általa felfedezett törvényeknek a valósághoz semmi közük sincs. Igazán csak ekkor kezdett el foglalkozni az igazi matematikával, de olyan komolyan, hogy 1559-től felhagyott prédikátori tevékenységével is, és haláláig a jénai egyetem matematikaprofesszoraként dolgozott. Írt néhány művet. Legértékesebb a korának aritmetikáját összefoglaló *Arithmetica integra* (Teljes aritmetika), amely 1544-ben jelent meg Nürnbergben.

E műben fordul elő először a törttel való osztás szabályának megfogalmazásánál az osztó reciprokával való szorzás. A könyv nemcsak a törteknek, hanem a negatív számoknak is adja a műveleti szabályait. A nyomtatásban először WIDMANN-nál (479. oldal) látott + és — jeleket következetesen használja. A negatív számot úgy értelmezi, hogy az a nullánál kisebb szám. Ennek írásban is kifejezést ad, például a (—4)-et úgy írja, hogy 0—4.

Stifel kiemelkedő észrevétele, hogy egy számtani és a hozzá rendelt mértani sorozat segítségével a számolás megkönnyíthető. Két ilyen sorozat összekapcsolásának a gondolata már Arkhimédésznél és a

XVI. században CHUQUET-nél is (478. oldal) jelentkezett, de ilyen tudatosan megfogalmazott gyakorlati céllal STIFELnél találkozunk vele először. Az ő két sorozata:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

$$\frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

Amint látjuk, újítás nála, hogy a mértani sorozatban 2-nek nemcsak a pozitív egész kitevős hatványait szerepelteti, hanem a nulla és negatív egész kitevőjűeket is. E két sorozat hasznát így fogalmazta meg: „Az összeadás az aritmetikai sorozatban megfelel a geometriai sorozatban való szorzásnak, éppen úgy a kivonás az egyikben a másikban való osztásnak.” Hasonló szabályt adott a hatványozásra és a gyökvonásra is. STIFELnél tehát már készen állt a logaritmussal való számolás alapelve. A gyakorlati hasznosítás azonban már Joost Bürgi, John Napier és Henry Briggs nevéhez fűződik.

Bár a két tag hatványozásánál fellépő binomiális együtthatók háromszög alakú elrendezése már a kínai Csu Si-csie (344. oldal) és az arab AL-KÁSI (417. oldal) műveiben is megjelent, mégis Európában az elsők között - PETRUS APIANUS (1527) lipcsei matematikus után másodikként - STIFEL közölte a „Pascal-háromszöget”.

Végül meg kell emlékeznünk STIFELről úgy is, mint az algebrai szimbólumok fejlesztőjéről. A + és a — jel mellett bevezette a szorzás jeleként az *m* és az osztás jelölésére a *d* betűt. Az *m* a latin multiplicatio = szorzás és a *d* a szintén latin divisio = osztás szó kezdőbetűje. Az ismeretlen hatványait is rövidítésekkel jelölte:

a négyzetet a német *z* betűvel (zensus = vagyon),

a köböt a latin *c* betűvel (cubus = köb),

a negyedik hatványt zz-vel (zensi-zensus),

az ötödik hatványt zc-vel (zensi-cubus),

a hatodik hatványt cc-vel (cubi-cubus) stb.

A gyökvonás jele nála a radix (gyökér) latin szó stilizált kezdőbetűje, a √ volt. Így a négyzetgyöknél a √z, a köbgyöknél a √c, a negyedik gyöknél a √zz stb. jeleket írta a szám elé.

Az ismeretlen első hatványát a német R jelentette, a res (dolog) latin szónak a kezdőbetűje. Nézzünk egy példát e számunkra nehézkesnek tűnő, de az akkori időkben vívmánynak tekintendő jelölésrendszerre! STIFEL például a

$$3x^2+4x-\sqrt{5}x^3+\sqrt[3]{325}=0$$

egyenletet így írta volna

$$3z+4\mathrm{R}-\sqrt{\ }5c+\sqrt{\ }c325 \text{ aequantur } 0.$$

Nála láthatjuk először azt is, hogy úgy fogott a másodfokú egyenlet megoldásához, hogy előbb 0-ra rendezte, azaz elsőnek foglalta össze a másodfokú egyenletek különböző típusait az $ax^2+ bx+c= 0$ általános alakkal, ahol *a, b* és *c* most már nemcsak pozitív, hanem negatív számok is lehettek. Stifel jelölésrendszere számunkra kezdetlegesnek látszik, mégis az ő szimbólumai és a hozzájuk hasonló jelölések tették lehetővé, hogy a nagyon áttekinthetetlen retorikus algebráról a matematikusok rátérhettek a könnyen kezelhető szimbolikus algebrára, ami pedig nem lebecsülendő fejlődési lépés. STIFELnek a számolás megkönnyítésére vonatkozó gondolatait vitte át a gyakorlatba.

A LOGARITMUS FELTALÁLÁSA

A XVI. századi gazdasági élet és a csillagászat igen sok és kellemetlenül nagy számokkal való műveletet kívánt. Érthető, hogy a matematikusok is törekedtek új, a számolást gyorsító módszerek kialakítására. Ekkortájt elterjedt már két olyan eljárás, amely a szorzást a könnyebben elvégezhető összeadássá, illetve kivonássá alakította át. A trigonometriában erre használták a

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

és a

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

azonosságokat, a számok szorzásánál pedig az

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$$

összefüggést. Ezek használatához rendelkezésre álltak alkalmas táblázatok, például a négyzetszámok táblázata. Természetesen léteztek már más, különleges célú táblázatok is, például a kamatos kamat kiszámításához. Az átütő sikert azonban a logaritmustáblázatok megszületése aratta. A logaritmusszámolás BÜRGI és NAPIER szellemét és hihetetlen szorgalmát dicséri.

JOOST BÜRGI (1552-1632) a svájci Lichtensteigben született. Híres órás- és műszerkészítő mesterként dolgozott Kasselban és 1603-tól 1622-ig KEPLER mellett Prágában. Itt sokat segített a világhíres csillagásznak nemcsak az eszközök javításával, hanem csillagászati megfigyelésekkel és számításokkal is. Éppen a hosszadalmas és unalmas számítások elkerülése végett készítette el 1603 és 1611 között az első logaritmustáblázatot. Mintául vette STEVIN kamatos-kamat-táblázatát, amelyben az

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

értékei szerepeltek a p kamatláb és az n év különböző eseteiben. Így a

$$T_n = t\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

képlet használatánál csak egyetlen szorzást kellett elvégezni. (A képletben T_n a t kezdeti tőkének a p százalék mellett n év alatti kamatos kamataival felszaporodott értéke.) Rögzített p esetén

az

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

tényező egy mértani sorozatot definiál. Bürgi ebből indult ki. Tudta, hogy minél kisebb *p* értéket választ, annál sűrűbben nyeri a sorozat elemeit. Nála p = 0,01. Az így kapott mértani sorozat minden eleméhez hozzárendelte a 0, 10, 20, 30, ... számtani sorozat egy-egy elemét, tehát BÜRGInél az egymásnak megfeleltetett két sorozat:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & \left(1+\frac{1}{10^4}\right), & \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2, & \ldots, & \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n, & \ldots \\ 0, & 10, & 20, & \ldots, & 10n, & \ldots \end{array}$$

A számtani sorozat elemei a nyomtatásban pirosak, a mértanié pedig feketék voltak. Így például bármelyik két fekete szám szorzatához a megfelelő két piros szám összege tartozik. A mai szóhasználattal élve: bármely fekete szám logaritmusa az alatta levő piros szám. Megengedve a mai jelöléseket:

$$\log_a\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n = 10n.$$

Ebből

$$a^{10n} = \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n,$$

tehát Bürgi logaritmusának az alapszáma

$$a = \sqrt[10]{1{,}0001}.$$

Hogy a törtek nehézkes írását elkerülje, Bürgi a táblázatban a mértani sorozat minden elemének a 10^8-szorosát tüntette fel.

Talán azt is érdemes észrevennünk, hogy amennyiben Bürgi

sorozatait - az alapelv megsértése nélkül - úgy alakítjuk át, hogy a piros számokat 10^5-nel és a feketéket 10^8-nal osztjuk, akkor a két összetartozó sorozat:

$$1,\ 1{,}0001,\ 1{,}0001^2,\ 1{,}0001^3,\ \ldots,\ 1{,}0001^n,\ \ldots$$
$$0,\ 0{,}0001,\ 0{,}0002,\ 0{,}0003,\ \ldots,\ \overline{0{,}000n},\ \ldots$$

Most az

$$\log_a 1{,}0001^n = \overline{0{,}000n}$$

összefüggésből

$$a^{\overline{0{,}000n}} = 1{,}0001^n, \quad \text{illetve} \quad a = 1{,}0001^{10\,000} \approx 2{,}718\,145\,93\ldots,$$

ami a természetes logaritmusok $e \approx 2{,}718\ 281\ 828\ldots$ alapszámától csak a tízezredeknél tér el.

BÜRGI táblázata 1611-ben készen volt, de KEPLER szorgalmazása ellenére is csak késedelmesen, 1620-ban látott napvilágot az *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen* (Aritmetikai és geometriai haladvány-táblázatok). A közlés elsőségét tehát BÜRGI elvesztette, mert 1614-ben már megjelent JOHN NAPIER (1550-1617) skót matematikusnak a *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (A csodálatos logaritmustáblázat leírása, röviden: *Descriptio*) című összeállítása. JOHN NAPIER az Edinburgh melletti Merchistonban született, igen előkelő skót családban. Az ő korában a skót nemesség még félbarbár életét élte, és a meditációra hajlamos ifjú merchistoni báró nem tudott beilleszkedni abba a környezetbe, amelyet a hadi dolgokon, a vallási villongásokon és a vadászaton kívül más alig érdekelt. Ez volt a fő oka annak, hogy a St. Andrews-i Győzedelmes St. Salvador Kollégium nyugtalan, harcias szellemű légkörét felcserélte egy flamand és francia tanulmányúttal, amely után visszahúzódott Merchistonba, és ott töltötte el külső eseményektől nem zavart életét, amelynek azonban tartalmat adott és számára örömet szerzett a folytonos és eredményes szellemi munka.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

267. ábra

	5	3	4	6
1	0/5	0/3	0/4	0/6
2	1/0	0/6	0/8	1/2
3	1/5	0/9	1/2	1/8
4	2/0	1/2	1/6	2/4
5	2/5	1/5	2/0	3/0
6	3/0	1/8	2/4	3/6
→ 7 ←	3/5	2/1	2/8	4/2
8	4/0	2/4	3/2	4/8
9	4/5	2/7	3/6	5/4

268. ábra

Kezdetben teológiai tanulmányokat írt, de csakhamar felülkerekedett fejlett műszaki érzéke, és igen ügyes tervezői munkájának néhány találmány lett az eredménye, amelyek nagy tekintélyt szereztek számára. Különösen nagyra becsülték egy pusztító erejű tüzérségi találmányáért, amelynek megvalósítására azonban nem volt hajlandó. A műszaki érdeklődés szülte benne a számolás egyszerűsítésére való törekvést. Külföldi utazása alatt megismerkedett a helyi értékes 10-es számrendszerrel, de igen érdekelte a 2-es számrendszer is. (Súlymérés 1, 2, 4, 8 stb. egységnyi súlyokkal.)

Egyik találmányával, amelyet a *Rabdologia* (1617) című könyvében ismertetett, a róla elnevezett számolópálcákkal a szorzást és az osztást könnyítette meg. A *267. ábrán* látható, keretbe foglalt 9 rudacskára az „egyszeregyet” írta le, ferde szakaszokkal elválasztva a tízes és egyes helyi értékeket. Például: A 7. rúd 5. sorában a 7 • 5 szorzás eredménye, a 35 olvasható. A pálcák kezelése egy szorzási példa átgondolásával - úgy vélem - különös magyarázat nélkül is megérthető. Végezzük el az eszköz segítségével az 5346 • 7 szorzást! Ehhez először az 5346 szorzandó egymást követő számjegyeinek a sorrendjében válogassuk ki az 5, 3, 4 és 6 feliratú rudakat, és helyezzük azokat egymás mellé a *268. ábra* szerint. Ha ez megtörtént, akkor a 7. sorban szereplő számokat összesítjük a következőképpen:

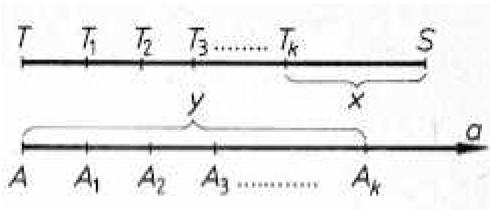
(3), 5+2=(7), 1+2=(3), 8+4=(12), (2).

A bekarikázott számokat számjegyekként egymás mellé írva (a 12-t 10-re és 2-re bontva) nyerjük a 37 422 szorzatot. Hasonlítsuk össze NAPIER pálcikás eljárását az

5346 · 7
35000
2100
280
42
37422 szorzással!

Ami azonban NAPIER világhírnevét biztosította, az *A csodálatos logaritmustáblázat leírása* volt. Ebben a 0°-tól 90°-ig növekvő szögek trigonometrikus számainak a 8 jegyű logaritmusai találhatók, miközben a szög l'-es ugrásokkal változik. A táblázat elkészítési módjának az alapötlete, amelyre NAPIER 1594-ben jött rá, új volt. A sorozatok összehasonlításának régi módszere mindig diszkrét értékek sorozatát adta, habár ezeket tetszőlegesen lehetett sűríteni. A skót tudós azonban két elképzelt mozgásból indult ki (GALILEI előtt!), és két folytonos függvény között létesített kapcsolatot (a modern analízis fegyverei nélkül!). Ez, az ő korában bámulatos eljárás a következő volt:

Mozogjon egymással párhuzamosan két pont, az egyik a TS szakaszon, a másik pedig az a egyenesen *(269. ábra)*. Induljanak egyszerre, azonos v kezdősebességgel a T, illetve az A pontból. Az a egyenesen mozgó pont állandó v sebességgel halad, a TS szakaszon mozgó pont viszont csökkenő sebességgel, mégpedig úgy, hogy sebessége minden pillanatban legyen arányos az S végponttól való távolságával. NAPIER definíciója szerint, ha az egyik pont abban a pillanatban tartózkodik a T_k helyen, mint amelyben a másik az A_k pontban, akkor a $T_kS = x$ távolság mérőszámának a logaritmusa éppen az $AA_k = y$ szakasz mérőszáma. A logaritmus szót NAPIER készítette a görög logosz = arány és az arithmosz = szám szavak összevonásával. A szó latinos alakja, a logaritmus tehát viszonyszámot, arányszámot jelent. Ha az így meghatározott Napier-féle logaritmust „Naplog”-nak rövidítjük, akkor



269. ábra

$y=$Naplog x.

A következő lépésben ki kellett dolgozni azt a módszert, amellyel a definíció alapján számolni lehet. Az eddigiekből leszögezhető, hogy az egyenlő idők alatt befutott AA_1, $A_1 A_2$, A_2A_3, ... távolságok egyenlők, és TS-nek az ugyanazon időtartamokhoz tartozó TT_1, T_1T_2, T_2T_3, ... útszakaszai kisebbednek. A *269. ábrán* feltételeztük, hogy amikor a *TS-en* mozgó pont áthalad a T_1 T_2, T_3, ..., T_k, ... pontokon, ugyanakkor fut át az *a* egyenesen szaladó pont az A_1, A_2, A_3, ..., A_k, ... pontokon. A *TS* távolság útszakaszaira igaz, hogy

$$TT_1 : TS = T_1T_2 : T_1S = T_2T_3 : T_2S = \ldots = T_kT_{k+1} : T_kS = \ldots$$

Az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért legyen *TS* mérőszáma az egység. Ekkor a $TT_1 : 1 = T_1T_2 : (1 - TT_1)$ aránypárból

$$T_1T_2 = TT_1(1 - TT_1).$$

Hasonlóan a $TT_1 : 1 = T_2T_3 : (1 - TT_1 - T_1T_2)$ aránypárból

$$T_2T_3 = TT_1(1 - TT_1)^2.$$

Ugyanígy a $TT_1 : 1 = T_3T_4 : (1 — TT_1 — T_1T_2 — T_2T_3)$ aránypárból

$$T_3T_4 = TT_1(1 - TT_1)^3.$$

Általánosságban:

$$T_kT_{k+1} = TT_1(1 — TT_1)^k.$$

Ezek segítségével:

$$TS = 1,$$

$T_1S = 1 — TT_1$,

$T_2S = T_1S - T_1T_2 = 1 - TT_1 - TT_1(1 - TT_1) = (1 - TT_1)^2$,

$T_3S = T_2S - T_2T_3 = (1 - TT_1)^2 - TT_1(1 - TT_1)^2 = (1 - TT_1)^3$,

Általánosan : $T_kS = (1 - TT_1)^k$.

Látható tehát, hogy a TS szakaszon ábrázolt T_kS számok az

$1, (1 — TT_1), (1 — TT_1)^2, (1 — TT_1)^3, ...(1 — TT_1)^k, ...$

mértani sorozatot alkotják. Ezek elemeinek az a egyenesen megfelelnek rendre a

$0, AA_1, 2AA_1\ 3AA_1, ..., k*AA_1$,

számtani sorozat elemei. Diszkrét esetben tehát itt is egy mértani és egy számtani sorozat egymáshoz rendelését írja elő a Napier-féle logaritmusdefiníció.

NAPIER a TT_1 szakaszt 10^{-7}-nek választotta, és hogy a törteket elkerülje, a geometriai sorozat minden elemét 10^7-nel megszorozta. Az a egyenesen pedig az $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = ...$ távolságokat tekintsük egységnyinek. Ekkor a két sorozat:

$$10^7,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right),\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,\ \ldots,\ 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^k,\ \ldots$$
$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad k,\quad \ldots$$

Így tehát

$$\text{Naplog}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^k = \frac{k}{10^7},$$

vagy

$$\text{Naplog}\left[\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^k = k,$$

amiből látszik, hogy a Napier-féle logaritmus alapszáma

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}.$$

Valószínűleg a kamatoskamat-számítás kapcsán bukkant fel először az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

alakú tényező, és felmerült az a kérdés, hogy milyen értékhez közeledik, ha az *n* szám végtelen naggyá válik, azaz mekkora a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{határérték?}$$

Később kiderült, hogy ez a határérték, amelyet EULER óta e-vel jelölünk, a matematikában különösen fontos szerepet játszik. Bebizonyítható, hogy *n* negatív szám is lehet, például (—*m),* és akkor is igaz, hogy

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}.$$

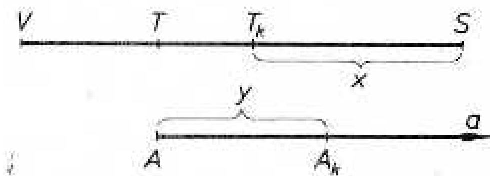
Ebből viszont világossá válik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m=\frac{1}{e},$$

. A Napier-féle logaritmus alapszáma tehát - amely azonos az

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m$$

kifejezéssel az $m=10^7$ esetére - mivel 10^7 már elég nagy szám -, megközelíti az - értéket. Gyakorlatilag tehát a Napier-féle logaritmus alapszáma 1/e.



270. ábra

A logaritmusok gyakorlati kiszámítása végett figyeljük meg a *270. ábrát.* Ezen a *269. ábra* egyik részletét látjuk, de a *TS* szakaszt meghosszabbítjuk a *T* végpontja felé úgy, hogy teljesüljön a

$VT : VS = TT_k : TS$

aránypár. Ekkor a VT, TT_k és AA_k utakhoz azonos időtartam tartozik, viszont a *V* pontbeli sebesség nagyobb a *T* pontbelinél, és az nagyobb a T_k ponthoz tartozónál.

Ebből az utakra az következik, hogy

$VT > AA_k > TT_k$,

azaz

$VS\text{-}TS >$ Naplog x $> TS\text{-}x$.

A továbbiakban vegyük még számításba, hogy $TS = 1$. Így a kezdeti aránypárból

$$VS = \frac{VT}{TT_k} = \frac{VS-1}{1-x},$$

ahonnan $VS = 1/x$. Ezeket tekintve az egyenlőtlenség

$$\frac{1-x}{x} > \text{Naplog } x > 1-x$$

alakot ölt, tehát az $y =$ Naplog x-et sikerült két korlát közé szorítanunk, ami már lehetővé teszi a közrefogó értékek számtani közepével való megközelítést. Ez annál pontosabb, minél sűrűbben

vesszük fel a *TS* szakaszon az *x* értékeket.

NAPIER a *TS* szakaszra szinuszértékeket mért, mégpedig percenként, a 0°-tól 90°-ig terjedő szögek szinuszait. A számítást lehetővé tevő egyenlőtlenség tehát

$$\frac{1-\sin x}{\sin x} > \text{Naplog}\, x > 1-\sin x$$

lett volna, ha a *TS* távolságot, azaz a sin 90°-ot NAPIER 1-nek választja. Nála azonban a sin 90°, amit abban a korban teljes szinusznak neveztek, 10^7 volt, hogy a törtekkel való számolást elkerülje.

NAPIER teljesen tisztában volt felfedezésének jelentőségével, hiszen életének több mint 20 évét áldozta arra, hogy táblázata 1614-ben megjelenhessék. A táblázat elkészítésének részletezését tartalmazó *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (röviden *Constructio* = szerkesztés, felépítés) csak halála után, 1619-ben jelent meg. Maga a táblázat hatalmas lelkesedést váltott ki

HENRY BRIGGS (1561-1630) angol matematikusból, az oxfordi egyetem tanárából. 1615 nyarán és 1616-ban meglátogatta NAPIERt, és az összebarátkozó két tudós megbeszélte, hogy célszerűbb lenne a logaritmusalapot 10-nek választani, mert akkor az egység logaritmusa 0 volna és a 10 logaritmusa 1. Ezzel egyszerűsödnének a logaritmusműveletek azonosságai is, hiszen például, ha log 1 $\neq$ 0, akkor a $c = ab$ szorzat esetében, mivel

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{1},$$

azért

log *c*—log z = log *b*—log 1,

ahonnan

log c = log a + log *b*—log 1.

NAPIER leromlott egészsége azonban megakadályozta a további közös munkát, és így az átszámítás gondjait BRIGGS vette át, és NAPIER halálának évében publikálta - hely és idő megjelölése nélkül - a *Logarithmorum chilias príma* táblázatot, amelyben - amint a cím is jelzi - az első 1000 szám 10-es alapú logaritmusát foglalta táblázatba. Hét év múltán jelent meg, 1624-ben, BRIGGS *Arithmetica logarithmicája,* amely tartalmazta az 1-től 20 000-ig és a 90 000-től 100 000-ig terjedő számok 14 jegyű 10-es alapú logaritmusát. A hiányzó számok logaritmusait pótolta

ADRIAAN VLACQ (1600-1667?) holland könyvkereskedő. DE DECKER földmérnökkel karöltve, 1628-ban kiadta az 1-től 100 000-ig tartó számok 10 jegyű 10-es alapú logaritmustáblázatát Guadában. Ugyancsak ő adta ki a trigonometrikus függvények logaritmusainak a táblázatát 10"-es közökkel, 1663-ban.

Még előbb, 1619-ben megszületett a trigonometrikus függvények *e* alapú logaritmustáblázata is JOHN SPEIDELL munkájaként *New logarithms* (Új logaritmusok) címen. EDWARD WRIGHT is közölt természetes logaritmusokat az 1616-os Napier-fordításában.

Úgy vélem, hogy érdemes visszatérni azokhoz a számolási módszerekhez, amelyeket BRIGGS használt táblázatának összeállításakor. Eljárását arra a megfigyelésre alapozta, hogy a

$$\sqrt[2^{n+1}]{10}=1+\alpha$$

gyökvonásnál az α igen kicsiny, ha *n* elég nagy. Az egyenlőség két oldalának négyzetére igaz, hogy

$$\sqrt[2^n]{10}=1+2\alpha+\alpha^2,$$

ahol n-et megnövelhetjük annyira, hogy 2α mellett α^2 elhanyagolhatóan kicsiny lesz. Ez esetben

$$\alpha\approx\frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{2} \quad \text{és} \quad \sqrt[2^{n+1}]{10}-1=\alpha\approx\frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{2},$$

illetve

$$2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\right)\approx 2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right).$$

Elég nagy n esetén tehát a jobb oldali kifejezés számba vehetően már nem változik, ha n-et tovább növeljük.

Vezessük be a

$$\sqrt[2^n]{10}=x$$

jelölést! Ekkor

$$\log_{10} x=\frac{1}{2^n} \quad \text{vagy} \quad 2^n=\frac{1}{\log_{10} x}.$$

Ezzel a jelöléssel tehát

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)=\frac{x-1}{\log_{10} x}.$$

Az *x* érték azonban, közelítőleg, tetszőleges *a* pozitív számból vont gyökként is megkapható, alkalmasan választott *m* esetén, azaz

$$\sqrt[2^m]{a}\approx x, \quad \text{amiből} \quad \log_{10} x=\frac{\log_{10} a}{2^m}.$$

Ezen *x* és log *x* behelyettesítése után nyerjük, hogy

$$2^n\left(\sqrt[2^n]{10}-1\right)=\frac{2^m\left(\sqrt[2^m]{a}-1\right)}{\log_{10} a}.$$

Innen pedig

$$\log_{10} a \approx 2^{m-n} \frac{\sqrt[2^m]{a}-1}{\sqrt[2^n]{10}-1}.$$

Az *a* szám 10-es alapú logaritmusa megközelithető az *a* számból vont sorozatos négyzetgyökvonásokkal. BRIGGS gondosságára jellemző, hogy az 54. négyzetgyökvonást 32 tizedes pontossággal végezte el.

Azért, hogy a logaritmusok kiszámításának egyszerűbb módját is lássuk, ugorjunk kissé előre az időben, és nézzük meg, hogyan számolt 1667-ben az Angliában működő dán matematikus:

NICOLAUS MERCATOR (1620-1687), a Royal Society egyik alapító tagja. Eredeti családi neve KAUFMANN volt. 1668-ban jelent meg *Logarithmotechnica* című könyve. Ennek második részéből ismertetünk egy keveset.

GREGORY OF SAINT VINCENT (1584-1667) belga matematikus kutatásaiból tudta, hogy

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x).$$

Ezután egyszerű osztással sorbafejtette az

$$y = \frac{1}{1+x}$$

függvényt.

E szerint

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Ennek integrálása árán jutott az ún. Mercator-féle sorozathoz, amelyet ő közölt először, bár már korábban is ismeretes volt

(Hudde, Newton).

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x (1-x+x^2-x^3+\ldots)\,dx=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Ha $|x| < 1$, akkor elég nagy *n* esetén nyerte a

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$$

közelítő értéket.

Az *e* alapú logaritmust PJETRO MENGOLI (1625-1686) olasz matematikus nyomán MERCATOR is természetes (naturalis) logaritmusnak nevezte. Nem sokáig váratott magára a logarléc feltalálása sem. Ennek ősét, a logaritmusskálát a londoni

EDMUND GUNTER (1581-1626) csillagász és matematikaprofesszor készítette el 1624-ben. Összeállított log sin és log tg táblázatokat is.

A logaritmustáblázatok és a logarlécek gyorsan elterjedtek az egész világon, és az elektronikus számológép feltalálásáig a számolásnak kedvelt segédeszközei voltak. Az alaptáblázatokon kívül még számos más táblázat készült a legkülönfélébb különleges célokkal.

BÜRGI, NAPIER, BRIGGS, VLACQ, GUNTER halálozási évszámai mutatják, hogy jócskán elkalandoztunk már a XVI. századtól a XVII-be. A matematika reneszánszát nem lehet egyetlen évvel lezárni. E korszak elhatárolására a XVI. század már említett nevei mellett a legalkalmasabbnak mutatkozik

Francois Viéte (Vieta, 1540-1603) francia matematikus munkássága. Az ő működésében mind a tárgykörök, mind a fejlődési irányok vonatkozásában szinte mindent megtalálhatunk, amely korára jellemző.

Fontenay-ben született. Jogi tanulmányait Poitiers-ben befejezve, szülővárosában ügyvédkedett. 1567-ben bretagne-i képviselő lett, majd III. és IV. HENRIK alatt magas udvari hivatalt viselt mint a király tanácsosa. A hugenotta háború idején 1584-től 1598-ig kegyvesztett lett, de amikor egy ellenséges, rejtjelezett spanyol levél megfejtésével nagy szolgálatot tett IV. **HENRIKnek,** akkor az uralkodó előbbi hivatalába visszahelyeztette. Párizsban halt meg.

Még ifjú házitanító korában ébredt fel érdeklődése a csillagászat iránt, és ekkor kezdett foglalkozni elsősorban a csillagászathoz szükséges trigonometriával. Csak szabad idejében jutott a matematikához. Erre különösen alkalma nyílott kegyvesztettsége idején. Matematikai munkásságát foglalja össze életének fő műve, az *In artem analyticam isagoge* (Bevezetés az analízis tudományába). A címben az analízis szó az algebrát jelenti. Könyvét részletekben kezdte közölni 1591-től kezdve. A teljes mű csak halála után jelent meg, 1646-ban Leidenben, FRANZ VAN SCHOOTEN (1615?-1660) kiadásában. VIÉTE ebben áttekintette a korában kialakult új algebrát, de nem elégedett meg csak ennyivel. Szükségét érezte annak, hogy az egyenletmegoldási eljárásokat - amennyire lehet - egységesítse. Ehhez azonban mindenekelőtt egységes és áttekinthető írásmódra, alkalmas jelrendszerre volt szükség. VIÉTE egyik nagy újítása, hogy az egyenletek együtthatóit is betűkkel írta fel. Az ismeretlenek számára az *A, E, I, O, U, Y* magánhangzókat, az együtthatók felírására pedig a *B, C, D, ...* mássalhangzókat használta. Megtartotta a + és a — jeleket, a szorzást pedig a latin *in* szócskával jelezte, tehát A in B annyi mint A-szor B. Az osztás jele nála a törtvonal. Jelölésrendszerét nehézkessé tette, hogy nem tudott elszakadni a nem puszta számokat kifejező mennyiségek dimenziójától. Az ilyen mennyiség első hatványát latusnak (oldal), a másodikat planumnak (terület, sík), a harmadikat solidumnak (tömör test) nevezte. Példaképpen fordítsuk a mai nyelvre VIÉTE egy mondatát.

Latinul: Oportet $\frac{A \text{ plano}}{B}$ addere $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$.

$$\text{Summa erit } G \text{ in } A \text{ planum} + \frac{B \text{ in } Z \text{ quadratum}}{B \text{ in } G}.$$

Magyarul: Adjuk az $\frac{A}{B}$-hez a $\frac{Z^2}{G}$-t.

$$\text{Az összeg: } \frac{G \cdot A + B \cdot Z^2}{B \cdot G}.$$

Egy másik példa: $\left\{\begin{array}{c} D \text{ quadratum} \\ -B \text{ planum} \\ \hline D \text{ bis} \end{array}\right\}$ aequabitur E.

Itt aequabitur = egyenlő és bis = kétszer. A mai jelölésekkel tehát a fenti egyenlőség:

$$\frac{D^2 - B}{2D} = E.$$

Bizony ez kissé körülményes, de ahogyan NAPIER mondta: „Semmi sem kész a megszületésekor.” A második példa azt is elárulja, hogy VIÉTE használta először a kapcsos zárójelet.

A

$2x^3 — 3Bx^2 = C$

egyenletet így írta volna fel:

A_2 cubus—B latus in A_3 quadratum aequatur C solido.

VIÉTE tisztában volt jelölésrendszerének jelentőségével, „a matematikai felfedezéseket lehetővé tevő tudomány”-nyal. Ezzel a fegyvertárral például a harmadfokú egyenlet különféle típusai helyett csak az általános alakkal kellett foglalkoznia, és így lehetővé vált az egyenletek elméletének egységes kiépítése. Az egyenletmegoldásban számos ügyes helyettesítést, transzformációt alkalmazott, amelyek azonban az adott egyenlettípusra általánosságban is illettek. Erre egy példa:

CARDANÓval együtt ő is tudta, hogy a harmadfokú egyenlet $x^3+3px=q$

alakra hozható. Ekkor a $p=t^2+tx$ helyettesítéssel új t ismeretlent vezetett be. Így nyerte az

$x^3+3t^2x+3tx^2=q$

egyenletet, amelyet

$(x+t)^3-t^3=q$

alakban írt. Ehhez kapcsolta a $p=t^2+tx$ egyenletet, és így az

$(x+t)^3 -t^3=q$

$(x +t)^3t^2=p^3$

egyenletrendszert kellett megoldania, amiből *x,* illetve $(x+t)$ kiküszöbölése után nyerte a

$t^6+qt^3=p^3$,

t^3-re nézve másodfokú egyenletet. A *t* meghatározása után a $p=t^2+tx$ egyenletből *x* kiszámítható.

A casus irreducibilisnél VIETE igazolta, hogy ez esetben az egyenlet mindig

$x^3—3x=p$

alakot ölt, tehát azonosítható a

$(2 \cos \alpha)^3—3(2 \cos \alpha) = 2 \cos 3\alpha$

trigonometrikus egyenlettel, ahol az ismeretlen $x=2 \cos \alpha$. A továbbiakban a $2 \cos 3\alpha=p$ egyenlet szerint a trigonometrikus táblázatokból a 3α, illetve az a után a $2 \cos \alpha$ már jó közelítéssel kiolvasható.

Mint a csillagászat iránt érdeklődő, kitűnően ismerte a trigonometrikus azonosságokat. Ez tette képessé egy, kinézésére nézve valóban elrettentő egyenlet megoldására. Ezt a 45-öd fokú

egyenletet a holland ADRIAAN VAN ROOMEN (1561-1615) matematikus orvos tűzte ki, felszólítva a világ matematikusait a megoldására. VIÉTE a maga megoldását az 1595-ben megjelent *Ad problema* című írásában közölte. Az egyenlet a maga teljes borzasztóságában a következő:

$$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12\,300x^{39}+111\,150x^{37}-740\,259x^{35}+$$
$$+3\,764\,565x^{33}-14\,945\,040x^{31}+46\,555\,700x^{29}-$$
$$117\,679\,100x^{27}+236\,030\,652x^{25}-378\,658\,800x^{23}+$$
$$+483\,841\,800x^{21}-488\,494\,125x^{19}+384\,942\,375x^{17}-$$
$$-232\,676\,280x^{15}+105\,306\,075x^{13}-34\,512\,075x^{11}+$$
$$+7\,811\,375x^{9}-1\,138\,500x^{7}+95\,634x^{5}-3795x^{3}+45x=A,$$

ahol A adott konstans. Van Roomen a kihívásban ajánlotta az

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}$$

és

$$A=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

eseteket, és kérdezte a megoldást az

$$A=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}}$$

értékre.

Szeretném megmutatni a megoldást az $A=\sqrt{2}$ esetben. Mint

említettem, VIÉTE jól ismerte a trigonometriát. Ismerte a kétszeres szögek szinuszának és koszinuszának felhasználásával kapható általánosítást is, amely szerint, ha *n* páratlan szám, akkor

$$2\sin(n\alpha)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[(2\sin\alpha)^n-\frac{n}{1!}(2\sin\alpha)^{n-2}+ + \frac{n(n-3)}{2!}(2\sin\alpha)^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(2\sin\alpha)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}(2\sin\alpha)^{n-8}-\ldots\Big].$$

A 2 sin (nα) képletét összehasonlítva a megoldandó egyenlettel, VIÉTE észrevette, hogy az egyenlet együtthatói rendre megegyeznek a képlet együtthatóival, ha $n=45$. Az egyenlet tehát bizonyára úgy keletkezett, hogy VAN ROOMEN a képletben 2 sin α helyett mindenütt x-et írt. Ekkor azonban az egyenletben $A=2\sin 45\alpha$.

Viéte a 2 sin 45α-t mint a 2 sin α polinomját külön előállította a következőképpen:

$$2\sin 45\alpha=2\sin(3\cdot 15\alpha)=6\sin 15\alpha-8\sin^3 15\alpha= =3(2\sin 15\alpha)-(2\sin 15\alpha)^3.$$

Továbbá:

$$2\sin 15\alpha=2\sin(3\cdot 5\alpha)=6\sin 5\alpha-8\sin^3 5\alpha= =3(2\sin 5\alpha)-(2\sin 5\alpha)^3.$$

Végül:

$2\sin 5\alpha=2\sin(3\alpha+2\alpha)=5(2\sin\alpha)-5(2\sin\alpha)^3+(2\sin\alpha)^5.$

Ezt az utolsó polinomot visszahelyettesítve a 2 sin 15α, majd pedig azt a 2 sin 45α felbontásába, megkapta a

$(2 \sin \alpha)^{45} — 45(2 \sin \alpha)^{43} + \ldots + 45(2 \sin \alpha) = 2 \sin 45\alpha$

azonosságot, tökéletes megegyezésben a megoldandó egyenlettel.

Az $A = \sqrt{2}$, azaz a $2 \sin 45\alpha = \sqrt{2}$ esetére VIÉTE 23 pozitív megoldást sorolt fel 15 tizedes pontossággal. Ezek az $\alpha_k = 1° + k*8°$ és az $a_i = 3° + l*8°$ szögekhez tartozó x értékek, amikor k = 0, 1, 2, ..., 11 és $l = 0$, 1, 2, ..., 10. Például, ha $\alpha = 33°$, akkor $x = 2 \sin 33° \approx$ 1,089 278 070 030 05.

A 2 sin α polinomjaként előállított 2 sin (nα) együtthatóival kapcsolatban érdemes megjegyeznünk, hogy Briggs sokféle táblázata között található az Abacus panchrestus (pankhrésztosz = mindenre használható, görög szó), amelyből nemcsak a binomiális együtthatók, hanem a 2 sin (nα) együtthatói is kiolvashatók. Az együttható szót Viéte már teljesen a mai értelemben használta.

Az ügyes egyenletmegoldó VIÉTE az egyenletek elméletét is fejlesztette. Többek között sok összefüggést állapított meg az egyenlet gyökei és együtthatói között. Az ő nevét viseli az

$a_n = (-1)^n x_1 * x_2 \ldots * x_n$

összefüggés, amely az

$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$

egyenletre vonatkozik. Ezt, a harmadfokú egyenletre már CARDANO által kimondott összefüggést, VIÉTE általánosította pozitív gyökök esetére. Azt is megállapította, hogy az $x^3 + p = 3qx$ egyenlet két pozitív gyökére nézve:

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 3q \quad \text{és} \quad x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 = p.$$

Teljes általánosságban azonban, beszámítva a negatív és a komplex gyököket is, az egyenlet együtthatóit a gyökök egyszerű, szimmetrikus függvényeként először

ALBERT GIRARD (1595-1632) holland matematikus közölte Amszterdamban 1629-ben, az *Invention nouvelle en l'algébre* (Új felfedezések az algebrában) című könyvében. A Lotharingiában

született GIRARD STEVIN tanítványa volt. Életének legnagyobb részét hazájában töltötte, a leideni egyetemen tanított matematikát, ő mondta ki elsőként - bizonyítás nélkül — az algebra alaptételét olyan formában, hogy az n-ed fokú algebrai egyenletnek legfeljebb *n* számú gyöke van. A negatív gyököket ugyanis nem vette számításba. (A tételt általánosságban később GAUSS igazolta.) Ugyanakkor GIRARD volt az, aki a negatív és a pozitív szám viszonyát geometriai szemlélettel, hátra-, illetve előrehaladásként értelmezte. Ez a gondolat később a számegyenesen való ábrázolást eredményezte. Otthon volt a trigonometriában is.

A gyökök és együtthatók összefüggéseit még Girard előtt fogalmazta meg

THOMAS HARRIOT (1560-1621) angol matematikus, de az ő írásai csak 1631-ben jelentek meg, halála után 10 évvel. Politikai okok miatt munkáit I. ERZSÉBET uralkodása alatt nem közölhette, ő volt az első matematikus, aki Észak-Amerika földjére tette a lábát, 1585-ben, földmérnöki megbízással. Az algebra szimbólumait bővítette a $>$ (nagyobb) és a $<$ (kisebb) jelekkel. Ő kezdte az egyenlet együtthatóit kisbetűkkel írni. Levelezett GALILEIvel és KEPLERrel. Jó barátságot tartott fenn VIÉTE-tel is.

VIÉTE MUNKÁIBAN SZOROS KAPCSOLAT MUTATKOZIK AZ EGYENLETMEGOLDÁSOK ÉS a geometriai szerkesztések között. Azt, hogy az algebrában - az ókori szemléletet követve - nem tudott elszakadni a geometriától, sokan szemére vetették. Igaz, hogy ez a jelölésrendszerében nehézkességgel járt, de ugyanakkor ez a geometriai szemlélet elősegítette a későbbi analitikus geometria kialakulását.

VIÉTE egy 1600-ban megjelent művében megtaláljuk a ma Horner-módszernek nevezett eljárást, amelyet az egyenletek közelítő gyökeinek a meghatározására már a kínai matematikusok is használtak (316. oldal). VIÉTE az eljárást az

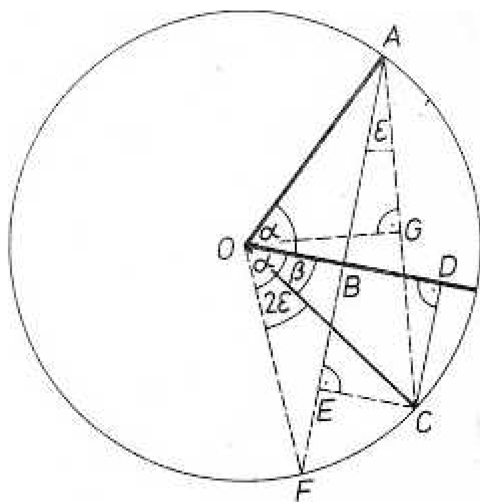
$$x^2+7x=60\ 750$$

egyenleten mutatta be, de így oldotta meg például az $x^6+6000x=191\ 246\ 976$ egyenletet is.

VIÉTE trigonometriája természetesen az elődnek, REGIOMONTANUS-nak a trigonometriáján alapul. 1579-ben jelent meg mind a hat szögfüggvényt tartalmazó táblázata, a *Canon mathematicus* (Matematikai táblázat). Ebben az általános háromszögek ismeretlen adatait derékszögű háromszögekre bontással számolja ki, de egy későbbi, 1593-as munkájában már megjelenik az ún. tangenstétel az

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

alakban. E tételt Európában először 1583-ban THOMAS FINK (1561 — 1656) dán matematikus közölte a *Geometria rotundi* (A kör geometriája) című könyvében.



271. ábra

A főleg számolási egyszerűsítésekre szolgáló trigonometriai azonosságok egész sorát ismerték már VIÉTE idejében. Egyet szabad legyen idézni VIÉTE eredeti gondolatmenetével, amely a *271. ábráról* elég jól leolvasható. Mivel

$AB\perp OD$, $CD\perp OD$ és $EC \parallel OD$,

azért $\sin\alpha + \sin\beta = AB + CD = AE$.

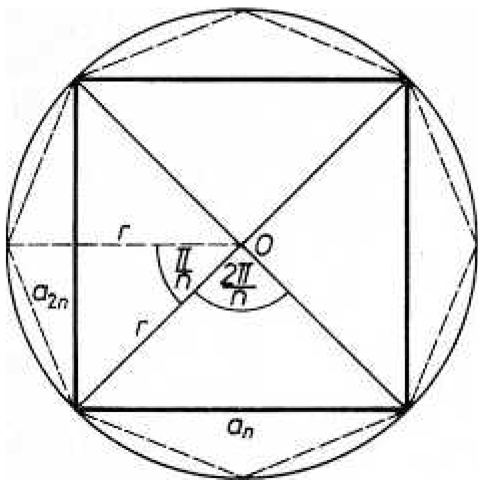
Az *AEC* derékszögű háromszögből $AE = AC \cdot \cos\varepsilon$.

Vegyük most észre, hogy $2\varepsilon = \alpha - \beta$ és $AC = 2AG = 2\sin(\alpha+\beta)/2$. Ezek szerint

$$\sin\alpha + \sin\beta = AE = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ugyancsak trigonometriai indítású a VIÉTE-féle végtelen szorzat, amely a π közelítésére alkalmas. Habár a most bemutatandó végtelen szorzat alkalmazása nélkülözi a konvergenciavizsgálatot, mégis ez az első ilyen tárgyú eredmény a matematikában.

A *272. ábra r* sugarú körébe rajzolt n-oldalú szabályos sokszög területe:



272. ábra

$$T_n = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}.$$

A kétszer akkora oldalszámú, ugyancsak az r sugarú körbe írt szabályos sokszög területe pedig

$$T_{2n}=\frac{2nr^2}{2}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Így tehát

$$T_n : T_{2n}=\cos\frac{\pi}{n}.$$

Legyen a kezdeti sokszög négyzet, amelynek területe $T_4=2r^2$. Az oldalszámot folyton kettőzve:

$$T_4 : T_8=\cos\frac{\pi}{4},$$

$$T_8 : T_{16}=\cos\frac{\pi}{8},$$

$$T_{16} : T_{32}=\cos\frac{\pi}{16},$$

$$\dots$$

$$T_n : T_{2n}=\cos\frac{\pi}{n},$$

ahol $n=2^{k+1}$, $k=1, 2, 3, \dots$ Szorozzuk most össze ezeket az egyenlőségeket! Ekkor

$$T_4 : T_{2n}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ \dots\ \cdot\cos\frac{\pi}{n}.$$

Vegyük ezután figyelembe, hogy $T_4=2r^2$, és hogy n, illetve k növelésével T_{2n} tetszőlegesen megközelíti $r^2\pi$-t, az r sugarú kör területét, tehát, mondta ki VIÉTE:

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ \dots$$

Mielőtt elbúcsúznánk az európai matematikának az útkereső korszakától, feltétlenül illendő még megemlékeznünk Pitiscusról, GALILEIről és KEPLERről, akik a matematikatörténet szempontjából még ide tartoznak, jóllehet Galilei és Kepler a fizikában és a csillagászatban már egy új korszak elindítói.

BARTHOLOMEUS PITISCUS (1561-1613) német matematikus és prédikátor már csak azért is megemlítendő, mert ő a trigonometria keresztapja. ő használta először a trigonometria szót 1595-ben. Kitűnő trigonometriai táblázatai, amelyeket tanítványa, VALENTIN OTHO (1550-1605?) fejezett be, 15 tizedesig tartalmazzák mind a hat szögfüggvényt, 10"-es közökkel. Ez a *Matematikai kincstár* 1613-ban jelent meg.

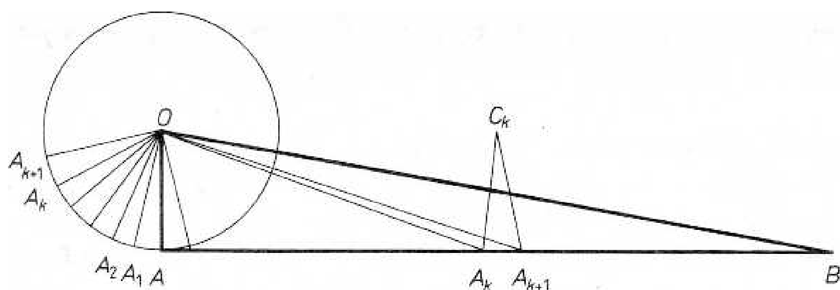
Galileo Galilei (1564-1642) világhírű csillagász neve azért került be méltán a matematikatörténetbe is, mert olyan matematikai gondolatokat adott át tanitványainak, nevezetesen TORRICELLInek, VIVIANInak és CAVALIERInek, amelyek útmutatása nyomán a felsoroltak sikeresen készítették elő az analízis XVIII. századi diadalútját. Galilei az új mechanika elindításával, amelyben összhangba került az elmélet és a tapasztalat, és amelyben az elmélet körén belül hangsúlyos szerepet juttatott a matematikának, végérvényesen áttörte a skolasztika korlátjait, végképp megszabadult a középkori szellemi elnyomás bilincseitől. Matematikai ötletei, nézetei, amelyeket ő maga nem dolgozott ki, éppen a mozgás matematikájában rejlő analízis megszületéséhez vezettek. Nem véletlen, hogy az utána következő matematikusok zöme egyszersmind fizikus is volt. A kopernikuszi forradalom diadalra juttatásáért vállvetve küzdött GALILEIvel az öntudatos püthagoreus

Johannes Kepler (1571-1630), a württembergi világhírű német csillagász, aki a bolygómozgás törvényeivel meghódította a földi fizika számára az eget is. A csillagászat által megkívánt matematikai problémák mellett szívesen foglalkozott más természetű matematikai feladatokkal is. Ennek egyik eredménye lett az 1615-ben megjelent *Stereometria doliorum vinorum* (A boroshordók térmértana). Ebben 92 különböző alakú forgástest térfogatát számította ki. Amiért e könyv említésre érdemes, az a módszere. A végtelen kis területek, illetve térfogatok összegezési módszerével

KEPLER egyik úttörője lett az analízisnek. Voltaképpen ARKHIMÉDÉSZ hasonló gondolatai ihlették meg. KEPLER azonban nem tartotta magát az ókor legnagyobb matematikusának a szigorához. Célja inkább az volt, hogy rájöjjön azokra az alapötletekre, amelyekkel ARKHIMÉDÉSZ még a bizonyítás előtt megsejtette bizonyítandó eredményeit. Lássunk néhány példát a KEPLERE jellemző gondolatmenetekből.

A kör területére vonatkozó tétele szerint: „A kör területének és az átmérő négyzetének az aránya majdnem 11 :14." Érdekes, hogy a π : 4 megközelítésére a 11 : 14 törtet használja, holott az ő idejében már ismert volt számos, ennél jobb közelítés is. Ezek között a legismertebb Ludolph van CEULENnek (1540-1610, eredeti neve Ackermann), a holland delfti vívómesternek, a leideni műszaki főiskola tanárának a 36 tizedesig kiszámított eredménye.

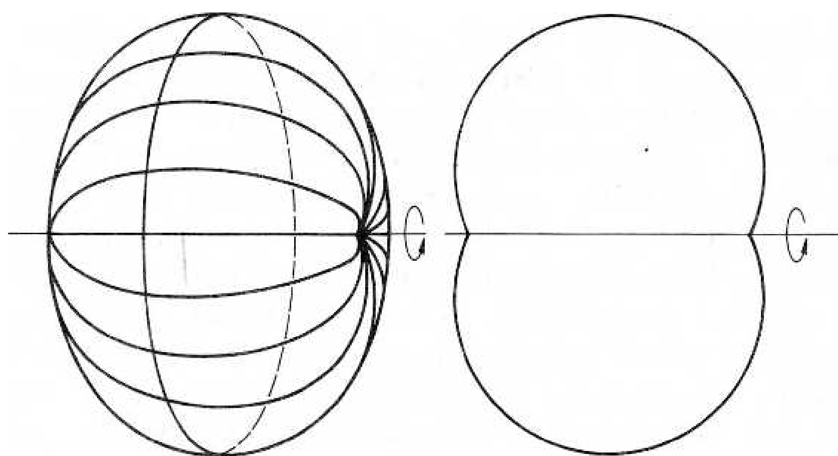
KEPLER véleménye szerint ARKHIMÉDÉSZ a következőképpen okoskodott: A *273. ábra* körlapja felbontható végtelen sok egybevágó (vagy nem egybevágó) körcikkre. Ezen igen vékony körcikkeket, amelyek egyenlő szárú háromszögeknek tekinthetők, helyezzük



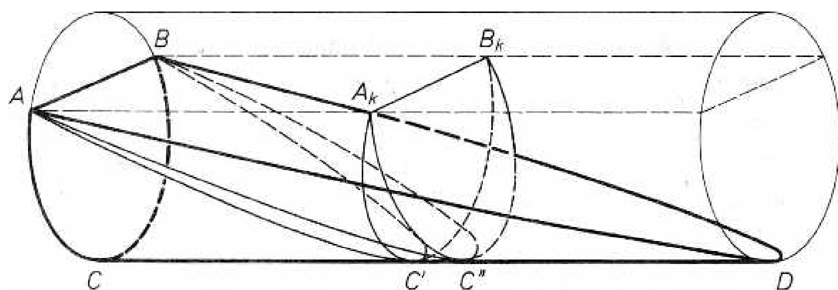
273. ábra

körív alapjukkal a kiterített *AB* körkerületre úgy, amint ezt az $A_kA_{k+1}C_k$ „háromszög" mutatja. Toljuk el ezután minden háromszög C_k csúcspontját az *AB-vel* párhuzamosan a kör *O* középpontjába! Az így nyert $A_kA_{k+1}O$ háromszög területe ugyanakkora maradt, mint az $A_kA_{k+1}C_k$ háromszögé. Minden körcikkháromszöget így átalakítva, összességük éppen befedi az *ABO* derékszögű háromszöget. A kör területe tehát akkora, mint ezé a háromszögé, azaz $r^2\pi$.

Így $r^2\pi : 4r^2 = \pi : 4$, ami közelítőleg valóban lehet $11 : 14 \approx 0{,}785\ 7142$, amikor is $\pi \approx 3{,}142\ 8568$.



274. ábra



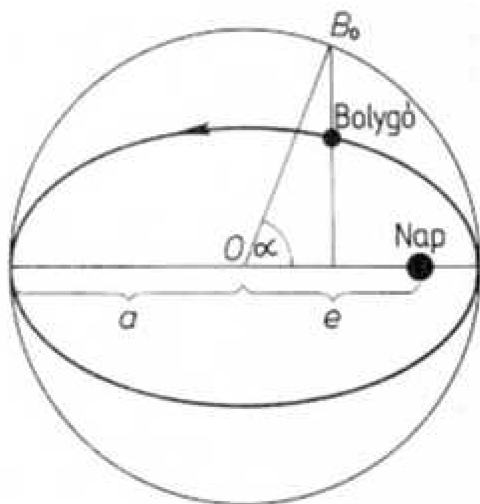
275. ábra

A most látott ötlethez hasonló, de még kevésbé precíz kivitelű az „alma” térfogatának a meghatározása. „Almát” kapunk, ha egy félkörnél nagyobb körszeletet megforgatunk a határoló húrjának egyenese mint tengely körül *(274. ábra).* Szeleteljük fel ezt az almát a forgástengelyen átfektetett síkokkal „végtelen sok” gerezdre. Terítsük ki ezután az alma *e* egyenlítőjét egyenesbe. Ez a *275. ábra CD* szakasza. Erre a szakaszra sorakoztassuk egymás mellé az almacikkeket az $A_kC'B_kC''A_k$ helyzetében, és végül toljuk el az A_kB_k húrt az *AB*-be. Így ez a k-adik gerezd átmegy az *AC'BC" A* nyújtott cikkbe. Ezáltal **- Kepler** sejtése szerint - az almagerezd térfogata nem változott. Ha ezt az átalakítást minden almacikken

végrehajtjuk, akkor ezek egyesítése ki fogja tölteni az *ABCD* hengerszeletet, amelyet a *CD* magasságú hengerből az *ABD* sík vág le. Az alma térfogata ezek szerint ennek az *ABCD* hengerszeletnek a térfogatával egyenlő.

KEPLERnek ezen „bizonyításai” nagyon hiányosak. Ezzel azonban velünk együtt ő is tisztában volt. Azért érdemes mégis felidézni ilyen irányú gondolatait, mert példát láthatunk arra, hogyan indult Európában a végtelen kicsiny mennyiségekkel való módszeres számolás.

Kepler számolástechnikai ügyességét jellemzi a csillagászatban fontos szerepet játszó



276. ábra

$\alpha — \varepsilon \sin \alpha = \beta$

egyenlet megoldása. Ebben a Kepler-féle egyenletben a egy ellipszispályán keringő bolygó excentrikus anomáliája, ε pedig az ellipszis numerikus excentricitása: e/a *(276. ábra),* és végül β a *t* időhöz tartozó közepes anomália. A β-t definiálja a $\beta = (2\pi/T)*t$ összefüggés, ahol *T* a bolygó keringési ideje. A Kepler-egyenlet megoldásának alapfeltétele, hogy $\varepsilon = e/a < 1$.

A feladat az, hogy ε és β ismeretében ki kell számítani az a excentrikus anomáliát. Kepler első megközelítésben α-t olyan α_1-nek választotta, amelyre igaz, hogy

$\alpha_1 = \beta + \varepsilon \sin \beta$.

Ekkor a valódi és a becsült érték különbsége $\alpha—\alpha_1 = \varepsilon(\sin \alpha— \sin \beta)$.

Vegyük figyelembe, hogy egyenletünk szerint $\alpha—\beta = \varepsilon \sin \alpha$, és hogy $|\sin \alpha—\sin \beta| < |\alpha—\beta|$.

Ezért $|\sin \alpha—\sin \beta| < |\alpha—\beta| = |\varepsilon \sin \alpha| < \varepsilon$.

E szerint $|\alpha—\alpha_1| = |\varepsilon(\sin \alpha—\sin \beta)| < \varepsilon^2$.

Legyen most a második közelítő érték

$\alpha_2 = \beta + \varepsilon \sin \alpha_1$.

Ennek a helyes értéktől való eltérése

$\alpha—\alpha_2 = \varepsilon(\sin \alpha —\sin \alpha_1)$.

Az $\alpha \approx \alpha_1$ esetéhez hasonlóan:

$|\sin \alpha—\sin \alpha_1| < |\alpha—\alpha_1| < \varepsilon^2$,

tehát

$|\alpha—\alpha_2| = \varepsilon(\sin \alpha—\sin \alpha_1)| < \varepsilon^3$.

Pontosan ugyanígy nyerhetjük, hogy az α_3 harmadik közelítő értéknél

$|\alpha—\alpha_3| < \varepsilon^4$ stb.

A fentiek szerint választott n-edik közelítő érték esetében pedig

$|\alpha\text{-}\alpha_n| < \varepsilon^{n+1}$

Mivel $\varepsilon < 1$, azért $\varepsilon^{\boldsymbol{n+1}}$ az $\boldsymbol{n}$ elég nagy értékénél bármely kis számnál kisebbé tehető. A Föld pályájának numerikus excentricitása

$\varepsilon = 0{,}016\ 74$, tehát $\varepsilon^3 = 0{,}000\ 004\ 69$, és mivel $1'' = 0{,}000\ 004\ 85$ radián, azért már a második közelítő érték másodperc pontosságú.

Összefoglalásként megállapíthatjuk, hogy az európai XVI. században a matematika - főként az ismertetett matematikusoknak köszönhetően - végleg elszakadt az ókori görög geometriai hagyományoktól, jóllehet azt meg nem tagadta, sőt épített rá. Szemléletben és gondolkodásmódban azonban az irányváltás szembeszökő. Ekkor már nem annyira az antik kultúra feltámasztására, hanem inkább egy, a kezdődő kapitalizmus világához igazodó, új kultúra keresésére törekedtek a szellem hordozói, köztük a tudósok és azok között a matematikusok is. A XVI. századi matematika már ennek az újnak a kezdetét jelenti. Éppen a XVI. században a kereskedelemre, a közvetítésre épült itáliai jólét kezdett elmaradni Európa északibb államainak az iparra támaszkodó fejlődése mögött. Amint láttuk, már a század végén - és a XVII. század elején még inkább - a kultúrcentrumok is áthelyeződtek az iparilag fejlettebb Franciaországba, Angliába, Némethonba. Az Itáliában fellobbant matematikai reneszánsz vagy inkább útkeresés folytatódott, de az eredmények már nem az Appennini-félszigeten születtek.

EURÓPA

ÚJ MATEMATIKÁT TEREMT

A BAROKK KOR KULTÚRTÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉSE

Az a másfélszáz esztendő, amelyet a barokk zene divatja is jellemez, tehát a nagyjából 1600-1750 évekre terjedő időszak, érdekes módon egybeesik a matematikának egy elég jól elkülöníthető fejlődési szakaszával is. A zenében ez a Monteverdivel kezdődő és BACHhal végződő korszak a matematikában DESCARTES-tal indul és a Bernoulli testvérekkel zárul, vagyis ez az infinitezimális számítás kialakulásának ideje, egyben az az időszakasz, amelyben megkezdődött a matematika különböző kutatási területeinek elkülönülése. Ez természetesen lehet - a mélyebb okok után nem kutatva - véletlen egybeesés, de biztos, hogy nem véletlen a matematika e korszakának és a filozófiai racionalizmus idejének az azonossága. Ekkor a legnagyobb matematikusok, mint Descartes, Pascal, Newton és Leibniz, egyszersmind a legnevesebb filozófusok is voltak, és a kor legkiválóbb nem matematikus filozófusai: Francis Bacon, Hobbes, Spinoza sem tudták nélkülözni a matematikai vonatkozású ismereteket. Ezen idők matematikájára nemcsak a filozófiával, hanem a fizikával való összefonódottság is jellemző. Az imént felsorolt matematikusok és mellettük Torricelli, Fermat, Wallis, Huygens és mások nagyszerű eredményeket értek el a fizikában is. Talán éppen a matematikának, a fizikának és a filozófiának ez a szoros, egymásra támaszkodó, olykor teljesen összeforrott együttfejlődése az egyik titka e korszak nagy eredményeinek, amelyekkel vetélkedik egymással e három tudomány.

Úgy gondolom, hogy különösképpen indokolt ennek az időszaknak az áttekintése a matematikától távolabbi területeken is. Természetes, hogy e kor lendületes tudományos életének gazdasági feltételei is voltak. 1609-ben a protestáns Németalföld szabadságharca győzelemmel fejeződött be, és Spanyolország elismerni kényszerült Hollandia függetlenségét. A spanyol feudális

viszonyoktól megszabadult Hollandia a tőkés fejlődés útjára lépett, és csakhamar a század leggazdagabb országa lett. Gazdagságának biztos alapja volt a kor legvirágzóbb mezőgazdasága. Ugyanakkor hajózása, kereskedelme és munkamegosztással működő, fejlett kézműipara is hozzájárult az irigyelt gazdasági fellendüléséhez. A legnagyobb jövedelemforrást mégis a gyarmatok jelentették. A Holland Kelet-indiai Társaság 1602-ben alakult meg Délkelet-Ázsiában, de Hollandia jelen volt Afrika legdélibb csücskén, Fokvárosban éppen úgy, mint Észak-Amerikában, ahol akkoriban alapították meg Új-Amszterdamot, a mai New Yorkot. A gyarmatáruk hatalmas haszna Amszterdamot az akkori világ bankközpontjává tette. Csoda-e, hogy ebben a gazdag légkörben felvirágzottak a művészetek és a tudományok?

A XVII. század első nagy holland művésze a hitelezőinek képeivel fizető FRANS HALS (15807-1666) volt, akinek nem beállított arcképei, éppen ezért, csodálatosan éltek. Holland volt REMBRANDT (1606-1669), az ugyancsak új felfogású portrék festője *(Önarckép, Dr. Tulp anatómiája)* és VERMEER VAN DELFT (1632-1675), a pontos tájképek alkotója. A számos holland, barokk középület közül csak az amszterdami városházát, a későbbi királyi palotát említjük meg, JACOB VAN CAMPEN (1595-1657) alkotását. A holland természettudósok közül ismert nevű LEEUWENHOEK (1632-1723), a mikroszkópiái vizsgálatok elindítója és HUYGENS (1629-1695), a fény hullámelméletének megfogalmazója. Ekkor élt a holland filozófia legnagyobb alakja, a kenyerét üveglencsék csiszolásával kereső és a LEIBNIZcel fénytani kérdésekről levelező, szabadgondolkodó SPINOZA (1632-1677). Itt töltötte életének termékeny két évtizedét 1628-tól DESCARTES (1596-1650), a világhírű racionalista filozófus, természettudós és matematikus. COMENIUS (1592-1670), a nagy cseh pedagógus is ekkor működött Hollandiában.

Hollandia után legfejlettebb a már szintén a tőkés fejlődés útját járó Anglia volt. Itt a XVII. század kezdetén VIII. HENRIK leánya, ERZSÉBET (1533-1603) uralkodott. A nagybirtokos termelésen nyugvó tőkefelhalmozódáshoz járult hozzá az 1600-ban megalakult Kelet-indiai Társaság gyarmati kereskedelme. A kontinensre is kiterjedő kereskedelmi hálózat biztos alapja volt az angol posztó- és vasipar. Az akkori angol gazdagság egyik jelképe

lehetne a londoni Szent Pál-székesegyház. Ezt a templomóriást CHRISTOPHER WREN (1632-1723), London újjáépítője emelte. Ő még találkozhatott az Angliában letelepedett VAN DYCK (1599-1641) holland portréfestővel, aki megfestette a nyílt önkényuralmat bevezető, majd a CROMWELL (1599-1658) által lefejeztetett I. KÁROLY (1600-1649) arcképét. A kor angol művészetéről szólva nem hagyható ki JOHN MILTON (1608-1674), „az egyetemes protestantizmus nagy költője" (SZERB ANTAL), *Az elveszett Paradicsom* zseniális szerzője. E korszak nagy íróinak sorában szerepel SWIFT (1667-1745), akinek maró szatírával megírt *Gulliverje* napjainkra bájos gyermekmesévé szelídült, és ALEXANDER POPE (1688-1744), az angol klasszicizmus legkiválóbb költője. Ne hagyjuk említetlenül ifjúkorunk kedves olvasmányát, *Robinson Crusoe-t* sem, DANIEL DEFOE (16607-1731) remekbe szabott robinzonádját. E kor angol barokk zeneszerzői közül közismert PURCELL (1659-1695).

Az angliai ipari fejlődéssel párhuzamosan jelentkeztek a tudományos eredmények is. Az új, kapitalizálódó világban, a megváltozott viszonyok közé jutott embernek újra meg kellett találnia önmagát. ERZSÉBET főminisztere, FRANCIS BACON (1561-1626) egyszersmind korának egyik nagy filozófusa is volt. Az ő eszméit fejlesztette tovább a mechanisztikus materializmus irányába THOMAS HOBBES (1588-1679), a *Leviathan* írója. WILLIAM GILBERT (1544-1603), a királyné orvosa, a mágneses és az elektromos jelenségek első kísérletező kutatója volt. E században fedezte fel WILLIAM HARVEY(1578— 1657) a szívmotor hajtotta vérkeringést. Időszerűvé vált a számológép feltalálása is, amely Angliában SAMUEL MORLAND (1625-1696) mérnök-fizikus nevéhez fűződik. Ennek az időszaknak a legnagyobb angol matematikusai, akiknek a legtöbbje fizikus is: WALLIS, GREGORY (1638-1675), BARROW (1630-1677) és köztük is a legnagyobb, NEWTON (1643-1727).

Franciaországban a kapitalista fejlődés lassabban haladt. A XVII. század elejére kialakult abszolút monarchia IV. HENRIK (1553-1610) uralkodása alatt szilárdult meg. Ez az uralkodó nagy súlyt helyezett a mezőgazdaság mellett az ipar és a kereskedelem fejlesztésére is. 1608-ban Franciaország is megkezdte a gyarmatosítást Kanadában, Quebec megalapításával. A francia

abszolutizmus fénykora XIV. LAJOS (1638-1715) uralkodására esik. A versailles-i kastély építtetőjének nagy terve, hogy visszaállítsa NAGY KÁROLY birodalmát, nem sikerült. A Habsburgok elleni Rákóczi-szabadságharcot egyedül támogató „Napkirály” országa a folytonos háborúkban elszegényedett. Ezt tetézte az utódok nemtörődömsége és butasága, amely végképp a csőd szélére kergette az országot, és a XVIII. század második felére megérlelte a párizsi forradalmat.

E hanyatló kor francia királyai az állam teljes eladósodása idején nem tudtak lemondani a rafinált élvezeteket hajhászó életmódról és az udvar fényűző csillogásáról. Megépült a Tuileriák és a párizsi Louvre. Ekkor festette a logikus kompozíciói ellenére is szenvedélyeket sugárzó képeit a francia **Nicholas Poussin** (1594-1665) *(Krisztus siratása, Bacchanália)*. Kortársa, **Claude Lorrain** (1600-1682) realisztikus tájképeivel remekelt *(Tengeri kikötő)*. XIV. **Lajos** udvari festője **Charles Lebrun** (1619-1690) volt. Ugyancsak a XVII. század szülötte **Pierre Puget** (1622-1694), a halálkín döbbenetes ábrázolója.

A képzőművészet mellett a XVII. századdal a francia irodalom egyik csodálatos kora köszöntött be. **Richelieu** (1585-1642) bíboros 1637-ben megalapította a Francia Akadémiát, amely fő céljának tekintette a nyelvművelést. A kor nagy drámaírói: **Corneille** (1606-1684), **Racine** (1639-1699) és a francia vígjáték megteremtője, az életének utolsó napját is színpadon töltő **Moliére** (1622— 1673). A francia racionalizmus e századának csodálatos jelensége volt **Lafontaine** (1621-1695), az üde verses mesék költője. Ekkor írta *Leveleit* a szellemes **Madame de Sévigné** (1626-1696), és ekkor született meg az első lélektani regény **Madame de Lafayette** (16341693) tollából. Igazi barokk zenét írt **Couperin** (1668-1733), XIV. **Lajos** udvari csemballistája, aki LULLYvel (1632-1687) a klasszikus francia zenei nyelv megteremtője.

A filozófia terén **Descartes,** korának leghíresebb tudósa kialakította a tudományos megismerés deduktív racionalista módszerét, amely mintegy kiegészítette az angol természettudományok tapasztalati módszerét. Filozófiai munkáival is megörökítette nevét **Blaise Pascal** (1623-1662), a hidrosztatika megalapozója, a

kiváló matematikus. Velük együtt öregbítette a francia matematika hírnevét **Fermat** (1601-1665).

A XVII. század első felében Németország hadszíntér volt. A kezdetben vallási színezetű harmincéves háború (1618-1648) a Habsburgok elleni általános európai támadássá szélesedett. A népességének harmadrészét elvesztő Németország politikailag is felbomlott mintegy 300 kis fejedelemségre. Ekkor vált le a birodalom testéről Hollandia és Svájc. A fejedelemségekben is kialakult abszolutizmus nyomorúságba taszította a parasztságot, az ipari fejlődés megszűnt, a kereskedelem is minimálisra zsugorodott. Az ausztriai Habsburgok a harmincéves háborút lezáró vesztfáliai béke értelmében megtarthatták az osztrák tartományokat és Csehországot.

A bécsi Habsburgok birodalma a belső politikai gyengeség ellenére a XVIII. század elején erős, fejlődésnek induló kontinentális hatalommá nőhette volna ki magát **VI. Károly** (III. **Károly ma**gyar király, 1685-1740) uralkodása alatt, ha Anglia féltékenysége ezt meg nem gátolja.

Németország és Ausztria területén a hosszas háborúk és nehéz gazdasági körülmények közepette is született néhány nagyszerű kulturális eredmény. A pompás barokk épületek közül ekkor épült Johann Bernhard Fischer von Erlach (1656-1723) tervei nyomán a bécsi és a prágai paloták egy része. Az általa épített templomok közül talán legszebb a bécsi Karslkirche (1716-1737), amelyet fia fejezett be. Ugyancsak fia, Joseph Emanuel Fischer von Erlach (1693-1742) fejezte be az apja által elkezdett Schwarzenberg-palotát Bécsben és a Flofburg egyik szárnyát. Kortársának, Johann Lugas von HILDEBRANDTnak (1668-1745), Savoyai Jenő (1663-1736) építészének alkotása a ráckevei kastély (1702), a béllyei Szavoyai-kastély, a bécsi Belvedere-palota, a melki apátság temploma stb. Ebben a korszakban épült a drezdai Zwinger és a würzburgi Residenzschloss is.

A német barokk zene világhírű mestere, JOHANN SEBASTIAN BACH (1685-1750) a XVIII. század elején ontotta csodálatos bőséggel remek orgonaműveit, zenekari darabjait és vokális alkotásait. Az ő nagy előfutára volt HEINRICH SCHÜTZ (1585-1672), az első német opera *(Daphne)* szerzője. 1680-ban Hamburgban nyitotta

meg kapuit az első német operaház. Itt volt hegedűs GEORG FRIEDRICH HANDEL (1685-1759), aki később London zenei életét irányította.

A XVII. század a német irodalomnak csendes korszaka volt. Fegyverek közt hallgattak a múzsák, legalábbis a német irodalom múzsája hallgatott. Csak a XVIII. század első felében tűnt fel egy kiváló német költő: FRIEDRICH GOTTLIEB KLOPSTOCK (1724-1803). Nagy művének, a *Messiásnak* az elkészülte már 1772-re esik.

A szóban forgó másfél évszázadból nem sok német tudós nevét tudjuk felsorolni, de e kevesek közt tisztelhetjük GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZET (1646-1716), a megismerés általános elveit kutató racionalista filozófust, az oknyomozó történetírás atyját, a nemzetközi jog fejlesztőjét, az összehasonlító nyelvtudomány megalapozóját, a német egységért és a vallási ellentétek megszüntetéséért küzdő politikust, a differenciál- és integrálszámítás egyik felfedezőjét, a Porosz Tudományos Akadémia első elnökét. Az akkori német tudósok közül nem maradhat ki GEORG ERNEST STAHL (1660-1734) kémikus, aki megalkotta a flogisztonelméletet, az égés első tudományos magyarázatát.

Az eddig nem említett országok is számos területen hozzájárultak az európai kultúra fejlődéséhez.

A festők még mindig Itáliába jártak tanulni, habár a festészet - a többi képzőművészettel együtt - már nemzetközivé vált. Lorenzo Berninit (1598-1680) Szent Teréz látomásának megmintázásáért ma is csodáljuk. Korának e legnagyobb szobrásza a Szent Péter-templom építésében is közreműködött. A belga Lucas Faidherbe (1617-1697) a templomok és kolostorok egész sorát építette át barokk stílusúvá. Ugyancsak rendkívüli tehetség volt a velencei GIOVANNI BATTISTA TIEPOLO (1696-1770), akinek mesteri freskói megtalálhatók Velencében, Madridban és Würzburgban is. A spanyol festők közül kiemelkedik a krétai születésű EL GRECO (DOMENIKOSZ THEOTOKOPULOSZ, 1541?-1614), aztán meg DIEGO VELÁZQUEZ (1599-1660), a „legfestőibb festő”.

1615-ben fejezte be CERVANTES (1547-1616) a *Don Quijotét.* A XVII. század elejére esik az első nagy spanyol drámáknak, CALDERÓN

(1600-1681) remekeinek a színre kerülése.

A tudományos és ezen belül a matematikai élet szempontjából fontos esemény a Szentpétervári Tudományos Akadémia megalakulása 1725-ben.

Nekünk magyaroknak hasznos, ha valamelyes képet kapunk hazánk korabeli kulturális helyzetéről is. Ehhez azonban kissé vissza kell mennünk az időben. MÁTYÁS király uralkodása alatt, a XV. század utolsó negyedében Buda még a humanista szellem és a reneszánsz kultúra európai hírű otthona volt. (VITÉZ JÁNOS, JANUS PANNONIUS, REGIOMONTANUS, a visegrádi Mátyás-palota, a nyírbátori minorita templom, a kolozsvári és dési - ma református - templom, a siklósi vártemplom, a szepességi és a bártfai fafaragó iskola stb.) MÁTYÁS halála után az ország vezetésében rendi anarchia következett be, amely együtt járt a parasztság mérhetetlen kiszipolyozásával. Az 1514-es Dózsa-féle parasztfelkelés után II. LAJOS (15061526) alatt a politikailag és erkölcsileg lezüllött országot felkészületlenül érte II. SZULEJMÁN török szultán támadása 1521-ben. Az 1526-os mohácsi csatavesztés után a magyar királyság elbukott. 1541-ben az ország három részre szakadt. A török által megszállt terület hatalmas ék gyanánt választotta el a HABSBURG FERDINÁND (1503-1564) kezén maradt, keskeny nyugati sávot az önálló állammá vált Erdélyi Fejedelemségtől. A nyugati résznek, azaz a királyi Magyarországnak az a szerep jutott, hogy végvárláncával felfogja a Habsburg tartományok ellen irányuló török támadásokat. Ekkor örökítették meg nevüket a végvári hősök: LOSONCZI ISTVÁN Temesváron, SZONDI GYÖRGY Drégely várában, az egri DOBÓ ISTVÁN és talán a politikailag legjelentősebb: ZRÍNYI MIKLÓS (1508-1566) Szigetvárnál. A XVI. századi magyar végvárak valóban védték az egész európai kultúrát a törökök ellen. A háborús viszonyok között a magyar városok fejlődése megállt, és a feudális viszonyok hosszú időre megmerevedtek. Ilyen helyzetben kezdődött el a tizenöt éves háború (1591-1606) a Habsburgok és a törökök között Magyarország birtoklásáért. Akkor az államügyekkel nem törődő II. RUDOLF (1552-1612), KEPLER patrónusa uralkodott, akit a csillagászaton kívül más nem érdekelt. A vagyoni és vallási sérelmek okozták az első magyar Habsburg-ellenes felkelést, amelynek élére BOCSKAI ISTVÁN (1557-1606) állt, akit eredményes harcai után a magyarországi és az erdélyi rendek fejedelmüknek

választottak. 1606-ban a Habsburgok és a törökök BOCSKAI közvetítésével megkötötték a zsitvatoroki békét.

A XVII. században teljes erővel kibontakozó ellenreformáció vezetője PÁZMÁNY PÉTER (1570-1637) esztergomi érsek volt. Ezekben az időkben azonosult a protestantizmus a Habsburg-ellenességgel.

Erdély a tizenöt éves háború változékony politikai viszonyai után igazán BETHLEN GÁBOR (1580-1629) fejedelemsége alatt szilárdult meg és érte el gazdasági és kulturális virágkorát, de II. RÁKÓCZI GYÖRGY (1621-1660) ügyetlen politikája miatt török védnökség alá került, önállóságát elvesztette.

II. RÁKÓCZI GYÖRGY bukása meghiúsította a szigetvári hős dédunokájának, ZRÍNYI MIKLÓSNAK (1620-1664), a költőnek azt a reményét, hogy a török kiűzése után megvalósíthassa a magyar nemzeti királyságot éppen II. RÁKÓCZI GYÖRGY királysága alatt. ZRÍNYI volt az 1664-es téli hadjárat Európa-hírű törökverő hőse. A vasvári béke, amely a szentgotthárdi győzelem ellenére török kézen hagyott minden addig megszállt magyar területet, nagy elégedetlenséget szült, és ez a Habsburgok elleni, Wesselényi-féle összeesküvésben robbant ki. A bécsi kormányzat még nagyobb elnyomással és az ellenreformáció katonai támogatásával válaszolt. Az újabb magyar felkelés 1678-ban kezdődött az ifjú THÖKÖLY IMRE (1657-1705) vezetésével. Ennek a kuruc felkelésnek a sikerei a törököt újabb, Bécs elleni támadásra ösztökélték, aminek az lett a vége, hogy a XI. INCE pápa által létrehozott, ún. Szent Liga hadai a törököt végleg kiűzték az országból. Az 1699-ben megkötött karlócai béke után a bécsi udvar Magyarországon abszolutisztikus kormányzást vezetett be, és Erdély önállóságát is megszüntette. A XVIII. század elején megindult, kezdetben reményekre jogosító II. Rákóczi Ferenc-féle szabadságharc sikerességének egyik feltétele volt, hogy a szövetséges XIV. LAJOS francia király is győzedelmes legyen. A francia vereség után azonban a Rákóczi-szabadságharc is elbukott.

Hazánk tehát az áttekintett időszakban kevés kivételtől eltekintve állandó hadszíntér volt, és ha nem, akkor megszállás vagy elnyomás alatt sínylődő, önálló politikát nem folytató, részekre szakadozott országként küzdött olykor a puszta fennmaradásért.

Ekkor maradt el a Nyugat-Európában kibontakozó és virágzó gazdaságtól és kultúrától. Inkább csodálatos, mint természetes, hogy ennek ellenére számos művészeti alkotás és kulturális törekvés emlékeztet hazánkban a XVII. századra és a következő század elejére.

Az irodalomban a barokk szellem nagy képviselője: PÁZMÁNY PÉTER, az ellenreformáció bajnoka, a nagyszombati egyetem megalapítója (1635). KÁROLI GÁSPÁR (15307-1591) 1590-es protestáns-biblia-fordítását 1626-ban követte KÁLDI GYÖRGY (1573-1634) magyar nyelvű katolikus bibliája. Az erdélyi protestáns papoknak mintegy a kiképzéséhez tartozott egy külföldi út, rendszerint Hollandiába, Németországba vagy Angliába. Ennek egyik csodálatos példája SZENCZI MOLNÁR ALBERT (1574-1634), aki egy fillér nélkül, gyalogszerrel eljutott Wittenbergbe, Strassburgba, Genfbe, Rómába, Heidelbergbe, akit Prágában KEPLER látott vendégül. Ez az a kor, amelyben íróink felfedezik a magyar nyelvet (PÁPAI-PÁRIZ FERENC, 1649-1716, az első magyar nyelvű orvosi könyv írója; MISZTÓTFALUSI Kis MIKLÓS, 1650-1702, a nyomdai művészet első magyar képviselője; gróf HALLER JÁNOS, 1626-1697, politikus, fordító). A XVIII. század elején dolgozta fel BÉL MÁTYÁS (1684-1749) az északnyugati Felvidék földrajzát és történelmét. Ekkor alapozta meg a magyar történetírást PRAY GYÖRGY (1723-1801) és KATONA ISTVÁN (1589-1649). CZVITTINGER DÁVID (1676?-1743) 1711-ben írta meg az első magyarországi irodalomtörténetet latinul. A Nyugatot megjárt hazatérők magukkal hozták az új szellemet, BACON és DESCARTES racionalizmusának az eszméit.

1650-ben Lorántffy Zsuzsanna (1600?-1660) Sárospatakra hívta COMENIUSt. Ő készítette elő az útját Apáczai Csere Jánosnak, aki a holland Harderwijk egyetemének első doktorálója volt, aki a gyulafehérvári kollégiumban tanított és munkálkodott egy olyan tudományos gyűjtemény (Magyar Encydopaedia) összeállításán, amely a diákok kezén közkinccsé válva emelhette a magyar szellem színvonalát. 1646-ban írta meg gróf Zrínyi Miklós, „a kard és a lant hőse” a régi magyar irodalomnak talán legnagyobb művét, a Szigeti veszedelem című eposzát, dédapjának és vitézeinek hősi halálát. Zárjuk le a magyar irodalom e korszakát MIKES KELEMENnel (1690-1761), a bujdosó RÁKÓCZI rodostói hívével, a

Törökországi levelek írójával.

A kor magyar festőit itthon nem becsülték meg. Szinte kivétel nélkül külföldön érvényesültek. SPILLENBERGER JÁNOS (1628-1679) Velencében, Münchenben és Bécsben dolgozott. KUPETZKY JÁNOS (1667-1740), II. RÁKÓCZI FERENC arcképfestője Bécsben, Lipcsében és Nürnbergbcn szerzett hírnevet. MÁNYOKI ÁDÁM (1673-1757) műveit Drezdában és Varsóban értékelték érdeme szerint. Az eperjesi BOGDÁNY JAKAB (1660?-1724) Angliában aratta sikereit egzotikus madarakkal díszes csendéleteivel. Ugyancsak külföldön festett BOGDÁNY veje, a tehetséges STRANOVER TÓBIÁS (1634-1724). Ugyanekkor itthon idegen festők freskói kerültek a templomok falára: ANTON MAULBERTSCH (1724-1796), PAUL TROGER (1698-1762) és mások művei.

Az építészet alkotásai, a háborús korhoz illeszkedve, főleg várak és kastélyok voltak. A nyugati barokk idejében nálunk még főleg a reneszánsz dívott. Az egyik korabeli szép reneszánsz épületünk a sárospataki vár. Ilyen a keresdi Bethlen-kastély is. I. RÁKÓCZI GYÖRGY építtette a munkácsi várat, továbbá palotáját Gyulafehérvárott és Désen.

A királyi Magyarországon a XVII. század elején fejezték be a sárvári ötszögű, ma is álló, reneszánsz kastélyt és a felvidéki Thurzó-kastélyt. A képzőművészeti barokk a XVII. század közepén érkezett hazánkba. Ezt Erdélyben megelőzte az ún. erdélyi virágos barokk. Nyugat- és Észak-Magyarországon az építészet a rekatolizáció jegyében főleg egyházi jellegű volt. Az első magyar egyházi barokk épület a gyönyörű nagyszombati jezsuita templom (1637). Ennek kortársa a győri Szent Ignác-templom (1635). A számos egyházi építkezéssel párhuzamosan folyt a főurak építkezése mind a királyi Magyarországon, mind Erdélyben is (LIPPAY érsek pozsonyi nyári kastélya, a sárvári Nádasdy-kastély DORFMEISTER képeivel, a kismartoni és a fertődi Eszterházy-kastély stb.).

A XVIII. század első felében épültek késő barokk emlékeink. Ekkor épült újjá a budai várhegyen az elpusztult királyi palota, ekkor épült a budai városháza, a pesti Invalidus-kaszárnya (a mai Fővárosi Tanács épülete), a ráckevei Savoyai-kastély, az edelényi kastély stb. A késői egyházi barokk néhány remeke: a trencséni jezsuita

templom, a pozsonyi Szentháromság-templom, a pesti pálos templom (a mai egyetemi templom) stb.

A török hódoltsági területen még a meglevő épületeket sem gondozta senki, újakat sem építettek. Csak néhány mecset, dzsámi, minaret, türbe és fürdő emlékeztet a néhai török uralomra.

Ez a nagyon vázlatos, hiányos felsorolás is bizonyíthatja, hogy hazánk békés viszonyok között sem a művészetekben, sem a tudományokban nem maradt volna el a Nyugat mögött, hiszen az évszázadokon át tartó elnyomás és háborús körülmények közepette is létesültek és még létesülhettek volna olyan központok, amelyek körül kivirulhattak volna a nyugati kultúra sajátosan magyar változatú virágai. Hangsúlyoznunk kell, hogy az akkor létesült protestáns iskolák: a sárospataki, a debreceni, a gyulafehérvári, a nagyenyedi, a marosvásárhelyi, a székelyudvarhelyi, a szászvárosi és a zilahi református kollégiumok, a felvidéki evangélikus és a kolozsvári unitárius iskolák modern szellemű, a természettudományok és a matematika oktatását is fontosnak tartó intézetek voltak. Ezek diákjai közül sokan eljutottak a krakkói, a wittenbergi, a hollandiai és a svájci egyetemekre, ahonnan magukkal hozták a felvilágosodás eszméit. A királyi Magyarország jezsuita iskolái fő feladatuknak a katolicizmus erősítését, a teológiai és filozófiai tárgyak oktatását tekintették, és az engedelmességre, az egyházhoz való feltétlen hűségre, a tekintélytiszteletre neveltek, tehát célkitűzéseiket tekintve is különböztek a protestáns iskoláktól. A jezsuiták Nagyszombatban és Kassán is létesítettek rövid életű egyetemet, a nagyszombati működése a reáltudományok területén sem volt jelentéktelen.

A matematikát tanító intézetek számára tankönyvek kellettek. Apáczai *Encyclopaediájának* is van matematikai része. A XVII. században és a következő század elején több magyar matematikai tankönyv jelent meg, közülük kiemelkedik Maróthi György (1715-1744) debreceni professzor *Arithmeticája.* (1743). A jelzett 150 esztendőben magyar matematikai felfedezésekről nem beszélhetünk. A magyarságnak ebben a nagyon nehéz és küzdelemteli korában néhány kitűnő pedagógus igyekezett felkelteni a matematika iránti érdeklődést, és sikerrel kezdték meg a magyar matematikai szaknyelv megteremtését.

Az európai barokk kor fizikusairól, természettudósairól nem szükséges külön megemlékeznünk, hiszen - mint említettem - abban a korban a matematika, a fizika és a csillagászat művelői azonosak voltak. KEPLER törvényei, GALILEI távcsöve, kinematikai eredményei, új kutatási módszerei, STEVIN erőparalelogrammája, DESCARTES mozgástörvényei, kozmogóniája és optikája, TORRICELLI, PASCAL, BOYLE, MARIOTTE és GUERICKE gőz-, illetve légnyomástörvényei, HUYGENS fényelmélete, ingatörvénye, cikloisingája, az ütközésre és a körmozgásra vonatkozó törvényei és végül NEWTON mozgástörvényei, optikája és az általános gravitáció felfedezése mindmind szükségelték a matematikát, és egyben a matematikai ismeretek továbbfejlesztésének alapjává is váltak. A továbbfejlesztés munkáját rendszerint maguk a fizikusok végezték el.

A XVII. század előtti európai matematika már lerombolta a görög matematika korlátait, és azokon túllépve képes volt lényegesen új eredmények elérésére. A folytatás azonban mindig kezdet is. Erről tanúskodik a XVII. század, amely az új szemléletű célok kitűzésében gyökeres változást hozott mind a görög, mind az arab matematikához képest. Ez minden bizonnyal annak a következménye volt, hogy ebben a században megmozdult az emberi gondolkodás teljes világa. A középkori ideáloktól elfordulva, új eszméket kellett találnia az értelmes és tartalmas életre törekvő embernek. A helyhez kötött földművelés mellett mindinkább fontossá vált a mozgékony ipar és kereskedelem. A statikus jellegű reneszánszt felváltotta a mozgalmas barokk. GALILEI, KOPERNIKUSZ és KEPLER megalapozták a földi és az égi mechanikát. Elterjedtek az emberi erőt kímélő gépek. A legkiválóbb tudósok a teremtett világot is gépnek tekintették: az órásmester ügyes keze nyomán életre kelt tökéletes óraműnek. A mozgás az emberi gondolkodás centrumába került, különösen akkor, amikor NEWTON megmutatta, hogy GALILEI földi és KEPLER égi mozgásait közös erőtörvények irányítják mind a Földön, mint az égben.

TÁRGYALÁSMÓDOT VÁLTOZTATUNK

A XVII. században a matematika négy nagy területén indult meg hatalmas méretű fejlődés. Ezek: a projektív geometria, az analitikus geometria, a matematikai analízis és a számelmélet.

Mindegyik gyökerei visszanyúlnak az ókorba. A matematika több ágra szakadásával együtt járt, hogy egy-egy matematikus nem csupán egyetlen területét művelte. Ezért a továbbiakban célszerűnek látszik, hogy további mondanivalóinkat tárgykörök szerint csoportosítsuk. Kivételt csak azoknál a kivételesen nagy hatású matematikusoknál érdemes tenni, akiknek a neve szinte egész korszakot jelöl. Csak ilyen csoportosítással tekinthető át a matematikai gondolkozás fejlődésének egy-egy folyamata, és az ezekből összetevődő egész is csak a részek ismeretében látható világosan.

A következőkben tehát egymástól elkülönítve (már amennyire ez lehet) fogjuk áttekinteni a matematika főbb ágainak kialakulását, illetve fejlődését. Ezt pedig tesszük a következő részletezéssel:

projektív geometria,

analitikus geometria,

differenciálgeometria,

szintetikus és analitikus geometria,

az analitikus geometria és a vektorok,

a geometria axiomatikus megalapozása,

topológia,

matematikai analízis,

számelmélet,

algebra,

halmazelmélet,

valószínűségszámítás,

számítógép-tudomány.

A GEOMETRIA

A PROJEKTÍV (SZINTETIKUS) GEOMETRIA

A Menelaosz-tétel bizonyításához (258-259. oldalakon) nem véletlenül vettük elő a kettősviszony, a teljes négyszög és a perspektivitás fogalmát. Így történt ez a Papposz-tétel ismertetésénél is (282-284. oldalakon). Meg akartuk mutatni ugyanis, hogy a projektív geometria elemeit Eukleidész és Papposz matematikus kortársai már ismerték. A módszer szintetikus volt, azaz csupán geometriai fogalmakat vett igénybe, hiszen Fermat és Descartes felléptéig algebrai módszereket a geometriában nem alkalmaztak. Tehát a szintetikus geometria keretein belül születtek meg a projektív geometria alapjai. A geometria ezen ága a geometriai alakzatoknak olyan tulajdonságaival foglalkozik, amelyek centrális vetítéskor és egyenessel (síkkal) való metszéskor változatlanok maradnak. Amint Menelaosz tételének bizonyításánál láttuk, alapvetően ilyen tulajdonság az egyenesen levő pontnégyesek és a közös ponton átmenő sugárnégyesek kettősviszonya.

Ezekhez az ókori fogalmakhoz és módszerekhez nyúlt vissza a nagy francia matematikus:

Gérard Desargues (1593-1662). Lyonban született. Építész- és hadmérnök volt. 1626 és 1650 között Párizsban matematikával és fizikával foglalkozott. 1635-ben már a párizsi Akadémia tagja lett. 1639-ben jelent meg szokatlan című könyve, a Bruillon projet d’une atteinte aux événemens des rencontres d’un cone avec un plán (Javasolt kísérlettervezet arra vonatkozóan, hogy miként kell eljárni, amikor egy kúp egy síkkal találkozik).

Új nézeteket képviselt, amelyeket kortársai általában nem méltányoltak. Azzal, hogy az ókori geometria projektív elemeit

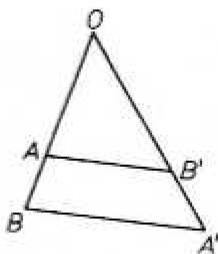
életre keltette és kibővítette, megtalálta a geometriai kutatás egyik általános módszerét, megteremtve ezzel a szintetikus geometria projektív geometriának nevezett, sok ötletet kívánó, de éppen ezért igen érdekes ágát. Bevezette az egyenes végtelen távoli pontjának és a sík végtelen távoli egyenesének a fogalmát. Velük kapcsolatban - többek között - a következő megállapításokat tette: A párhuzamos egyenesek közös síkjuknak egyik végtelen távoli pontjában metszik egymást. Azonos aszimptotájú hiperbolák végtelen távoli pontjaikban érintkeznek.

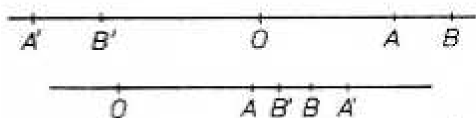
Beszélt a végtelen közeli pontokról is. A kör érintője például olyan szelő, amelynek a körrel való metszéspontjai összeesnek, és az érintő a saját érintőpontjának a polárisa. Azért, hogy a geometriába méretes vonatkozásokat is bevigyen, bevezette valamely egyenes pontpárjainak az involúcióját. A szó is tőle származik. Az egyenes *AA', BB', CC'* stb. pontjai az egyenes *O* kezdőpontjára nézve involúciós pontpárokat alkotnak, ha teljesül az

$OA*OA' = OB*OB' = OC*OC' = \ ...$

szorzategyenlőség. Ennek a feltételnek 6 pontra vonatkozó, könnyebben kezelhető alakja az

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'},$$





277. ábra

amelyet a 277. *ábra* alapján a következő átalakításokkal kaphatunk meg.

Az $OA*OA'=OB*OB'$ definiáló egyenletből:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'}.$$

A párhuzamos szelők tételének és annak megfordítása alapján, az ábra szerint:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AB'}{A'B} \quad \Big| \cdot \frac{OB}{OA'}$$

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB'}{A'B}\cdot\frac{OB}{OA'} \qquad (*)$$

Az alapösszefüggésből származó $OA' : OB'=OB : OA$ aránypár átalakításával: $(OA'—OB') : OB' = (OB—OA) : OA$, azaz $A'B' : OB' = AB : OA$.

Ebből $OA : OB'=AB : A'B'$.

Mivel azonban $OA : OB' = OB : OA'$, azért:

$$\frac{OB}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Írjuk ezt be a csillaggal jelölt egyenlőségbe! Ekkor:

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB\cdot AB'}{A'B\cdot A'B'}. \qquad (**)$$

Ha most az involúciót meghatározó egyenlőségsorozatból az *OA*OA'=OC*OC'* részt ragadjuk ki, akkor teljesen hasonló módon juthatunk el az

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

megállapításhoz. A két utóbbi egyenletet összehasonlítva, valóban:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'}=\frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'},$$

Érdemes ezt az összefüggést átfogalmazni még az

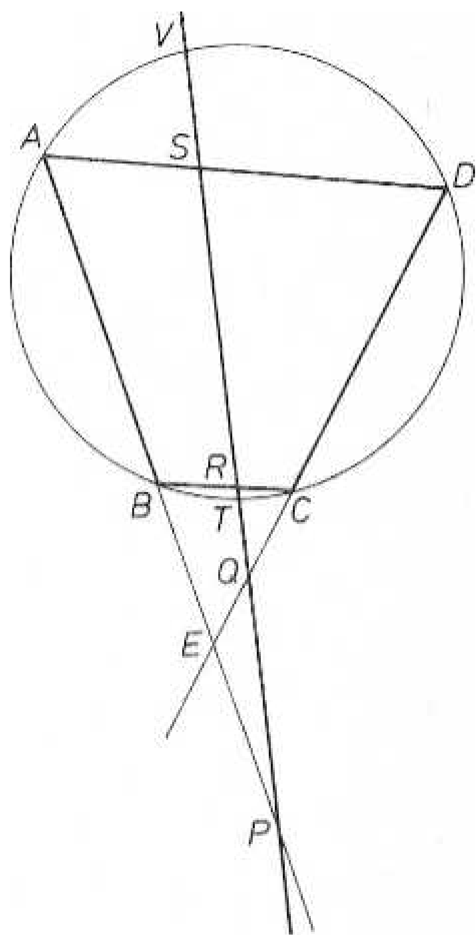
$$\frac{AB}{BA'}:\frac{AC}{CA'}=\frac{AC'}{C'A'}:\frac{AB'}{B'A'}$$

alakba, mert ekkor felismerhetjük az *(AA'BC)=(AA'C'B')* kettősviszony-egyenlőséget. Ha tehát az *AA', BB'* és *CC'* pontpárok involúciót alkotnak, akkor az iménti kettősviszonyok egyenlők. Mivel pedig a következtetésnél alkalmazott műveletek egyértelműen megfordíthatók, azért a jelzett kettősviszonyok egyenlőségéből a három pontpár involúciója is következik. Minthogy pedig a kettősviszony a centrális vetítésre és az egyenessel való metszésre nézve állandó, azért e műveletek az involúciót is változatlanul hagyják, vagyis az involúció projektív tulajdonság. DESARGUES tehát vigyázott arra, hogy az általa bevezetett involúció fogalma összhangban legyen az EUKLEODÉSZnél szereplő kettősviszony fogalmával.

Azt is megjegyezte még, hogy az *O* centrum lehet az egyenes végtelen távoli pontja is, és ekkor *OA* : *OA'*= 1, tehát ekkor a kétcsillagos összefüggés átmegy az

egyenlőségbe.

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = 1$$



278. ábra

Igen jellemző Desargues gondolkodására, hogy rendszerint először valamely speciális esetet igazolt, és abból általánosított. Erre szeretnék egy példát bemutatni. A példaként bizonyítandó speciális tétel az, hogy ha egy körbe írt négyszögnek mind a négy oldalegyenesét egy ötödik egyenessel metsszük, akkor a metsző egyenesen levő 4 metszéspont, valamint a körrel közös két pont involúciót alkotnak. A tételt a *278. ábra* szemlélteti, amelyen tehát

az *RS, TV és PQ* pontpárok involúcióját szeretnénk kimutatni.

A bizonyításhoz Desargues felhasználta a pont körre vonatkozó hatványát. A *Q* pontra igaz, hogy: *QT • QV = QC • QD,* a *P* pontra pedig: *PT*PV = PB*PA,* tehát

$$\frac{QT \cdot QV}{\cdot PV} = \frac{QC \cdot QD}{PB \cdot PA} = \frac{QC \cdot QD}{EC \cdot ED} \cdot \frac{EC \cdot ED}{PB \cdot PA} = \frac{QC \cdot QD}{EC \cdot ED} \cdot \frac{EB \cdot EA}{PB \cdot PA}.$$

MENELAOSZ TÉTELE (258. OLDAL) ALAPJÁN A *BEC* háromszögre és *RP* szelőjére vonatkoztatva:

$$\frac{QC}{EC} \cdot \frac{EB}{PB} = \frac{QR}{PR}.$$

Ha pedig a tételt az *AED* háromszögre és *VP* szelőjére vonatkoztatjuk, akkor:

$$\frac{QD}{ED} \cdot \frac{EA}{PA} = \frac{QS}{PS}.$$

E két utóbbi egyenlőséget figyelembe véve:

$$\frac{QT}{PT} \cdot \frac{QV}{PV} = \frac{QR}{PR} \cdot \frac{QS}{PS} \quad \text{vagy} \quad \frac{QT}{TP} : \frac{QS}{SP} = \frac{QR}{RP} : \frac{QV}{VP},$$

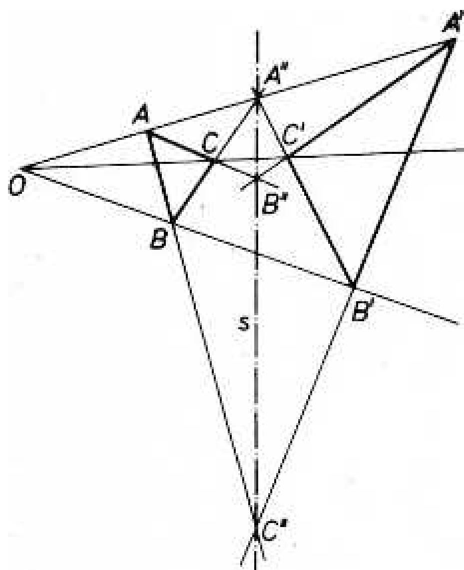
azaz *(QPTS) = (QPRV),*

tehát a *Q, P,* a *T, V* és az S, *R* pontpárok valóban involúciót alkotnak.

Ezután Desargues a bizonyított tételt általánosította. Megállapította, hogy ha a kör helyett valamilyen kúpszeletbe rajzoljuk a húrnégyszöget, és annak négy oldalegyenesét egy ötödikkel metsszük, amely a kúpszeletből is kivág két pontot, akkor a létrejött

hat metszéspont involúciót képez, mert az ilyen alakzat egy megfelelő síkra való vetítéssel a már tárgyalt speciális alakzattá alakítható, a vetítés pedig az involúciót változatlanul hagyja.

Hasonló módon járt el Desargues számos olyan tételnél, amely a pólusra, polárisra, konjugált átmérőkre vagy a kúpszeletek más tulajdonságára vonatkozik.



279. ábra

Számos kis írása közül kiemelendő az 1648-ban megjelent, amely a perspektivitás elméletét alapozta meg. A perspektivitás fogalmával már megismerkedtünk Papposz tételének bizonyításakor (282-284. oldalakon). Az említett tanulmány három tételt tartalmaz. Az első szerint a perspektív háromszögek megfelelő oldalainak egyenesei egy-egy pontban metszik egymást, és ez a három metszéspont egy egyenesre illeszkedik. Általában ezt ismerik Desargues-tétel néven. A másik tétel a perspektív teljes négyszögekre vonatkozik, a harmadik pedig egy négyszög oldalegyenesein kiválasztott pontnégyesekre. Amint később Poncelet és Staudt kimutatták, ezek a tételek a projektív geometria alapjainak bizonyultak. Ízelítőül kísérjük végig az első tétel bizonyítását.

Az *O* centrumból vetítsük az *ABC* háromszög csúcsait a *279. ábra*

szerint. Így nyerjük az *A'B'C'* háromszöget. A három csúcspont vetítési aránya általában különböző, tehát a két háromszög általánosságban nem hasonló (perspektív háromszögek). A megfelelő oldalak egyeneseinek metszéspontjai az *A" , B”* és *C"* . Tekintsük az ábrát térbelinek, azaz olyannak, amelyen az *ABCO* és az *A'B'C'O,* közös *O* csúcsú tetraéderek láthatók. Keressük meg a két tetraéder *ABC* és *A'B'C'* síkjának közös egyenesét. Az *AB* és *A'B'* szakaszok az *OA'B'* síkban vannak és nem párhuzamosak, azért metszik egymást a *C”* pontban (ha párhuzamosak, akkor a végtelen távoli pontban). Hasonlóan a *BC* és *B'C'* szakaszok síkja is közös, tehát találkoznak az *A*" pontban. Ugyanígy, az azonos síkú *CA* és *C'A'* szakaszok metszik egymást a *B"* pontban. Az *A*", *B"* és *C"* pontok az *ABC* és *A'B'C'* síkok közös pontjai, tehát a két sík közös *s* egyenesén, azaz egyazon egyenesen vannak.

A tétel megfordítása a *279. ábra* alakzatának egy érdekes tulajdonsága alapján igazolható, ugyanis az alakzat minden pontjára nézve szimmetrikus, olyan vonatkozásban, hogy bármely pontja tekinthető a perspektivitás centrumának. Például: Ha centrumnak tekintjük a *C"* pontot, akkor a két perspektív háromszög az *A ”BB'* és a *B" AA'.*

DESARGUES TÖREKVÉSEI, AMELYEK A PERSPEKTÍVAELMÉLETET, AZAZ A PROJEKTÍV TRANSZFORMÁCIÓK EGYIK FAJTÁJÁT TETTÉK A GEOMETRIAI KUTATÁSOK ALAPJÁVÁ, NEM TALÁLTAK ÁLTALÁNOS MEGÉRTÉSRE. ENNEK EGYIK OKA VOLT DESARGUES-NAK A MATEMATIKUSOK SZÁMÁRA SZOKATLAN NYELVEZETE. A MÁSIK OK PEDIG AZ, HOGY MŰVEIT NEM ÁRUSÍTOTTA, HANEM CSAK BARÁTAINAK KÜLDÖZGETTE SZÉT. GYAKORLATILAG KÖNYVEI HOSSZÚ IDŐRE ELVESZTEK. CSAK 1847-BEN TALÁLTAK RÁ EGY PÁRIZSI KÖNYVTÁRBAN A *Bruillon projet* egy kéziratos példányára, amelyet a szerző egyik nagy tisztelője Philippe de Lahire (1640-1718) a Collége de France építészprofesszora másolt le, aki maga is foglalkozott a kúpszeletekkel, és az analitikus geometriában js szerzett érdemeket. Ezek ellenére a kortársak között mégis akadt DESARGUES-nak egy igen eredményes követője:

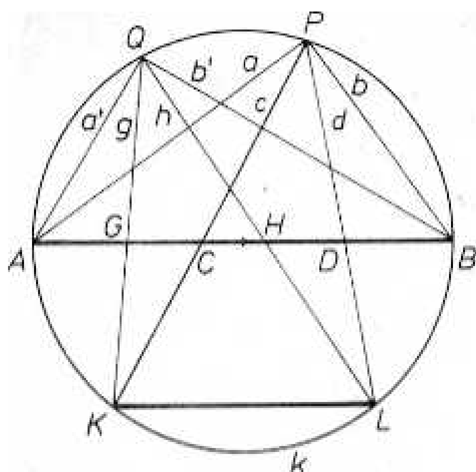
BLAISE PASCAL (1623-1662), A KIVÁLÓ FRANCIA MATEMATIKUS, FIZIKUS ÉS FILOZÓFUS. SZÜLŐHELYE CLERMONT-FERRAND, AHOL MATEMATIKUS HAJLANDÓSÁGÚ APJA TÖRVÉNYSZÉKI ELNÖK VOLT.

A 14 éves Blaise apjával együtt eljárt a Mersenne körül csoportosult természettudományos körbe, amelyből 1666-ban kinőtt a Párizsi Tudományos Akadémia. Itt ismerkedett meg Desargues eszméivel. Ezek hatása alatt jelent meg 16 éves korában, tehát 1640-ben a néhány oldalnyi *Essay pour les coniques* (Tanulmány a kúpszeletekről) című első műve. Ez a Pascal-tételt tartalmazó 6 oldal kitörölhetetlen nyomot hagyott a matematika, közelebbről a projektív geometria történetében. A tétel azt mondja ki, hogy egy kúpszeletbe rajzolt húrhatszög szembeni oldalainak egyenesei egy-egy pontban metszik egymást, és e három metszéspont mindig egyazon egyenesen van. Pascal is - Desargues példájára - először körre igazolta tételét, azután centrális vetítéssel általánosította kúpszeletekre. Későbben Pascal kidolgozta tételének számos következményét is, és néhány azon alapuló szerkesztési eljárást is bemutatott. Annak ellenére, hogy ilyen tárgyú munkássága a projektív geometria fejlődését jelentősen előbbre vitte, nem maradt meg ezen a területen. Ide-oda csapongva fordult a legkülönbözőbb tárgykörök felé: számológépet szerkesztett, hidrosztatikával foglalkozott (hidrosztatikai paradoxon), aztán ismét a kúpszeletek érdekelték, majd a binomiális együtthatókat foglalta „Pascal-háromszögbe", lényegesen hozzájárult az analízis kibontakozásához, úttörő szerepe volt a valószínűségszámításban, kidolgozta a teljes indukcióval való bizonyítás módszerét. Ez a nagyon tehetséges „amatőr" matematikus 1654. november 23-án éjjel vallási eksztázisba esett, amelynek következményeként felhagyott a tudományok hívságos művelésével. Csak 1658-1659-ben tért vissza kis időre a matematikához, amikor egy este fogfájása miatt elkerülte az álom. Ekkor a cikloiddal kezdett foglalkozni, és csodák csodájára fájdalmai megszűntek. Ezt isteni jelnek vette, amely azt adta tudtára, hogy a matematikai kutatás Istennek tetsző foglalatosság.

Úgy látszik, hogy a projektív geometria Desargues és Pascal korában még nem volt egészen időszerű, mert a XVIII. század végéig nem akadt eredményes művelője. Pascal projektív geometriai munkáinak is java része elveszett. Utána 100 éven át alig-alig bukkantak fel projektív geometriai eredmények. Említsük meg ezek közül kora legnagyobb francia matematikusának, FERMAT-nak egyik tételét. Fermat tervbe vette Eukleidész *Poriszmata* című munkájának

rekonstruálását, amelyet - nála nagyobb sikerrel - a francia Michel Chasles (1793-1880) is megkísérelt 1837-ben. Szerette volna kibővíteni, és a körökre vonatkozó tételeket a kúpszeletekre általánosítani. Sajnos ebből a tervezett műből csak 5 tétel ismeretes. Ezek egyike:

Adott a *k* körben a *KL* húr és a vele párhuzamos *AB* átmérő *(280. ábra).* Húzzuk meg a *K* és *L* pontokat nem tartalmazó *AB* félkörív tetszőleges *P* pontjából a $KP=c$ és az $LP=d$ húrokat. Ezek az átmérőt metszik a C, illetve a *D* pontban. Bizonyítandó, hogy az *AC*DB* és az *AD*CB* szorzatok hányadosa a *P* ponttól független állandó!



280. ábra

Az igazoláshoz rajzoljuk meg a $PA = a$ *é*s a $PB=b$ húrokat, valamint a körív egy másik tetszőleges *Q* pontjából a *P* ponthoz tartozó *a, b, c, d* sugársornak megfelelő *a', b', g, h* sugársort! Vegyük ezután észre, hogy az említett hányados:

$$\frac{AC \cdot DB}{AD \cdot CB}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=(ABCD),$$

ahol (*ABCD)* a zárójelben szereplő négy pont kettősviszonya, amelyről a 258-259. oldalakon megmutattuk, hogy

projiciálásnál (vetítésnél) vagy egyenessel való metszésnél nem változik. Az ábráról leolvasható, hogy ha az *A, C, D, B* pontokat vetítjük a *P* pontbeli a, *c, d, b* sugarakkal, majd e sugársort összehasonlítjuk a *Q* pontból induló *a', g, h, b'* sugársorral, amelyet végül is metszünk az *AB* átmérő egyenesével, akkor:

$(ABCD) = (abcd) = (a'b'gh) = (ABGH)$.

Azt, hogy $(abcd) = (a'b'gh)$, beláthatjuk, ha megfigyeljük a következő szögegyenlőségeket:

$$(a, c)\sphericalangle = (a', g)\sphericalangle, \quad (b, c)\sphericalangle = (b', g)\sphericalangle,$$
$$(a, d)\sphericalangle = (a', h)\sphericalangle, \quad (b, d)\sphericalangle = (b', h)\sphericalangle,$$

mert páronként ugyanazon körívhez tartozó, azonos fajú kerületi szögek. Így

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = \frac{\sin(a'g)}{\sin(gb')} : \frac{\sin(a'h)}{\sin(hb')} = (a'b'gh).$$

Azért, hogy a XIX. században folytatódjék a projektív és vele együtt a szintetikus geometria fejlődése, sokat tett Gaspard Monge (1746—1818), kiváló francia matematikus. A Dijontól délre eső Beaune városkában született, szegény kereskedőszülőktől. A francia forradalom után tengerészeti miniszter és hadügyi szervező volt. Részt vett az új mértékegység-rendszer kidolgozásában. A méziéres-i katonai iskola tanáraként (1768—1789) tanított matematikát, fizikát és erődítéstant. Ekkor alapozta meg az ábrázoló geometriát, a projektív geometria új ágaként. Az akkori előadásait foglalja össze az 1794—1795-ben kiadott *Géométrie descriptive* (Ábrázoló geometria) című könyve. A térgörbék és felületek tanulmányozásával megalapozta a differenciálgeometriát *(Application de l'analyse a la géométrie,* Az analízis alkalmazása a geometriában, 1804). 1794-től tanára és egyik megalapítója volt a híres párizsi École Polytechnique-nek. A projektív geometria újrafelfedezésében követte MONGE-t egyik tanítványa:

LAZARE NICOLAS CARNOT (1753-1823). A FRANCIA BURGUNDIAI NOLAY-BEN SZÜLETETT. ÁLLAMFÉRFI, A „GYŐZELEM SZERVEZŐJE" BÜSZKE CÍM VISELŐJE ÉS MATEMATIKUS VOLT. A KITÜNTETŐ CÍMET AZÉRT KAPTA, MERT A JAKOBINUSOK IDEJÉN SZÉTZÜLLÖTT HADSEREGET ÚJRA MEGSZERVEZTE, ÉS GYŐZELEMRE VEZETŐ HADITERVEKET DOLGOZOTT KI. Ő VOLT A FIZIKUS SADI CARNOT (1796-1832) APJA ÉS A KÉMIKUS ADOLPHE CARNOT (1839— 1920) NAGYAPJA. NAPÓLEON URALMA ALATT KÉT ÍZBEN IS MINISZTERSÉGET VISELT, DE A CSÁSZÁR BUKÁSA UTÁN MAGDEBURGBA MENEKÜLT, AMI A MATEMATIKÁRA NÉZVE, HASZNOS VOLT, MERT VISSZAVONULTSÁGÁBAN CSAK MATEMATIKÁVAL FOGLALKOZOTT, ÉSPEDIG EREDMÉNYESEN. KUTATÁSI TERÜLETE AZ ANALÍZIS ÉS A GEOMETRIA VOLT.

A projektív geometria további kibontakozásához nagyban hozzájárult az 1801-ben megjelent *De la correlation des figures de géométrie* (A geometriai alakzatok viszonyairól) és az 1806-ban kiadott *Essai sur le théorie des transversales* (Tanulmány a transzverzálisok elméletéről), valamint az 1803-as *Géométrie de position* (A helyzet geometriája). Mindegyikre jellemző az általánosításra való törekvés. Eukleidész legtöbb tételéről kimutatta, hogy azok átfogóbb tételek speciális esetei. Erre szép példa a koszinusztétel általánosítása. Levezette az $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ tételhez alakban teljesen hasonló

$$a^2=b^2+c^2+d^2-2cd\cos\beta-2bd\cos\gamma-2bc\cos\delta$$

képletet, amely a tetraéderre vonatkozik, és amelyben *a, b, c* és *d* az oldallapok területe, β a *c* és *d* oldalak lapszögé, γ a *b* és *d* oldalak, δ pedig a *b* és *c* oldalak lapszöge.

A transzverzálisok elméletében a Menelaosz-tételt általánosította. (257. oldal). Az ókori tétel szerint, ha az *ABC* háromszög oldalegyeneseit az *e* egyenes metszi *(281. ábra)* a *P, Q* és *R* pontban, és ha

$$AP=a',\quad BQ=b',\quad CR=c',$$
$$AR=a'',\quad BP=b'',\quad CQ=c'',$$

akkor

$a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c''$.

Carnot bebizonyította, hogy ha az *ABC* háromszög *AB* oldalegyenesét egy n-ed rendű görbe metszi a $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ pontokban, a *BC* egyenest a $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ pontokban és az *AC* egyenest az R_1 $R_2, R_3, \ldots R_n$ pontokban, valamint bevezetjük az

$$AP_1 \cdot AP_2 \cdot AP_3 \cdot \ldots \cdot AP_n = a',$$

$$BQ_1 \cdot BQ_2 \cdot BQ_3 \cdot \ldots \cdot BQ_n = b'$$

$$CR_1 \cdot CR_2 \cdot CR_3 \cdot \ldots \cdot CR_n = c',$$

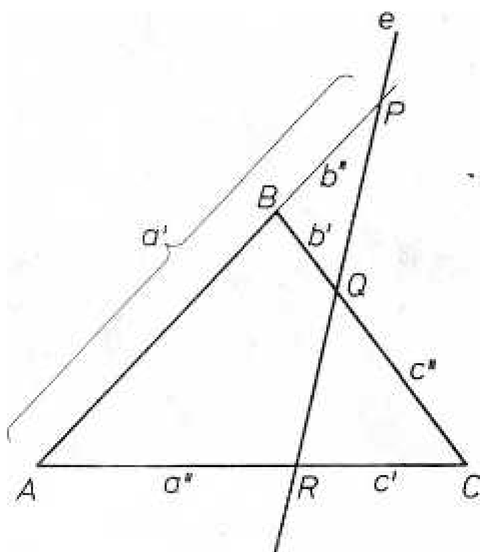
$$AR_1 \cdot AR_2 \cdot AR_3 \cdot \ldots \cdot AR_n = a'',$$

$$BP_1 \cdot BP_2 \cdot BP_3 \cdot \ldots \cdot BP_n = b'',$$

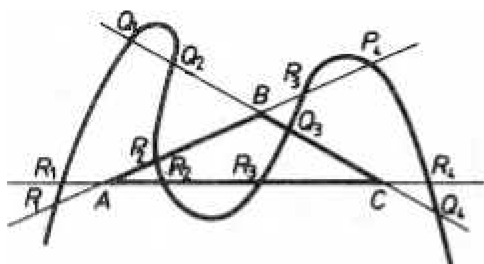
$$CQ_1 \cdot CQ_2 \cdot CQ_3 \cdot \ldots \cdot CQ_n = c''$$

jelöléseket, akkor igaz, hogy $a'b'c' = a''b''c''$ *(282. ábra).*

Monge és Carnot közvetlen hatása alatt jelent meg 1806-ban a *Journal de l'École Polytechnique* folyóiratban egy másodéves főiskolai hallgatónak az a cikke, amely ismét nagy lépéssel vitte tovább a projektív geometria ügyét. Ez a hallgató Monge tanítványa:



281. ábra



282. ábra

Charles Julien Brianchon (1783-1864) volt. Sévres-ben, Párizs elővárosában született. Tüzértiszt, majd tanár lett. 21 éves korában, amikor mintegy felelevenítette a Pascal-tételt, egy ahhoz nagyon hasonlót, a róla elnevezett Brianchon-tételt fedezte fel. Tétele szerint: egy kúpszelet köré írható érintőhatszög átellenes végpontjait összekötő átlók egy pontban metszik egymást. Amint később, a dualitás elvének felfedezése után kiderült, a Brianchon-tétel a Pascal-tétel duálja (551. oldal), tehát nem tudatosan ugyan, de Brianchon tételével a projektív geometria egy fontos és igen termékeny alapelvét demonstrálta.

Az áttekintett előzmények után következett az átfogó megalapozás, a projektív geometria egységes rendszerének a megalkotása, amely

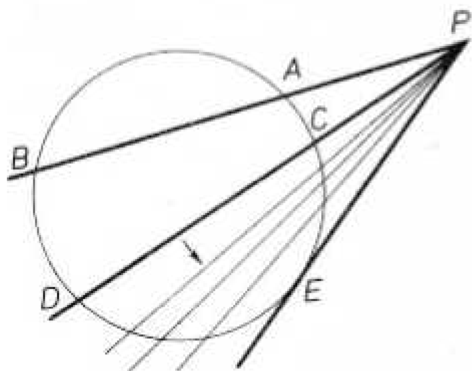
Jean-Victor Poncelet (1788-1867) francia matematikusnak, Monge tanítványának az érdeme. Metzben született, a Politechnikai Főiskolán végzett, majd 1825-től 1835-ig szülővárosában tanított, aztán magas katonai beosztásba került. 1838-tól 10 éven át a Sorbonne-on a fizika és a mechanika professzora volt, végül 1848-tól a Politechnikai Főiskola igazgatójaként működött.

32 éves korában jelent meg a *Gergonne’s Annales (Les annales de la mathématique pure et appliquée,* Tiszta és alkalmazott matematikai folyóirat) folyóiratban egy közös cikke BRIANCHONnal *Recherches sur la détermination d’une hyperbole équalitére* (Vizsgálatok egy egyenlő oldalú hiperbola meghatározásáról) címen, amelyben napvilágot látott a középiskolából ismert kilencpontú körnek, azaz a Feuerbach-körnek a leírása, amely szerint minden háromszögben a magasságok három talppontja, a 3 oldalfelező pont és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok 3 felezőpontja egy körön van. (E kört Euler 1765-ben fedezte fel.)

Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), erlangeni gimnáziumi tanár Jénában született, és fivére volt a filozófus Ludwig FeuerBACHnak. A róla elnevezett kör meghatározását az 1822-ben megjelent igen hosszú című könyvecskéje tartalmazza. E kört ugyan nem ő fedezte fel, de kis művében a kör számos új tulajdonságát mutatta ki, többek között azt, amely egyes vélemények szerint Eukleidész óta a geometria legszebb tétele, és kimondja, hogy a Feuerbach-kör érinti a háromszög oldalait belülről érintő kört és a kívülről érintő három kört is. Így a kilencpontú körre a háromszög 13 nevezetes pontja illeszkedik. Feuerbach határozta meg e kör sugarát is, és azt, hogy centruma felezőpontja az Euler-egyenes azon szakaszának, amely a magasságpont és a körülírható kör középpontja között van.

Miután FEUERBACHnak elégtételt szolgáltattunk, térjünk vissza Poncelet méltatásához. A napóleoni orosz hadjárat alatt, 1812-ben mint hadmérnök, orosz fogságba esett, és néhány évet Moszkvában

töltött. Ez alatt az idő alatt összeszedte és rendszerezte azokat az analitikus geometriai ismereteket, amelyeket a főiskolán szerzett. Ezek alapján irta meg az *Applications d'analyse et de géométrie* (Az analízis alkalmazásai a geometriában) című, kétkötetes művét. Ez azonban csak életének végén, 1862-1864-ben jelent meg. Amikor a fogságból hazatért, egy, az említett műtől merőben elütő szellemű munkával mutatkozott be: a teljesen szintetikus módszerű *Traité des propriétésprojectives des figures* (Tanulmány az alakzatok projektív tulajdonságairól) című könyvével, 1822-ben. Ebben Poncelet a projektív geometria addigi ismereteit egy jól átgondolt rendszerbe foglalta, az általa bevezetett fontos új fogalmak segítségével. Elsőként tekintette a végtelen távoli geometriai elemeket (ideális pont, ideális egyenes) a végesbeliekkel teljesen egyenértékűeknek. Bevezette a virtuális pont fogalmát. Erre ösztönzést adott az az analitikus geometriai tapasztalat, hogy például egy kör és egy egyenes metszéspontjainak a koordinátái a komplex számkörben mindig megtalálhatók. A komplex koordinátájú pontokat nevezte virtuális pontoknak.



283. ábra

Poncelet megfogalmazta - ahogyan ő nevezte - a matematikai viszonyok permanenciájának elvét, vagy ahogy másként kifejezte, a kontinuitás elvét. Ennek megértésére talán ajánlatos egy példát segítségül hívni. A *283. ábráról* leolvashatjuk az ismert törvényt: *PA * PB* = *PC * PD.* Ha most a *PCD* egyenes a *P* pont körül elkezd forogni a nyíl irányában, akkor a forgó szelő szeleteinek a szorzata továbbra is, folytonosan állandó marad, még akkor is, amikor mindkét szelet a

PE érintődarabbá válik, tehát $PA*PB=PE^2$. A kontinuitás elve tehát PONCELET-nél azt jelentette, hogy a folytonos változtatással létrehozott határhelyzetekben a határhelyzet előtti törvény értelemszerűen, külön bizonyítás nélkül is kimondható. Ezt az elvet sokan jogosulatlan indukciónak tartották (Cauchy).

Egy másik nagyon fontos törvény, amelyet 1818-ban a már említett *Gergonne's Annalesben* közölt, a dualitás elve. Ez azt mondja ki, hogy valamely síkgeometriai projektív törvény igaz marad akkor is, ha abban felcseréljük a pont és egyenes szavakat, és egyidejűleg az összekötés és metszés, illetve az ezeknek értelemszerűen megfelelő szavakat. Igaz például, hogy a kúpszelet 6 pontja által alkotott hatszög szembeni oldalainak metszéspontjai egyazon egyenesre illeszkednek. Hajtsuk végre a szócseréket! Így: A kúpszelet 6 egyenese (érintője) által alkotott hatszög szemközti szögpontjait összekötő egyenesek egyazon pontra illeszkednek. A kedves olvasó bizonyára észrevette, hogy példának a Pascal-tétel és a Brianchon-tétel dualitását hoztuk fel.

A dualitás elvének felfedezésében PONCELET-nek vetélytársa is akadt. Ugyanabban az évben közölte ezt az elvet, ugyanabban a folyóiratban

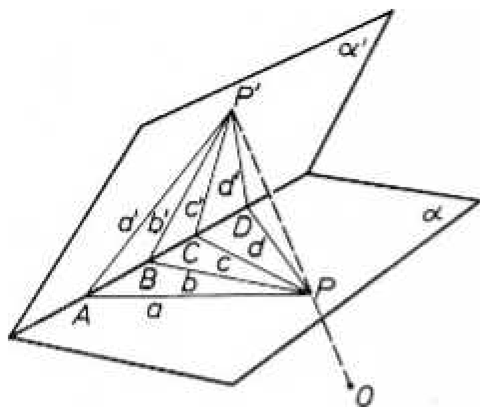
JOSEPH DIAZ GEORGONNE (1771-1859) FRANCIA CSILLAGÁSZ ÉS MATEMATIKUS IS, AKI AZ EMLÍTETT FOLYÓIRATNAK 1810 ÉS 1831 KÖZÖTT VOLT KIADÓJA. Ő A DUALITÁS ELVÉRE AZ ANALITIKUS GEOMETRIA TERÜLETÉN JÖTT RÁ. EREDMÉNYESEN DOLGOZOTT AZ ALGEBRÁBAN ÉS A KOMBINATORIKÁBAN IS. A PROJEKTÍV GEOMETRIA KÖVETKEZŐ NAGY NEVE:

JACOB STEINER (1796-1863). APJA SVÁJCI PÁSZTOR, TANÍTÓJA PESTALOZZI, A HÍRES PEDAGÓGUS VOLT. EGY IDEIG STEINER IS TANÍTOTT PESTALOZZI INTÉZETÉBEN, AZTÁN TOVÁBB FOLYTATTA EGYETEMI TANULMÁNYAIT HEIDELBERGBEN. ITT ISMERKEDETT MEG A FRANCIA GEOMETRIAI ÁRAMLATOKKAL. AZ EGYETEM UTÁN PESTALOZZI BERLINBE CSÁBÍTOTTA, AHOL KIVÁLÓ EREDMÉNNYEL TANÍTOTT ÉS KÖZBEN GEOMETRIAI KUTATÁSOKAT VÉGZETT. CIKKEI A *Crelle's Journal*ban jelentek meg. Fő munkáját 1832-ben adta ki *Systematische Entwicklung der Abhangigkeit geometrischer Gestal-len voneinander* (A geometriai alakzatok összefüggésének rendszeres kifejtése) címen, Berlinben. Fokozatosan jutott el az

elemi geometriától a projektív geometria majdnem teljesen szintetikus felépítéséhez. Rendszerében csupán egyetlen méretes fogalom volt: a kettősviszony, különben tiszta geometriai fogalmakkal építkezett.

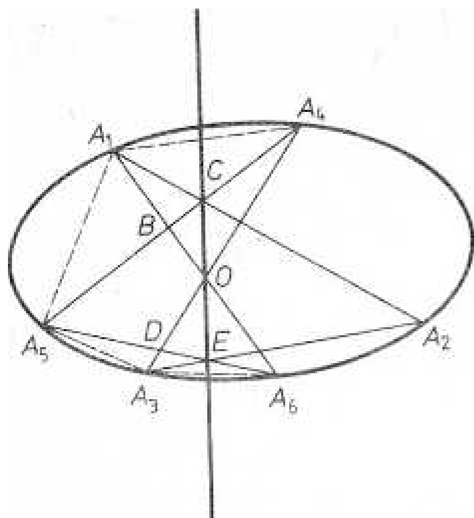
A projektív leképezést olyan geometriai transzformációnak határozta meg, amely az egyenes pontjai közötti kettősviszonyt megtartja. Egyik alapvető tétele szerint minden kúpszelet pontjai olyan, projektív viszonyban álló két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjaiként tekinthetők, amely sugársorok tartói maguk is a kúpszelet pontjai. Ez a Steiner-féle tétel tulajdonképpen általánosítása az 546. oldalon megismert Fermat-féle tételnek, amely a körre vonatkozik. Annak alapján, a *280. ábra* szerint a körnél nyilvánvaló, hogy az *a, b, c, d* sugársor, amelynek tartója a kör *P* pontja, projektív viszonyban van az *a', b',g, h* sugársorral, amelynek tartója a kör *Q* pontja, hiszen igazoltuk, hogy (*abcd)* = *(a'b'gh*). Ugyanakkor az ábra azt is mutatja, hogy a megfelelő sugarak, tehát az *a* és *a',* a *b* és *b', a c* és *g,* valamint *a d és h a* kör kerületén találkoznak. A tétel megfordítása hasonlóképpen látható be. Steiner ehhez annyit tett hozzá, hogy minden kúpszelet keletkezhet a körnek egy megfelelő síkra való centrális vetítésével, tehát ha belátjuk, hogy a körhöztartozó két projektív sugársor (most a *P és* a *Q* tartójú) a vetítés után szintén projektív marad, akkor a tétel minden kúpszeletre érvényes. A projektív viszony megmaradásáról pedig meggyőz bennünket a *284. ábra.* Ezen az α síkról vetítettük a P tartójú *a, b, c,* d sugársort az α' síkra, az *O* centrumból. Így kaptuk a *P'* tartójú *a', b', c', d'* sugársort. A már többszörösen ismertetett okok miatt: (*abcd)* = *(ABCD)* = *(a'b'c'd'),* tehát a sugársor és annak a vetülete kettős-viszonytartó, azaz projektív.

Alkalom kínálkozik most arra, hogy közbevetőleg, a Steiner-tétel segítségével igazolhassuk a Pascal-tételt, csak még vissza kell emlékeznünk arra a tételre, amelyet a Papposz-tétel bizonyításánál ismertünk meg. E szerint, ha két pontsor projektív viszonyban van és tartóegyenesük metszéspontja kettős pont, akkor a két pontsor perspektív helyzetű.



284. ábra

Tekintsük ezután a *285. ábra* ellipszisén a találomra kiválasztott 6 pontot: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. E hat pont tetszőleges sorrendben egy, a kúpszeletbe írható húrhatszöget határoz meg. Vegyük az indexek természetes sorrendjét, vagyis az ábra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ (hurkolt) húrhatszögét. Ennek átellenes oldalpárjai: A_1A_2 és A_4A_5, A_2A_3 és A_5A_6, valamint A_3A_4 és A_6A_1. A bizonyítandó Pascal-tétel azt állítja, hogy e párok metszéspontjai egyazon egyenesre illeszkednek.



285. ábra

Vegyük észre az A_1 tartójú A_1A_5, A_1A_6, A_1A_2, A_1A_4 sugársort, továbbá az A_3 tartójú A_3A_5, A_3A_6, A_3A_2, A_3A_4 sugársort! Az első segédtételünk megfordítása szerint e két sugársor projektív. Ezért projektív az A_5, B, C, A_4 és az A_5, A_6, E, D pontsor is, mert az elsőt az A_5A_4 egyenesből az A_1 tartójú sugársor metszi ki, a másodikat pedig az A_5A_6 egyenesből az előbbi sugársornak megfelelő A_3 tartójú sugárnégyes vágja ki. E két projektív pontsor tartóegyenesseinek - A_5A_4-nek és A_5A_6-nak - az A_5 metszéspontja kettős pont, tehát e két pontsor perspektív helyzetű. A perspektivitásban megfelelő pontokat összekötő egyenesek pedig a perspektivitás centrumán mennek át, tehát a BA_6, a CE és az A_4D szakaszok egy pontban, a perspektivitás centrumában találkoznak. Ez azt is jelenti, hogy a C, az O és az E pontok, vagyis a hatszög átellenes oldalainak a metszéspontjai egy egyenesre esnek.

A dualitás elve alapján ebből kimondható a Brianchon-tétel is (550. oldal). Érdemes azt is észrevenni, hogy Pascal tétele valójában a Papposz-tétel általánosítása. A Papposz-tétel két egyenes 3-3 pontjára, a Pascal-tétel pedig egy kúpszelet 3-3 pontjára vonatkozik.

STEINER NEVE SZÁMOS GEOMETRIAI FOGALOMMAL ÉS TÉTELLEL KAPCSOLATOS. A PROJEKTÍV GEOMETRIÁN BELÜL JELENTŐS ÚJ ÖSSZEFÜGGÉSEKET FELTÁRÓ ÉS SZÁMOS ALKALMAZÁST TALÁLÓ ÚJ GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓT VEZETETT BE 1824-BEN, AZ INVERZIÓT. Az O centrumú, r sugarú körre nézve a P pont inverz képe az a P' pont, amelyre igaz, hogy

$$OP*OP'=r^2.$$

Ez a transzformáció tehát a síknak az adott körön kívüli pontjait képezi le a körön belüli pontokra, és (a kör centrumát kivéve) viszont. Az inverzióra vonatkozó gondolatait STEINER nem publikálta, és így másoknak is alkalmat adott ennek a leképezésnek a felfedezésére (például Lord KELVINnek 1845-ben).

Olyan derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek origója az inverzió r sugarú körének a centruma, a $P(x;y)$ pontnak és a $P'(x';y')$ képpontnak a koordinátáit az

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$$

transzformációs képletek kapcsolják össze. Ezt a leképezést általá

nosította Luigi Cremona (1830-1903) bolognai, milánói, majd római professzor úgy, hogy a pontnak és képének koordinátáit az

$x' = R_1(x;y)$ és $y' = R_2(x; y)$

racionális algebrai függvények rendelik egymáshoz. Ezeknek az 1863-ban közölt Cremona-féle transzformációknak az inverzió speciális esete.

A projektív geometriában, egyszersmind a szerkeszthetőség elméletében fontos STEINERnek az a bizonyítása, amellyel igazolta, hogy minden euklideszi szerkesztés elvégezhető vonalzó és egyetlen fix kör segítségével. Az ilyen szerkesztések egyenértékűek az első- és másodfokú algebrai egyenletek megoldásával. Az így egyszerűsített euklideszi szerkesztésekre vonatkozó eredményeit adta közre 1833-ban, Berlinben *Die geometrische Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises* (Geometriai szerkesztések egyenes vonalzó és egy rögzített kör segítségével) címen.

A szerkeszthetőség e tételét már 1822-ben bizonyítás nélkül Poncelet is kimondta. Poncelet érdeklődését Lorenzo Mascheroni (1750-1800) paviai olasz professzor 1792-ben megírt munkája ébresztette fel, amelyben azt olvasta, hogy az euklideszi szerkesztések csupán körző használatával is végrehajthatók, ha valamely egyenest megszerkesztettnek tekintünk két pontjának ismeretében. 1928-ban viszont egy koppenhágai könyvtárban megtalálták Georg Mohr (1640-1697) dán geométernek 1672-ben kiadott *Euclides danicus* (A dán Eukleidész) című, elfelejtett könyvét, amelyben Mascheroni előtt 125 évvel már a szerkeszthetőség e tételét bebizonyította.

Ugyancsak Steiner szép eredményei közé tartoznak azok a tisztán geometriai eszközökkel megoldott szélsőérték-feladatok, amelyek 1842-ben jelentek meg *A síkidomok legnagyobb és legkisebb értékeiről*

és a gömbről címen. Ebben először adott szabatos bizonyítást arra, hogy az egyenlő kerületű síkidomok közül a kör a legnagyobb területű, és hogy az egyenlő területű síkidomok közül a kör a legkisebb kerületű. Ennek az igazolása és még néhány Steiner-féle szélsőérték-feladat ismertetése megtalálható Heinrich Dörrie: *A diadalmas matematika* című, a Gondolat kiadásában 1965-ben megjelent könyvében.

Steiner mellett csak a másodhegedűs szerepével kellett megelégednie

Michel Chasles (1793-1880) francia matematikusnak. Épernay-ben született, a Politechnikai Főiskolán végzett. 1846-tól a Sorbonne professzora volt. Matematikatörténettel is foglalkozott, amiről tanúskodik az 1837-ben megjelent *Apercu historique sur l'origine et de développement des méthodes en géométrie* (A geometriai módszerek eredetének és fejlődésének történeti áttekintése) című könyve. Ebben számos olyan projektív geometriai eredményt sorol fel, amelyet már az ógörög matematikusok ismertek. A matematikatörténet iránti érdeklődése egy ízben igen kínos helyzetbe sodorta. Egy ismeretlentől megvette PASCALnak egy nem publikált levélköte-gét, amelyből kitűnt, hogy Newton sok jelentős eredményére Pascal már előbb rájött. Chasles sokat idézett ezekből a levelekből, sőt megkezdte közlésüket a párizsi Akadémia hivatalos lapjában, a Comptes Rendus-ben. A tudományos körök hatalmas meglepetése azonban csak addig tartott, amíg a komoly szakértői vizsgálat ki nem mutatta, hogy a PASCALnak tulajdonított levelek mindegyike ügyes hamisítvány.

Chasles minden bizonnyal teljesen önállóan a STEINERéhez hasonló geometriai rendszert épített ki. Ő is a kettősviszonynak a projektív műveletekkel szembeni állandóságát vette alapul. Tökéletesítésnek számít, hogy a szakaszok irányítottságát előjellel fejezte ki. A kúpszeletekre vonatkozó tételei szintén nagyon hasonlók a Steiner-féle kúpszeleti tételekhez. A geometriai munkásságát összefoglaló könyve 1852-ben jelent meg *Traité de la Géométrie superieure* (Értekezés a magasabb geometria köréből) címmel Párizsban.

Ahhoz, hogy Chasles, illetve Steiner vagy Poncelet projektív geometriája teljesen szintetikus legyen, csak egyetlen problémát kellett még megoldani. A projektív geometriának éppen az alapfogalma, amelyre az egész rendszer épült - azaz a kettősviszony invarianciája, vagy az ún. projektív koordináták bevezetése is -, két pont távolságára támaszkodott. E távolság meghatározása viszont a Descartes-féle koordinátákkal történik. Ez a méretes adat tehát analitikus geometriai. A tiszta szintetikus felépítésnél ez nem engedhető meg. Ennek az egyetlen analitikus geometriai elemnek a kiküszöbölését

CHRISTIAN VON STAUDT (1798-1867), A ROTHENBURGI SZÜLETÉSŰ NÉMET MATEMATIKAPROFESSZOR OLDOTTA MEG. GAUSS TANÍTVÁNYA VOLT. ELŐSZÖR A WÜRZBURGI EGYETEMEN, AZTÁN A NÜRNBERGI POLITECHNIKUMBAN, MAJD 1835-TŐL ÉLETE VÉGÉIG AZ ERLANGENI EGYETEMEN TANÍTOTT. ERLANGEN-BEN ÍRTA ÉS NÜRNBERGBEN ADTA KI 1847-BEN A *Geometrie der Lage* (A helyzet geometriája) című könyvét. Ebben és ennek kiegészítéseiben STAUDTnak sikerült kiküszöbölnie a projektív geometriából az egyetlen nem tisztán geometriai elemet azáltal, hogy a kettősviszony helyett bevezette annak egy speciális, megszerkeszthető alakját: a harmonikus pontnégyes, illetve a harmonikus sugárnégyes fogalmát. Ennek szerkesztése a teljes négyszög, illetve a teljes négyoldal segítségével már végrehajtható. Projektív leképezésnél tehát a harmonikus pontnégyesek (sugárnégyesek) képe is harmonikus kell hogy maradjon. Később bevezette a kollineáció és a korreláció fogalmát. A kollineáció a projektív leképezésnek az a jellemző tulajdonsága, hogy pont képe pont, egyenes képe ismét egyenes és sík képe sík. A korreláció a duálelemek kölcsönös egymáshoz rendelése. Amint már láttuk: a projektív síkban a duális elemek a pont és az egyenes, a projektív térben pedig a pont és a sík.

Mindezeken túl STAUDTnak sikerült tisztán projektív úton projektív koordinátákat is bevezetnie. Ezt úgy érte el, hogy az aritmetikai műveleteknek projektív műveleteket feleltetett meg. Ha ugyanis egy egyenes tetszőleges három pontjához hozzárendelte a 0 és az 1 számot, valamint a ∞ szimbólumot, akkor ezen az egyenesen meg tudta szerkeszteni az a racionális számot, továbbá az a és b racionális számoknak megfelelő pontokhoz megszerkesztette az a

$+b$, az *a—b, az a*b* és az *a/b* számoknak megfelelő pontokat. Erre alapozva, a sík pontjaihoz is tudott koordinátákat rendelni. Kimutatta, hogy ehhez elég megadni egy háromszög szögpontjait: A_1-*et,* A_2-*t* és A_3-at, valamint a háromszög egyik oldalára sem illeszkedő *A* pontot. A háromszög egyik szögpontjához, például az A_1-hez hozzárendelte a 0-t, a másikhoz, például az A_2-höz a ∞-t. Az AA_3 egyenesnek és az A_1A_2 egyenesnek a metszéspontját l-gyel jelölte. Ennek a rendszernek a segítségével a sík minden pontjához tudott projektív műveletekkel számot rendelni. Hasonlóképpen történt ez a térben is, csak ott az alapháromszög szerepét egy tetraéder vette át. Ilyen módon metrikus fogalmak nélkül tudta meghatározni a pontok projektív koordinátáit.

Staudt még azt is megmutatta, hogy a projektív geometriába bevezetett képzetes pontok fogalma is megalapozható csupán projektív módszerekkel. Rendszerének azt a hiányosságát, hogy az irracionális számok és a pontok egymáshoz rendelését nem kellő szabatossággal határozta meg, Felix Klein (1849-1925) szüntette meg az *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (Az úgynevezett nemeuklideszi geometriáról) című értekezésében, 1871-1872-ben.

A projektív geometria legnagyobb angol képviselője:

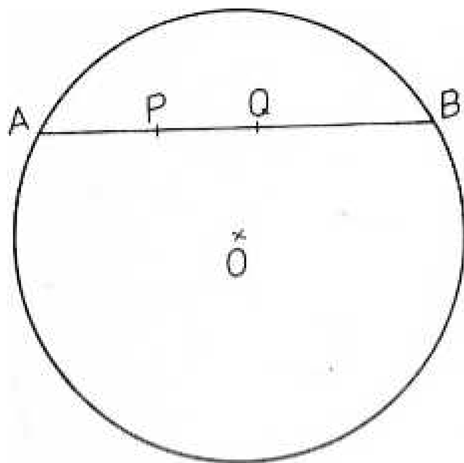
Arthur Cayley (1821-1895), a richmondi születésű matematikus volt. Az egyetemet Cambridge-ben végezte el a jogi karon, ahol - 20 évi ügyvédeskedés után - 1863-tól a matematika professzora lett. A munkásságát átfogó 13 kötetes kiadás igen sokrétű érdeklődésről tanúskodik. Az algebrai geometriában megadta a geometriai értelmezését az első- és a másodfokú *n* ismeretlenű egyenletrendszernek. Foglalkozott differenciálegyenletekkel, elliptikus függvényekkel ; megteremtette a mátrixok algebráját; bevezette az absztrakt csoport fogalmát stb.

A projektív geometriának azt az ágát művelte, amely nem tisztán szintetikus, hanem analitikus módszereket is használ. Algebrai úton határozott meg egy projektív metrikát, amelynek alapján szoros kapcsolat létesült a projektív geometria és a metrikus geometria között. Ebből kiindulva, Klein továbbfejlesztette Cayley

gondolatait, és teljes megfeleltetést (izomorfiát) mutatott ki a sík euklideszi projektív geometriája és a Bolyai-Lobacsevszkij-féle nemeuklideszi síkgeometriák között. Ez fontos bizonyítéka a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria ellentmondásmentességének, legalábbis annyira, amennyire az euklideszi geometria az.

Klein meglepő ötlete Cayley egy szellemes távolságdefiníciójára épült. Tekintsük ugyanis a *286. ábra k* körének belső pontjait. Ezek közül való a tetszőleges P és *Q* pont. E két pont távolságát a kör belsejében Cayley a

$$d(P, Q) = -\frac{1}{2}\log(ABPQ)$$



286. ábra

egyenlőséggel definiálta. Belátható, hogy ez a meghatározás kielégíti azokat a követelményeket, amelyeket a „távolság” fogalmával szemben támasztunk:

Tekintve, hogy a P és a *Q* pontoknak az ábrán látható elhelyezésekor

$$\frac{AQ}{QB} > \frac{AP}{PB}, \quad \text{azért az } (ABPQ) = \frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} < 1.$$

Így tehát biztos, hogy a távolság *d(P, Q)* mérőszáma mindig pozitívnak adódik.

Ha a *P* és a *Q* pont egybeesik, akkor az $(ABPQ) = (ABPP) = 1$ miatt $d(P, Q) = 0$. Tehát az egybeeső pontok távolsága nulla.

Végül kell, hogy a $PQ + QR = PR$ legyen. Ez is teljesül, hiszen:

$$\begin{aligned} d(P,Q)+d(Q,R) &= -\frac{1}{2}\log(ABPQ) - \frac{1}{2}\log(ABQR) = \\ &= -\frac{1}{2}\log[(ABPQ)\cdot(ABQR)] = \\ &= -\frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{AP}{PB}:\frac{AQ}{QB}\right)\cdot\left(\frac{AQ}{QB}:\frac{AR}{RB}\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{AP}{PB}:\frac{AR}{RB}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\log(ABPR) = d(P,R). \end{aligned}$$

Ezt a kör (ellipszis) belső pontjaira vonatkozó távolságdefiníciót Klein két „szomszédos” pontra alkalmazta, és így sikerült az ívelem olyan meghatározásához jutnia, amelyhez más úton Bolyai és Lobacsevszkij is eljutott. Végül is azt a nagyszerű eredményt kapta, hogy az általános projektív geometria speciális eseteként jön létre az euklideszi, illetve a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria, tanúsítva a két geometria teljes egyenjogúságát. Az érdeklődők a Klein-féle ívelem kiszámítását elolvashatják LÁNCZOS KORNÉL *A geometriai térfogalom fejlődése* című, 1976-ban megjelent könyvében is. CAYLEY projektív metrikáját 1859-ben ismertette az *A sixth memoir upon quantics* (Hatodik memoár a formákról) című tanulmányában.

Steiner és Staudt munkássága nyomán továbbhaladva a XX. század elején megszületett a projektív geometria szabatos axiomatikus felépítése is.

AZ ANALITIKUS GEOMETRIA FEJLŐDÉSE

A XVII. század nagy vívmánya a mozgás matematikájának a megszületése: a matematikai analízis alapjainak a lefektetése, amely a köztudatban Newton és Leibniz nevével kapcsolódik szorosan. Az első nagy eredmények neves alkotóit azonban mindig megelőzik a sokszor kevésbé neves, de mindig sokra becsülendő elődök, akik nélkül nem, vagy csak később érlelődtek volna meg a tudományos világ figyelmét igazán felkeltő alkotások. Ezért is tiszteljük a világosan látó és éppen ezért szerény NEWTONnak azt a mondását, hogy az ő dolga könnyű volt, hiszen óriások vállán állt. Newton ismerte az analíziseszme hordozóinak hosszú sorát: Eudoxoszt, Arkhimédészt, CAVALIERIt, PASCALt, FERMAT-t, WALLISt, BARROW-t és másokat. Tisztában volt azzal is, hogy a végső kibontakozás nem lehetséges a megfelelő forma, a szükséges kifejezési eszköz megteremtése nélkül, tehát értékelte Diophantosz, Ptolemaiosz, Oresme, Chuquet, Stifel, Napier, Viéte és Descartes munkáját, hogy a szükséges előfeltételek megteremtői közül csak néhányat említsünk.

A nélkülözhetetlen előzményekből tekintsük át először az analitikus vagy koordinátageometria fejlődésének történetét. Bizonyára emlékszünk, hogy e téren a kezdetet nem Descartes jelenti, hanem Apollóniosz (217. oldal), aki ha nem is vezette be a koordinátarendszer fogalmát, de azzal, hogy a valamely kúpszelet definiálására alkalmas alaptulajdonságot következetesen két konjugált átmérő egyenesére vonatkoztatta, és az így nyert összefüggésből új tulajdonságokra következtetett, valójában ferdeszögű koordináta-rendszerben gondolkodott. A koordináták gyakorlati alkalmazása, szélesség és hosszúság elnevezéssel, a földrajzi helyek meghatározásának kézenfekvő eszköze volt már a ptolemaioszi *Geographiá*nak is. A kézenfekvő jelző azért jogos, mert ezt a módszert Ptolemaiosz már maga is HIPPARKHOSZtól vette át (267. oldal). Felbukkant a derékszögű koordináta-rendszer akkor is, amikor Oresme az időbeli sebességváltozást ábrázolta (463. oldal). Ennél nem fejlettebb Descartes koordináta-rendszere sem, mégis e

fogalom a köztudatban legszorosabban az ő nevével fonódott össze, nem is egészen érdemtelenül, ha számításba vesszük, hogy ő volt az, aki a már fejlett algebrai jelöléseket és eljárásokat következetesen alkalmazta a geometriára a koordináta-rendszer segítségével, követendő példát mutatva az algebrai és a geometriai módszerek együttes használatára. Sikerei követőkre találtak, és így biztosították az analitikus geometria további fejlődését. A következőkben röviden szemügyre vesszük e híres matematikus-filozófus érdemeit.

René Descartes du Peron (1596-1650). Magas rangú bíró gyermekeként született a francia La Haye-ben. A csenevész fiúcskát sokáig otthon nevelték, és csak 8 éves korában került La Fleche-be, az ottani jezsuita kollégiumba. A gazdag fantáziájú, éles eszű ifjú sok mindent tanult, de elég rendszertelenül. Tanulmányai közül a matematikát becsülte a legtöbbre, mint olyat, amely kényszerítő erejű igazságokat közöl. 17 éves fejjel Párizsba ment, ahol hamar belecsömörlött az aranyifjak léha életébe, és elutazott Poitiers-be, hogy jogot tanuljon. A tudományok és főleg a matematika iránti érdeklődését ébren tartotta MARIN MERSENNE (1588-1648), volt iskolatársa, aki később Európa tudományos hírközpontjává nőtte fel magát. Közmondásossá vált, hogy amit valaki MERSENNE-nel tudat, azt Európával közölte. MERSENNE a maga korában szinte egy tudományos folyóiratot pótolt.

DESCARTES-OT 1617-BEN HOLLANDIÁBAN TALÁLJUK, ÖNKÉNTESKÉNT SZOLGÁLT NASSAUI MÓRIC ORÁNIAI HERCEG HADSEREGÉBEN. ITT ISMERKEDETT ÖSSZE, BREDÁBAN

Isaac Beeckman (1588-1637) matematikus és fizikus orvossal, akire talán érdemes közbevetőleg néhány szót szánni, nemcsak azért, mert Descartes-ot mintegy két évig vezette matematikai tanulmányaiban, hanem azért is, mert egy matematikai szempontból is figyelemre méltó gondolatmenettel állapította meg - Galilei eredményét nem ismerve - a szabadesés négyzetes úttörvényét.

Hallgatólagosan feltételezte, hogy a nehézségi erő nem állandóan, hanem szakaszosan működik. Az egész esés t időtartamát felosztotta n egyenlő, τ-val jelölt részre, tehát $t=n\tau$. *A* τ időszakaszt igen kicsinynek gondolta, amelynek kezdetén a nehézségi erő az eső

testnek egy kis lökést ad, és a test az ekkor nyert c sebességét a τ idő alatt változatlanul megtartja. Így az első τ részidő alatt a test megtesz $c\tau$ utat, a második τ időszakban $2c\tau$, és általában, az n-edikben $nc\tau$ utat. Ezek szerint a $t_1 = n_1\tau$ idő alatt befutott összes út:

$$s_1 = c\tau(1+2+3+\ldots+n_1) = \frac{(n_1+1)\cdot n_1}{2}c\tau.$$

Hasonlóan a $t_2 = n_2\tau$ idő alatt az eső test megteszi az

$$s_2 = c\tau(1+2+3+\ldots+n_2) = \frac{(n_2+1)\cdot n_2}{2}c\tau$$

utat. Az utak aránya:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{(n_1+1)\cdot n_1}{(n_2+1)\cdot n_2} = \frac{n_1^2+n_1}{n_2^2+n_2}.$$

Mivel azonban

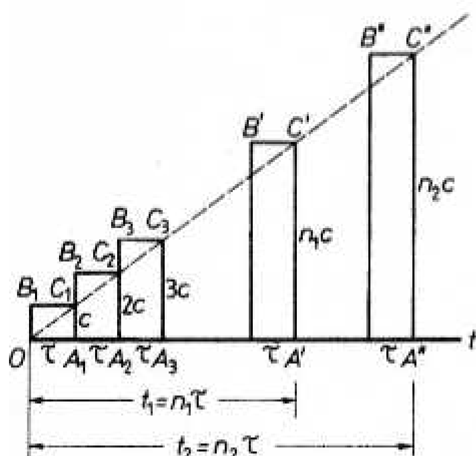
$$n_1 = \frac{t_1}{\tau} \quad \text{és} \quad n_2 = \frac{t_2}{\tau},$$

azért

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2+t_1\tau}{t_2^2+t_2\tau}.$$

Állandó erőhatás esetén τ olyan kicsivé válik, hogy $t_1\tau$ és $t_2\tau$ elhanyagolható a $t^2{}_1$ és a $t^2{}_2$ mellett, tehát

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2},$$



287. ábra

azaz az eső test útjainak aránya egyenlő a megfelelő esési idők négyzetének arányával. Megjegyzendő, hogy e számolást Beeckman szinte intuitív alapon, tehát például az erő mai fogalmának ismerete nélkül hajtotta végre, sőt abban sem volt biztos, hogy a $t_2\tau$ és a $t_2\tau$ tagokat teljes joggal hagyta el.

A nagyobb bizonyosság kedvéért azonban még Oresme eljárását is alkalmazta (463. oldal). A *287. ábra t* tengelyén feltüntette a kis τ időszakokat, a tengelyre merőlegesen pedig a megfelelő sebességértékeket. Az egyes τ időtartamok alatti utat (ncτ) ábrázolja az OA_1C_1B 1 az $A_2A_2C_2B_2$ stb. téglalapok területe. A t_1, illetve a t_2 idő alatti út mérőszáma azonos az *OA*', illetve az *OA"* szakasz feletti lépcsős idom területének mérőszámával. Ha azonban a mozgás nem szakaszos lefolyású, azaz a sebesség nem ugrásszerűen, hanem folytonosan és egyenletesen növekszik, akkor az első lépcsős idom átmegy az *OA'C'* és a második az *OA" C"* háromszögbe. Így az utak aránya:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{T_{OA'C'}}{T_{OA''O''}}=\frac{(OA')^2}{(OA'')^2}=\frac{t_1^2}{t_2^2},$$

ahol *T* az alsó indexében feltüntetett síkidom területe.

Beeckman tehát mindkét esetben, anélkül hogy ezt a fogalmat ismerte volna, határátmenetet hajtott végre. E két bemutatott eljárás alapján ez az elfelejtett és rendszerint csak DESCARTES-tal kapcsolatban emlegetett holland matematikus méltán számítható az analízis úttörői közé.

A most közöltek Beeckman naplójában találhatók, az 1618-as feljegyzései között. Galilei a szabadesés törvényét 1638-ban fejtette ki a Discorsiban, de egy 1604-ben Paolo SARPIhoz (1552-1623) intézett levelében a négyzetes úttörvényt már megfogalmazta. Nem valószínű, hogy erről Beeckmann tudott volna.

Könnyű visszatérnünk az eredeti témánkhoz, Descartes-hoz, mert az említett naplóban az is olvasható, hogy: „Ezt Mr. Peron bizonyította.” Peron pedig DESCARTES-nak, az ifjú katonatisztnek az akkor viselt neve volt. Igen valószínű tehát, hogy katonai tennivalói mellett Descartes bőven talált időt a mesterével való együttműködésre. 24 éves korában elhagyta Hollandiát, és bajor Miksa választófejedelem seregében, II. Ferdinánd oldalán részt vett a cseh protestáns rendeket leverő fehérhegyi ütközetben (1620) is. Érsekújvár ostroma után, a háborús borzalmaktól megviselve, egy időre felhagyott a katonáskodással. Egy pihentető európai utazás után, 1625-ben visszatért Párizsba, ahol tiszteletet vívott ki filozófiai eszméinek a Mersenne körül csoportosuló tudományos körben. 1628-ban utoljára öltött egyenruhát, hogy XIII. Lajos seregében ostromolja a protestánsok fő menedékét, La Rochelle-t.

1629-ben Hollandiában telepedett le, hogy zavartalanul építhesse filozófiai rendszerét. Az itt eltöltött mintegy 20 esztendő termékeny időszaka volt. Az első időben belekezdett *Le Monde* (A világ) című értekezésébe, amely Kopernikusz tanait vette volna védelmébe, de 1632-ben, amikor értesült a Galileit elmarasztaló

perről, és arról, hogy az ítélethez csatlakozott a párizsi Sorbonne és Richelieu bíboros is, akkor ezt a művét abbahagyta. Megjelent azonban 1637-ben a módszerről írt francia nyelvű filozófiai műve, a *Discours de la méthode* (Értekezés a módszerről), a filozófiájának alapjait összefoglaló leghíresebb könyve. 1644-ben adta ki a gondolatait legrendszeresebben tárgyaló munkáját, *A filozófia alapelveit.* Az ortodox holland protestánsok azonban filozófiáját hivatalosan is elítélték, műveit elégették, és még élete is veszélybe került. Az ateizmussal vádolt tudóst ekkor Richelieu hazahívta, de ő inkább elfogadta 1649-ben a svéd királynőnek, KRISZTINÁnak, Descartes csodálójának a meghívását. A 19 éves királynő rendszeresen órákat vett DESCARTES-tól, tanácsait kikérte, és a svéd akadémia megszervezésével bízta meg. A zord északi időjáráshoz nem szokott tudós azonban megbetegedett, és 54 éves korában Stockholmban meghalt. Mivel nem volt protestáns, azért a meg nem keresztelt újszülöttek temetőjében hantolták el, hazája viszont eretneksége miatt nem szállíttatta haza, csak akkor (1667-ben), amikor Krisztina (hamis) bizonyságot tett arról, hogy Descartes őt katolikus hitre akarta téríteni. Négy év múlva már XIV. Lajos megtiltotta a pápai indexre tett descartes-i tanok tanítását. Jelenleg a St. Geneviéve-apátság Panteonná lett templomában nyugszik.

Descartes, ez a nyugtalan, minden tudományt megismerni vágyó szellem új filozófia után kutatott. Ő, a jezsuiták nevelésében részesült ifjú a skolasztikus filozófia ellen fordult, és „az ész természetes világosságával” olyan egységes rendszert akart felépíteni, amely önmagunkban és a természet „nagy könyvében” keresendő. Akár az önmagát felfogó ész ismeri meg a természetet, akár a természet tanulmányozásával jutunk el önmagunk megismeréséhez, az eredmény, a tudás, amelyet jól kiművelt logikai-matematikai úton szereztünk, ugyanaz. Az *Értekezés a módszerről* első szabálya, hogy igaznak kell elfogadni mindent, ami számunkra nagyon világos és határozott. A megismerés kiinduló mozzanata tehát az intuíció, amely matematikai nyelvén szólva, megteremti számunkra az axiómákat, amelyek alapján aztán matematikai dedukció útján új állításokhoz juthatunk.

A módszer második szabálya, hogy az összetett dolgot bontsuk részeire, és ezen egyszerű részekből - amelyeket már az intuíció világosságával átláthatunk - értjük meg az egészet. Tehát - és ez a harmadik szabály - mindig az egyszerűbbtől haladjunk a bonyolultabb felé. Ebben a deduktív logikai mozgásban szükséges a gondolkodás tárgyainak, állításainak folytonos összehasonlítása, az összefüggések tisztázása. Ez nem csupán az ellenőrzést biztosítja, hanem a nyert állítást szemléletessé is teszi. Descartes határozottan arra törekedett, hogy minden feladat megoldására matematikai módszert találjon.

A negyedik szabály matematikai szempontból szintén érdekes, Descartes a felsorolás szabályának nevezte. E szerint a valamely tulajdonságban közös dolgokat, fogalmakat a lehető leghiánytalanabbul, a legteljesebben számba kell vennünk ahhoz, hogy azokról a közös tulajdonságot biztonsággal állíthassuk. Itt a filozófus arra a logikai műveletre gondolt, amelyet ma indukciónak, a matematikában pedig teljes indukciónak nevezünk.

Összefoglalva: Descartes egy olyan, lényegében természettudományos alapokon nyugvó filozófiai rendszer felépítését kísérelte meg, amely a természetnek, a fizikának a vizsgálatát visszavezetné geometriai összefüggésekre, amelyek aztán algebrai alapon, szigorú axiomatikus módszerekkel, tehát deduktív úton igazolhatók. A francia tudós tehát a matematika axiomatikus felépítésében fedezte fel a gondolkodásnak azt a mintáját, amely az ismeretszerzés biztonságát adná, és az így szerzett tudásra felépülhetne az igazi filozófia, a tudományok tudománya. Nem nehéz felismerni ebben a szándékban a püthagoreusok alapelvét - minden: szám -, igaz, hogy lényegesen fejlettebb alakban.

A módszer filozófiai részéhez - amelyet csak igen hiányosan, csupán a matematika szemszögéből vázoltunk - csatlakozik három függelék: *Dioptrika, Geometria* és *Meteorok* címen. Ezek közül bennünket a *Geometria* érdekel, amely Descartes matematikai gondolatait tartalmazza. A *Geometria* (La Géométrie) cím nem fedi e három részből álló könyvecske tartalmát. Az első részben fejti ki Descartes azokat a gondolatait, amelyekkel megkísérli az algebrát és a geometriát egységes „mathesis universalis”-szá alakítani. Ennek a lényege az algebrai módszerek geometriai és a geometriai eljárások

algebrai alkalmazása. A görög matematika minden algebrai problémát átfogalmazott geometriaivá, és az algebrai feladatokat is geometriai szerkesztésekkel oldotta meg. Descartes újítása ennek a fordítottja. Az ő reformja lehetővé teszi, hogy geometriai kérdéseket algebrai úton válaszoljunk meg.

Ennek egyik előfeltétele volt az algebrai jelölések és módszerek kellő fejlettsége, ami Descartes korában már majdnem a szükséges mértékben rendelkezésre állt. A második feltétel az aritmetikai műveleteknek a geometriába vitele. Ez utóbbit maga Descartes teremtette meg. Abból indult ki, hogy minden geometriai probléma visszavezethető szakaszok hosszúságának a meghatározására. Ha tehát sikerül a szakaszok közötti aritmetikai műveletek definiálása, akkor a geometriai feladatok, az aritmetikai műveletek közvetítésével, algebrai úton is megoldhatókká válnak. Az összeadás, illetve a kivonás minden további nélkül értelmezhető a szakaszok összeillesztésével, illetve elvételével. Két szakasz szorzását és osztását, amikor eredményül is szakaszt akarunk kapni, a párhuzamos szelők tételének segítségével definiálta. Ehhez kell egy - tetszőleges - egységszakaszt választanunk. Ekkor két, a és b szakasz szorzatának a keresése egyértelmű egy olyan c szakasz meghatározásával, amely kielégíti az

$1 : a = b : c$

feltételt. Hasonló módon az $a : b = d$ hányadosra igaz, hogy

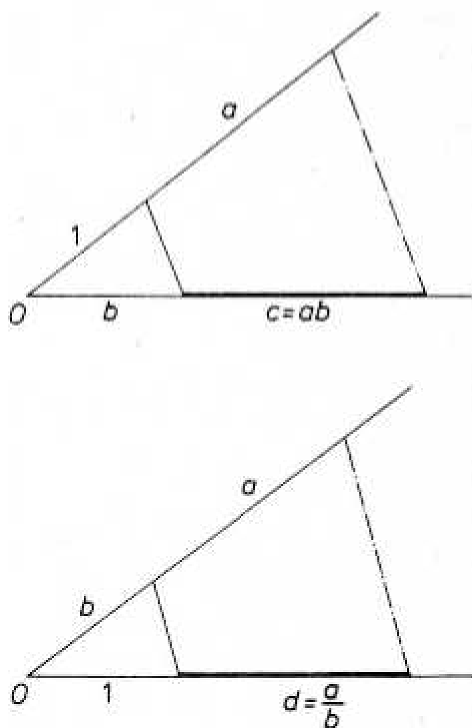
$b : a = 1 : d$.

Mindkettő elvégezhető az ún. negyedik arányos szerkesztésével a *288. ábra* szerint. Egy adott szakaszból való gyökvonás pedig az egységszakasz és az adott szakasz közti (egy vagy több) mértani középarányos szerkesztésével adható meg. Descartes tehát úgy definiálta a szakaszok közötti műveleteket, hogy - ma így mondanánk - a szakaszok teste izomorf legyen a valós számtesttel.

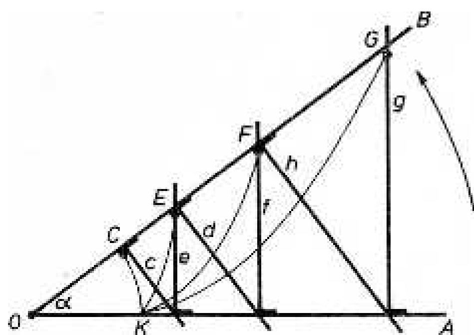
Ez visszahatott a hatványok értelmezésére. Az a^2-nek a neve ugyan négyzet marad, de geometriailag már nem az a oldalú négyzetet, hanem az $a * a$ szakaszt jelenti, ugyanúgy a^3 geometriai megfelelője is egy szakasz. Ez az új szemlélet az algebrában is megszüntette a görög korlátokat, például azt, hogy a harmadfokúnál

magasabb fokú egyenlet értelmetlenség, mert például x^4 geometriailag a háromdimenziós térben nem értelmezhető.

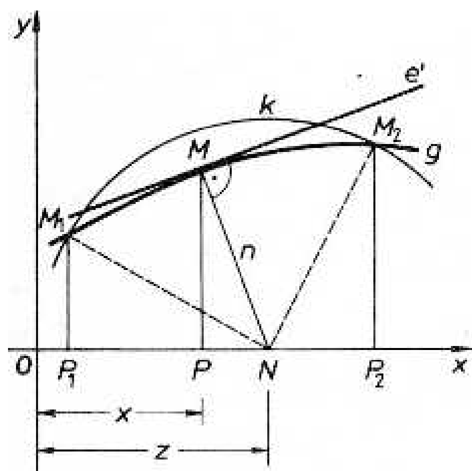
A most ismertetett műveleti definíciók és az a nagyon kezdetleges koordináta-rendszer (egyetlen kezdőponttal ellátott egyenes és az azzal szöget bezáró párhuzamos szakaszok serege, Oresme, 463. oldal), amelyet Descartes használt, már lehetővé tette, hogy síkgörbék egyenleteit írhassa fel, és azok alapján következtessen a görbék természetére. Ezt a módszert a *Geometria* első részében egy Papposz-féle feladaton illusztrálta, amelynek egyszerűsített és modernizált változatát már a 284. oldalon láthattuk.



288. ábra



289. ábra



290. ábra

A *Geometria* második része a síkgörbék osztályozásával kezdődik. Az osztályozási szempont meglehetősen önkényes és nehézkes. Descartes kifejezi bizalmatlanságát a körzővel és a vonalzóval való szerkesztéssel szemben. Miért éppen ehhez a két eszközhöz kötjük a szerkeszthetőség fogalmát? Helyettük konstruált egy csuklós szerkezetet, amely végül is szintén körzőből és vonalzókból áll. Ennek vázlata a *289. ábrán* szemlélhető. Az O-ban csuklósan rögzített *AO* és *OB* vonalzók szétnyithatók és összecsukhatok (körző). Az *OB*-hez az *OB*-n csúsztatható módon rögzülnek a *c, d* és *h* vonalzók, amelyek mindegyike merőleges az *OB*-re. Hasonlóan az *OA* száron az *OA* mentén eltolhatók az *e, f* és *g* vonalzók, amelyek merőlegesek az *OA*-ra. Összecsukott helyzetben ($\alpha = 0$) a

köröcskékkel jelzett C, *E, F* és *G* íróhegyek mind a *K* pontban érik a rajz síkját, amikor $OK=OC$, vagyis a *KC* körív. A szétnyitás után az íróhegyek rendre a C, *E, F és G* pontba kerülnek, és közben leírják a *KC, KE, KF, KG* görbéket. Nyitáskor ugyanis a *c* vonalzó az *OA* mentén eltolja az *e* vonalzót, az *e* az *OB* irányában a *d-t,* a *d* továbblöki *OA*-n az *f*-et, az *f* a *h-t* és a *h* a *g* vonalzót. Az íróhegyek pedig mozgás közben az *OB* és a megfelelő *c, e, f, g* vonalzók metszéspontjában legyenek. A vonalzók száma tetszőlegesen növelhető, és így a készülékkel tetszőlegesen sok görbe írható le. Ezeket bizonyára meghatározza az α szög nagysága és az előttük levő vonalzók helyzete. A szerkezet utolsó láncszemének mozgása tehát az elsővel meg van határozva. Descartes kimondta, de csak 1876-ban bizonyította be Kempe angol matematikus, hogy síkbeli csuklós szerkezettel minden algebrai egyenlettel jellemezhető síkgörbe megrajzolható, de egyetlen transzcendens (az elnevezést Leibniz adta) görbe sem. Descartes a geometriai vizsgálat számára csak az ő szerkezetével megrajzolható görbéket engedte meg. Ezeket geometriai, a többit pedig mechanikai görbének nevezte. A geometriai görbéket a megrajzolásukra alkalmas csuklós szerkezet láncszemeinek, ízeinek a száma szerint nevezte első-, másod-, harmad- stb. rendűeknek. Newton vezette be az egyszerűbb és jellemzőbb, fokszám szerinti osztályozást.

A *Geometria* második részében érdekesebb és talán értékesebb is DESCARTES-nak a görbék érintőire, illetve normálisaira vonatkozó néhány számítása. Ezek közül szabad legyen az egyiket bemutatnom. Határozzuk meg azt az egyenest, amely az egyenletével adott *g* görbét egy adott *M* pontjában, illetőleg az *M* ponthoz tartozó érintő egyenest merőlegesen metszi *(290. ábra)!*

A $g(x,y)=0$ egyenletű *g* görbe *M* pontbeli normálisa az x-tengelyt metszi az *N* pontban. Ebből az *N* pontból mint középpontból messük el a görbét egy tetszőleges sugarú *k* körrel úgy, hogy az M_1 és M_2 metszéspontokat az *M* pont válassza szét. Ez a két pont a görbének és a körnek az egyenletéből meghatározható. Ha az M_1 és M_2 pontok egybeesnek, akkor a kiválasztott *k* kör éppen az *M* pontban érinti a *g* görbét. Ennek a feltétele az, hogy a metszés pontokat meghatározó egyenletrendszer diszkriminánsa nulla legyen.

Ebből a követelményből az érintőkör sugara meghatározható. Ezt a

gondolatmenetet hajtsuk végre az $y^2 = ax$ parabola esetében! Legyen az *N* pont abszcisszája z, akkor az *r* sugarú kör egyenlete:

$(x—z)^2 + y^2 = r^2.$

A metszéspontok koordinátáit megadják a kör és a parabola egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldásai. Mivel a parabola egyenlete szerint $x = y^2/a$, azért

$$\left(\frac{y^2}{a} - z\right)^2 + y^2 = r^2.$$

A műveletek elvégzése és az y szerinti rendezés után:

$y^4 - (2az - a^2)y^2 + a^2(z^2 — r^2) = 0.$

Ennek az y^2-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa kell hogy nulla legyen, azaz

$(2az—a^2)^2—4a^2(z^2 — r^2) = 0.$

Ebből

$r^2 = az—(a^2/4).$

A kör egyenlete tehát

$(x—z)^2 + y^2 = az—(a^2/4),$

és a paraboláé

$y^2 = ax.$

Ezek szerint:

$(x — z)^2 + ax = az—(a^2/4)$.

Innen:

$$\left(x-z+\frac{a}{2}\right)^2=0,$$

vagy

$z=x+a/2$

Az x abszcisszájú M pont normálisa tehát az abszcisszatengelyt az $x+a/2$ helyen metszi. Az M és N pont a normálist és így az erre merőleges érintőt is meghatározza.

Az érintő meghatározásának ezt a módszerét megmutatta Descartes a róla elnevezett „oválison” is. Legyen a sík két fix pontja és F_2, továbbá egy, a síkban mozgó pontnak az ezektől való távolsága r_1, illetve r_2. Legyenek még m, n és k pozitív egész számok. A sík azon pontjainak a halmaza, amelyek eleget tesznek az

$mr_1 + nr_2=k$

egyenletnek, a Descartes-féle ovális. (Descartes az egyenlet helyett csak igen homályos leírást adott.) A *Geometriának* ez a második része azzal a túlzó megállapítással ér véget, amely szerint: „Úgy hiszem, hogy semmi lényegest el nem mulasztottam, ami a görbék megértéséhez szükséges.”

A *Geometria* harmadik része kimondottan algebrai jellegű. A szerző az egyenletmegoldások átfogó elméletét szerette volna adni. Algebrájának jelölései már majdnem egyeznek a maiakkal. Az egyenletet a megoldás előtt mindig zérusra rendezi. Ebben a részben, szigorú bizonyítások nélkül, sok értékes megfigyelés van. Tudja, hogy ha $P_n(x)=0$ bal oldala osztható $(x—c)$-vel, akkor c gyöke az egyenletnek. Kimondja az algebra alaptételét is, amelyet csak Gauss bizonyított be 1799-ben, hogy ti. az egyenletnek annyi gyöke van, amennyi a fokszáma. Ez elárulja azt is, hogy Descartes már a gyökök közé számítja a komplex gyököket is. Ő állapította meg először a róla elnevezett előjelszabályt, amely kimondja (bizonyítás nélkül), hogy egy csupa valós gyökű egyenletnek annyi pozitív gyöke van, amennyi a rendezett alak együtthatóinál a jelváltások száma, és annyi negatív gyöke, amennyi az azonos

jelkövetkezések száma. Kutatja azt is, hogy a racionális együtthatójú egész polinom mikor bontható ugyanilyen polinomok szorzatára, vagyis felveti a reducibilitás kérdését. E témakörben érdekes egy negyedfokú egyenlet megoldásának harmadfokúra való visszavezetése. Kimutatta ugyanis, hogy ha az

$$x^4+px^2+px+r=0$$

egyenletbe bevezet egy új y ismeretlent, amely eleget tesz az

$$y^6+2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0$$

feltételnek, akkor az eredeti egyenlet

$$\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)\left(x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p-\frac{q}{2y}\right)=0$$

alakba írható. Ha tehát az y^2-ben harmadfokú feltételi egyenletből *y-t* meghatározzuk, akkor ennek a segítségével a negyedfokú egyenlet polinomja két másodfokú tényező szorzatára bontható.

A gondolatmenetet Descartes ezúttal sem közölte, de valószínűleg hihetünk Franz van Schooten holland matematikusnak, aki szerint Descartes a negyedfokú egyenletet először

$$(x^2-xy+z)(x^2+xy+v)=0$$

alakban képzelte el, azután pedig az y, z és v konstansokat az egyenlő együtthatók módszerével - amelynek felfedezését DesCARTES-nak tulajdonítják - határozta meg a következőképpen:

A szorzást elvégezve, és az x fogyó hatványai szerint rendezve, a bal oldal:

$$x^4+(-y^2+z+v)x^2+(yz-yv)x+vz.$$

Az eredeti egyenlet bal oldalával való összehasonlítás után, mivel az azonos fokú tagok együtthatóinak egyenlőknek kell lenniük, azért

$—y^2+z+v=p$

$yz—yv=q$

$vz=r.$

Ezen egyenletekből küszöböljük ki v-t és z-t! Az első két egyenlet szerint

$z+v=p+y^2$

$z\text{-}u=q/y,$

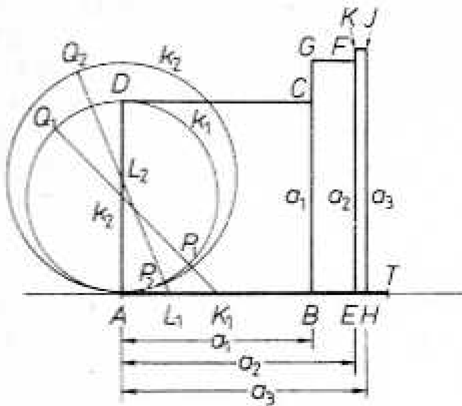
$$\left(p+y^2+\frac{q}{y}\right)\left(p+y^2-\frac{q}{y}\right)=4r.$$

A szorzás elvégzése és rendezés után pedig *y* számára valóban az

$y^6+2py^4+(p^2\text{-}4r)y^2—q^2=0$

egyenletet nyerjük.

DESCARTES IGEN EREDETI GONDOLKODÁSMÓDJÁRA JELLEMZŐ EGY, A HÁTRAHAGYOTT ÍRÁSAI KÖZÖTT TALÁLT FELADAT. HABÁR A *Geometriában* kijelentette, hogy a görbe vonalak és az egyenesek közti viszonyt nincs ember, aki megismerheti, mégis az említett feladat ezt a megállapítást megcáfolni látszik. Régi probléma valamely görbe ívhosszának, például a kör kerületének a kiszámítása, „kiegyenesítése”. Descartes éppen a kör esetére ennek a kérdésnek a fordítottját vetette fel, vagyis azt, hogyan lehet egy adott négyzethez vele egyenlő kerületű kört szerkeszteni?



291. ábra

Legyen az a_1 oldalú adott négyzet a *291. ábra ABCD* négyzete. Hosszabbítsuk meg a négyzet *AB* oldalát, és a meghosszabbításon keressük meg azt az *E* pontot, amelyhez tartozó $AE=a_2$ távolságra igaz, hogy

$$\frac{t_{ABCD}}{4}=a_2(a_2-a_1)=t_{BEFG}=\left(\frac{a_1}{2}\right)^2,$$

ahol *t* az alsó indexében jelölt síkidom területét jelenti.

Keressük ezután az *AB* meghosszabbításán azt az $AH=a_3$ távolságot, amely eleget tesz a

$$\frac{t_{BEFG}}{4}=a_3(a_3-a_2)=t_{EHJK}=\left(\frac{a_1}{4}\right)^2$$

követelménynek, és így tovább!

Belátható, hogy az *ABCD, BEFG, EHJK* stb. területek csökkenése és ugyanakkor az a_1, a_2, a_3 stb. magasságok növekedése miatt az ezeknek megfelelő *AB, BE, EH* stb. alapok rohamosan csökkennek és a *B, E, H* stb. pontok egy *T* határponthoz közelednek. Állítjuk, hogy az $AT=a$ szakasz a keresendő kör átmérője.

Ez belátható a következőképpen: Az *AB,* illetve az *AD* szakasz K_1, illetve K_2 felezőpontján átfektetett egyenes a K_2 középpontú és a_1 átmérőjű k_1 kört metszi a P_1 és a Q_1 pontban. A K_1 pontnak a k_1 körre vonatkozó hatványa:

$K_1Q_1 * K_1P_1 = K_1Q_1(K_1Q_1 - P_1Q_1) = (AK_1)^2$

vagy

$$K_1Q_1(K_1Q_1 - a_1) = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2.$$

Az *E* pontra vonatkozó kikötés szerint $K_1Q_1 = a_2$. Vegyük még tekintetbe, hogy a k_1 kör éppen az a_1 oldalú négyzetbe írható kör. E kör kerülete ezért kisebb $4a_1$-nél, a négyzet kerületénél.

Legyen ezután L_1 és L_2 olyan pont, hogy

$$AL_1 = \frac{a_1}{4} \quad \text{és} \quad AL_2 = \frac{K_1Q_1}{2} = \frac{a_2}{2}.$$

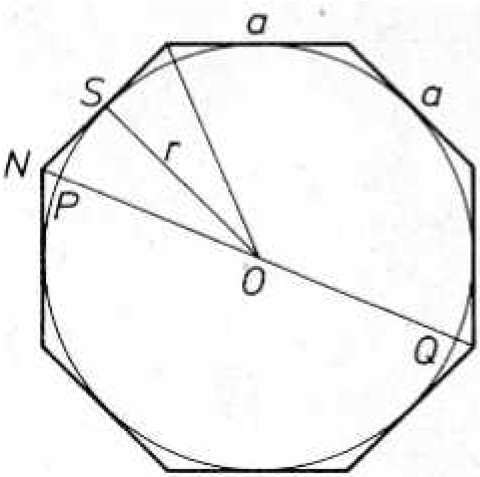
Ekkor az L_1L_2 egyenes az L_2 középpontú, AL_2 sugarú (azaz a_2 átmérőjű) k_2 körből kimetszi a P_2 és Q_2 pontot. Az L_1-nek a k_2 körre vonatkozó hatványa:

$L_1Q_2 * L_1P_2 = L_1Q_2(L_1Q_2 - P_2Q_2) = (AL_1)^2$

vagy

$$L_1Q_2(L_1Q_2 - a_2) = \left(\frac{a_1}{4}\right)^2.$$

Ezt összehasonlítva a *H* pontra vonatkozó feltétellel: $L_1Q_2 = a_3$. Most egy pillantás a *292. ábrává* meggyőz bennünket, hogy



292. ábra

$NQ^*NP = NQ(NQ\text{-}PQ) = (NS)^2$

illetve

$$NQ(NQ-2r)=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

lévén, az előbbi, *291. ábra* $P_2Q_2 = a_2$ átmérőjű k_2 köre éppen az 1/2 a_1 oldalú szabályos nyolcszög beírt érintőköre. Ennek a k_2 körnek a kerülete még mindig kisebb a nyolcszög, egyszersmind a négyzet $4a_1$ kerületénél, de már jobban megközelíti azt, mint az előbbi, a négyzetbe írható kör.

Az eljárást folytatva: az a_n átmérőjű kör az $a_1/(2^{n-1})$ oldalhosszúságú, 2^{n+1} oldalszámú szabályos sokszögnek beírt köre. Minél nagyobb n értéke, annál inkább megközelíti az érintőkor kerülete a köré írt 2^{n+1} oldalú szabályos sokszög $4a_1$ kerületét, amely egyúttal az a_1 oldalú négyzet kerülete is.

A vázolt eljárás tehát lehetővé teszi, hogy tetszőleges pontossággal megszerkeszthessük az adott négyzettel egyenlő kerületű kört.

E néhány bemutatott szemelvény alapján talán kibontakozik a képe

egy igen szellemes, bár nem nagyon szigort igényű matematikusnak, aki bizonyára inkább vallotta magát filozófusnak. A geometria és az algebra egyesítésére való törekvése ugyan nem sikerült, de munkásságának hírneve és személyének varázsa, tekintélye elég volt ahhoz, hogy felhívja a matematikusok figyelmét az új módszer alkalmazásának lehetőségeire, és követőkre, továbbfejlesztőkre találjon. Végül is Descartes matematikai érdeme az érdeklődés felkeltése mellett a változó mennyiségek bevezetése és a koordináta-rendszer használata, vagyis a függvényszemlélet példamutató képviselete. Közben fejlesztette az algebrát és a geometriát néhány tétellel és eljárással, valamint a matematikai analízist előkészítő ötletes megoldással a görbék érintőjének, illetve normálisának meghatározására vonatkozólag.

Amint többször megjegyeztem, az analitikus geometria megteremtése nem egyedül Descartes érdeme, bár hathatósan hozzájárult a koordinátageometriai szemlélet kialakításához. Kortársai közül a szintén francia Pierre Fermat sokkal nagyobb következetességgel és tökéllyel művelte az analitikus geometriát, bár annak további fejlődésére nem volt akkora hatással, mint Descartes. Ennek egyik oka, hogy eredményeit nem publikálta, hanem csak leveleiben közölte tudóstársaival. A másik oka pedig az, hogy Viéte nehézkes algebrai jelöléseit használta, és ez írásait nehézkessé tette.

Pierre Fermat (1601-1665). Korának legnagyobb francia matematikusa jogász volt, és csak „műkedvelő módon”, szabad idejében foglalkozott matematikával. A Toulouse melletti Beaumont de Lomagne-ban született. Jogot tanult Toulouse-ban, és 1631-től ugyanitt a parlament tanácsosaként működött. Az innen mintegy 30 km távoli Castres-ban halt meg.

Az ő idejében szinte divattá vált az elveszett ókori klasszikusok rekonstruálása. Fermat is matematikai tanulmányait az ógörög művek olvasásával kezdte, és eközben hozzáfogott Apollóniosz *Plane loci* (Síkmértani helyek) című munkájának rekonstruálásához, főleg Papposz utalásai alapján. Apollóniosz tanulmányozása közben, 1636-ban - tehát még Descartes közlései előtt - fedezte fel az analitikus geometria egyik alapvető elvét, hogy ti. a kétismeretlenes egyenlet valamilyen vonalat jelenthet, egyenest

vagy görbét. Rájött, hogy az Oresme-féle koordináta-rendszer és az algebrai jelölések birtokában az apollónioszi kúpszeletelmélet sokkal áttekinthetőbb, és azért a további eredmények elérésére is alkalmasabb formában fejezhető ki. Sajnos, amint említettem, Fermat a nehezebben kezelhető Viéte-féle algebrai jelöléseket használta, és összegyűjtött munkái csak halála után, 1679-ben jelentek meg, *Varia opera mathematicae* (Különböző matematikai művek) címen. Ez az oka, hogy a fejlődés gyorsításában Fermat - Descartes mellett - csak a második helyre szorult.

Az *Ad locus planos et solidos isagoge* (Bevezetés a síkbeli és térbeli mértani helyek elméletébe) című munkája levelezőtársai előtt már 1636-ban ismeretes volt, de nyomtatásban ez is csak 1679-ben jelent meg. A mű bevezetésében Fermat ismertette az Oresme-féle paralel koordináta-rendszert, majd rátért annak a kimutatására, hogy az elsőfokú kétismeretlenes egyenlet grafikonja egyenes, a másodfokú kétismeretlenes egyenleté pedig kúpszelet. Nagy rendszerességgel - Apollóniosz gondolatmeneteit követve - levezette a kör, az ellipszis, a hiperbola és a parabola egyenletét. Az Apollóniosz-féle szümptómát ő már a vonal egyenletének nevezte. Ügyes transzformációkkal vizsgálta a fordított feladatokat is. Arról például, hogy a

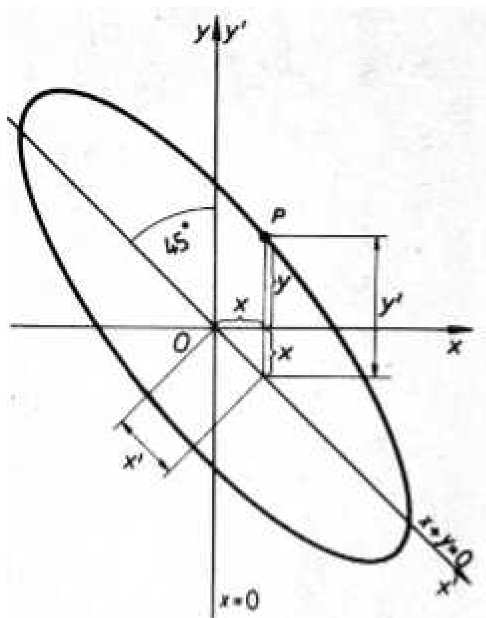
$$2x^2+2xy+y^2=a^2$$

egyenlet grafikonja ellipszis, a következőképpen győződött meg: Az egyenletet először az

$$(x+y)^2+x^2=a^2$$

alakban írta fel, azután pedig áttette olyan új koordináta-rendszerbe, amelynek tengelyei az $x+y=0$ és az $x=0$ egyenesek.

A mai kifejezési eszközökkel élve, a *293. ábra* $(x; y)$ derékszögű koordináta-rendszerére vonatkozó egyenletet átírta az $(x'; y')$ ferdeszögű rendszerbe. E transzformáció rajzról leolvasható formulái, mivel



293. ábra

$y' = x + y$ *és* $x' = x\sqrt{2}$,

azért

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad y = y' - \frac{x'}{\sqrt{2}}.$$

Így az új egyenlet:

$$(y')^2 + \frac{(x')^2}{2} = a^2,$$

azaz

$$\frac{(x')^2}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{(y')^2}{a^2}=1,$$

ami már azonosítható Apollóniosz ellipszisszümptómájával (219-220. oldalak), illetve a Fermat-féle ellipszisegyenlettel, amikor is az egyenlet az ellipszis két konjugált átmérőjére mint tengelyekre vonatkozik.

FERMAT AZ ANALITIKUS GEOMETRIAI ISMERETEIT KAMATOZTATTA AZ EGYENLETMEGOLDÁSBAN IS. EZT ILLUSZTRÁLJA AZ *Isagoge* egyik kis feladata: Megoldandó *x-re* az $x^3+ax^2=ab^2$ egyenlet!

FERMAT ÚJ y ismeretlent vezetett be úgy, hogy $b^2=xy$ legyen. Ekkor:

$x^3+ax^2=axy.$

Osztva $x\neq 0$-val:

$x^2+ax=ay,$

amikor $xy=b^2$.

Az így nyert két egyenletből megállapította, hogy az eredeti egyenlet gyökeit az $x^2+ax=ay$ parabola és az $xy=b^2$ hiperbola metszéspontjainak abszcisszái adják.

Itt csupán megemlítjük, hogy Fermat fényes nevet vívott ki magának a számelmélet, a differenciál- és integrálszámítás előkészítése, a kombinatorika és a valószínűségszámítás területén is. Ezekről az érdemeiről azonban a megfelelő fejezetekben szeretnék majd részletesebben szólni. Az eddig csak kis részben bemutatott eredmények is elegendők annak a megsejtésére, hogy Fermat méltán viselheti az „amatőr matematikusok fejedelme” címet, a szavak legdicsérőbb értelmében.

Az analitikus geometria Descartes utáni fejlődése során szóba kerülő matematikusoknál is, ezen a helyen, csupán a jelen tárgykörre vonatkozó munkásságukról adunk részletesebb tájékoztatást, más irányú működésüket csak megemlítve. Időrendben először

John Wallis (1616-1703) angol matematikusnak az *Arithmetica infinitorum* (A végtelenek aritmetikája) című, 1655-ben megjelent fő művét kell kézbe vennünk, amely magába zárja a kúpszeletekre vonatkozó ismereteket is (*Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis,* Értekezés a kúpszeletek új módszerű tárgyalásáról).

Wallis Ashfordban született, és Cambridge-ben teológiát végzett. Ő az első tudós, aki angol földön az analízis apostola lett. 1649-től Oxfordban geometriát tanított. Cromwell után királyi udvari káplánná nevezték ki. 1660-ban egyik alapító tagja és szervezője volt a londoni Royal Societynek.

Jól ismerte Cavalieri, Torricelli és Descartes munkáit, de fordított és kiadott ókori műveket is: Arkhimédész, Ptolemaiosz, Arisztarkhosz és Papposz munkáit. A kúpszeletek tárgyalásának új módja éppen a descartes-i analitikus geometria módszere volt. Ezt a területet továbbfejlesztette azzal, hogy bevezette a kúpszeletek közös egyenletét, amely mai jelöléseinkkel az

$$y^2 = 2px + \varepsilon x^2$$

formának felel meg (224. oldal). Foglalkozott az $y = ax^3$ harmadfokú parabola vizsgálatával is.

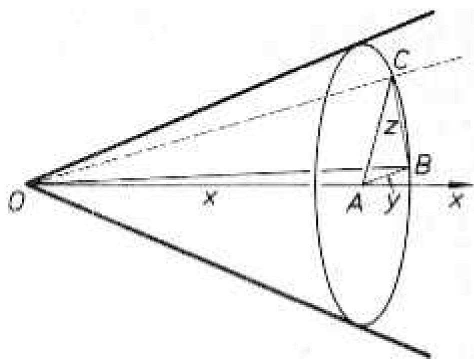
Alig néhány év eltolódással, WALLIStól függetlenül hasonló eredményekre jutott

Jan Witt (1625-1672), a Dordrechtben született holland matematikus is, aki politikai tevékenységei közepette is tudott módot találni az *Element a linearum curvarum* (A görbe vonalak elemei, 1659) megírására. Ez voltaképpen az első rendszeres analitikus geometriai kézikönyv. Első részében inkább szintetikus módszerrel, valamint kinematikai úton adta meg a kúpszeletek definícióit. (Tőle származik a direktrix szó és az a meghatározás, hogy a parabola a sík azon pontjainak az összessége, amelyek a fókusztól és a direktrixtől egyenlő távolságra vannak.) Könyvének második része kimondottan analitikus geometria. Ebben is szerepel a három kúpszelet közös egyenlete. - Életjáradék-táblázatai miatt a valószínűségszámítás úttörőjeként is számon

tartjuk.

Az analitikus geometria következő továbbfejlesztője a párizsi születésű

Philippe de Lahire (1640-1718), a College de France matematika-és építészprofesszora. Jelentős továbblépésként elsőnek írta fel egy felület egyenletét, vagyis a sík analitikus geometriájából kilépett a térbe. Még mindig csak a kezdőponttal ellátott egyetlen tengelyt használta, és csak a pozitív koordinátákat vette figyelembe. Az origó csúcsú, abszcissza tengelyű kúpfelületnek az egyenletét írta fel, lényegében úgy, ahogyan azt a 117. oldalon bemutattuk. Amint a *294. ábrán* látható, a koordináta-rendszerből csak a feltétlenül szükséges abszcisszatengelyt (x) és az *ABO* koordinátasíkot tüntette fel. Az 1679-ben kiadott *Nouveaux éléments des sections coniques* (A kúpszeletek új elmélete) című, COLBERT-nek dedikált művében Desargues kifejezéseit használta. Az abszcisszatengelyt fatörzsnek, az arra illeszkedő pontot görcsnek, az ordinátát ágnak és a kezdőpontot origónak nevezte. Ezek közül csak az *O* betűvel jelölt origó szakkifejezés bizonyult életképesnek.



294. ábra

Lahire nevét nem annyira a projektív és az analitikus geometriai eredményei vitték át a köztudatba, hanem annak a bizonyítása, hogy az R sugarú kör belsejében csúszás nélkül gördülő r sugarú kör valamely kerületi pontja az $R=2r$ esetben az alapkör egyik átmérőjén mozog (411. oldal, Násziraddín-

tétel), a kis körlap egy belső pontja pedig ellipszisen (amit Kopernikusz is bizonyított).

Descartes álma az volt, hogy a geometria és az algebra egyesítéséből megteremti az egyetemes matematikát. Nem sokkal utána azonban már világossá vált, hogy ez a cél nem érhető el, hiszen az algebrának és a geometriának is vannak olyan területei, amelyek a másik számára nehezen vagy egyáltalában nem közelíthetők meg. A történelem azt mutatja, hogy az algebra mint az egyenletek tudománya a geometriától függetlenül fejlődött tovább, viszont a geometriában alkalmazott algebrai módszer megteremtette a fejlődőképes analitikus geometriát. Magát az elnevezést Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843) francia matematikus vezette be.

Newton volt az első, aki Descartes geometriáját a harmadrendű görbék tanulmányozására használta. Az algebrai görbék Descartes szerinti osztályozása (565-566. oldalak) helyett az algebrai görbéket egyenleteik fokszáma szerint osztályozta, ami nemcsak egyszerűbb volt, hanem természetesebben is hozzásimult az algebrai módszerhez. Ezután a másodrendű görbék (kúpszeletek) már ismert tulajdonságainak kutatási mintájára fogott a harmadrendű algebrai görbék vizsgálatához, és ezzel elindította az analitikus geometriának az algebrai geometria nevű ágát. Ennek tárgya az algebrai görbék és felületek kutatása. Szintén Newton újítása volt, hogy teljesen egyenértékű módon használta a két koordinátatengelyt, és tekintetbe vette azok negatív felét is. A Newton által tanulmányozott harmadrendű görbék mindegyike leírható az

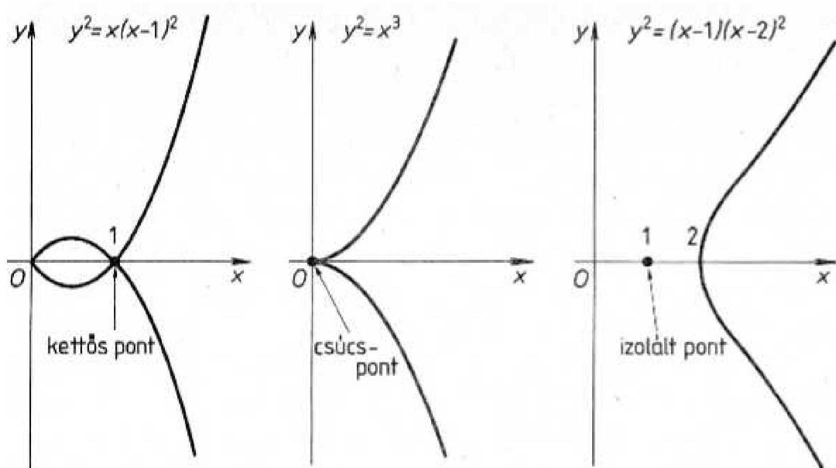
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$

$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$

$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d,$

$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

295. ábra



egyenletek valamelyikével. Newton kimutatta, hogy minden harmadrendű algebrai síkgörbe létrehozható az

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

egyenlet grafikonjának alkalmas centrális vetítésével. E görbéket nevezetes pontjaik, azaz: kettős pontjaik (csomópontjaik), csúcspontjaik (visszaforduló pontjaik) és izolált pontjaik helyzete szerint csoportosította. Így a harmadrendű síkgörbék 72 osztályát különböztette meg. A most felsorolt nevezetes pontok fogalmát szemlélteti a *295. ábra.*

NEWTON NYOMDOKAIN HALADVA SZÁMOS KITŰNŐ MATEMATIKUS FOGLALKOZOTT AZ ALGEBRAI GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK ELMÉLETÉVEL, AMELY ILYEN MÓDON TEKINTÉLYES TUDOMÁNYÁGGÁ TEREBÉLYESEDETT. NEVES MŰVELŐI KÖZÖTT EMLÍTEM MEG EULERT, STIRINGET, MACLAURINT, STEINERT, SALMONT, SYLVESTERT, CHASLEST ÉS CLEBSCHET.

Az algebrai geometria sok nehéz problémájának szemléltetésére alkalmasnak látszik Colin Maclaurin (1698-1746) aberdeeni skót professzornak, Newton tanítványának a harmadrendű görbékre vonatkozó egyik érdekes felfedezése. Ennek megértéséhez Stirling-ről is kell néhány szót ejtenem.

James Stirling (1692-1770) skót matematikus is foglalkozott az algebrai görbékkel. Egyik eredménye az volt, hogy a harmadrendű görbéknek a Newton által megállapított 72 osztályához még kettőt csatolt. Egy másik - mostani témánk szempontjából fontos - megállapítása az volt, hogy valamely *n-ed* fokú algebrai görbét általában $n(n+3)/2$ számú tetszőleges pontja meghatározza. Ez következik az együtthatók megszámlálásából. Például: a harmadfokú algebrai síkgörbék egyenletének általános alakja:

$$a_1x^3+a_2y^3 + a_3x^2y+a_4xy^2 + a_5x^2+a_6y^2+a_7xy+a_8x +a_9y +a_{10}=0.$$

Ez 10 együtthatót tartalmaz, de az egyenlet grafikonja nem változik meg, ha például üggyel végigosztunk, feltéve, hogy a_1 nem nulla, amikor is az x^3 együtthatója 1. Az egyenletet tehát 9 együttható, illetve az együtthatókat ismeretlenként tartalmazó 9 egyenletből álló egyenletrendszer meghatározza. Ez geometriailag a görbe 9 tetszőleges pontjának megadásával egyenértékű, amely számot meg is ad az $n=3$ esetre a Stirling-féle $n(n+3)/2$ képlet.

Maclaurin 1720-ban elsőként mondta ki az Étienne Bézout (1730-1783) francia matematikusról elnevezett tételt, hogy ti. egy n-ed és egy m-ed rendű algebrai síkgörbe általában *n*m* pontban találkozik. Két harmadrendű görbe tehát 9 pontban metszheti egymást, azaz 9 ponton 2 különböző harmadrendű síkgörbe is áthaladhat, vagyis ennyi pont nem határozza meg egyértelműen a harmadrendű görbét. 10 pont megadása esetén viszont, az azokra vonatkozó 10 egyenlettel a kiszámítandó 9 együttható túl van határozva. Az a paradox helyzet állt tehát elő, hogy a harmadrendű algebrai síkgörbe meghatározásához általában 9 megadott pontja kevés, de 10 már sok. Ezzel a paradoxonnal is úgy járt Maclaurin, hogy egy későbbi felfedezőjéről, Gabriel Cramer (1704-1752) svájci matematikusról nevezték el. (Igaz viszont az is, hogy a Maclaurin-sor a 27 évvel előbb publikált Taylor-sornak csupán speciális esete.)

A Cramer-paradoxont csak a XIX. században oldotta fel Julius Plücker (1801-1868) német matematikus, aki valószínűleg elsőként sejtette meg az algebrai görbék metszeteinek tulajdonságait vizsgáló modern kutatási területet. Gondolatmenetének vázlatát kövessük

egy negyedrendű görbe esetében.

STIRLING SZERINT A NEGYEDFOKÚ GÖRBE MEGHATÁROZÁSÁHOZ ÁLTALÁBAN

$$\frac{n(n+3)}{2}=\frac{4(4+3)}{2}=14$$

pont szükséges, és ennyi elegendő is. Szemeljük ki ezt a tetszőleges 14 pontot, és írjuk fel először azon negyedrendű görbék egyenletét, amelyek a 14 pont közül kiválasztott 13 ponton áthaladnak. Így kapjuk egy görbesereg egyenletét, amelyben van egy még meghatározatlan μ paraméter. Különítsük el a μ paramétert tartalmazó tagokat a μ nélküliektől. Ekkor az egyenlet $P_4+\mu P'_4=0$ alakba írható, ahol $P_4=0$ és $P'_4=0$ általában negyedfokú görbék egyenletei. A μ szorzó értékét meghatározhatjuk úgy, hogy az eddig kihagyott tizennegyedik pont koordinátáit $(x_{14}; y_{14})$ beírjuk a görbesereg egyenletébe, ahonnan ekkor

$$\mu=-\frac{P_4(x_{14};y_{14})}{P'_4(x_{14};y_{14})}.$$

Igen ám, de a $P_4+\mu P'_4=0$ alakú egyenlet görbéje tartalmazza a $P_4=0$ és a $P'_4=0$ egyenletű grafikonok minden közös pontját is, tehát Bézout szerint összesen 16 pontot. Így az eredeti 13 pont mellé a $P_4+\mu P'_4=0$ forma kiválasztott a 14. ponttól függetlenül 3 többletpontot. A 16 metszésponton még számtalan negyedrendű görbe haladhat át. Ha tehát a 14. pontot történetesen a három járulékos pont közül választjuk, akkor az így alapul vett 14 pont nem határoz meg egyértelműen egy negyedrendű görbét. E gondolatmenet igaz minden kettőnél magasabb rendű görbére.
Igaz tehát a Cramer-paradoxon, hogy ti. az n-ed rendű algebrai görbének $n(n+3)/2$ számú pontja nem mindig elég a görbe egyértelmű meghatározásához, ha viszont ennél többet adunk meg, de úgy, hogy azok nem a $P_n=0$ és $P'_n=0$ metszéspontjai, akkor az adott pontokon át általában n-edrendű görbe nem fektethető.

Maclaurin és Plücker között azonban még számos kitűnő művelője akadt az analitikus geometriának. Először kell említenünk a csodagyermekként induló

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) francia matematikust és csillagászt. Párizsban született. Apja a párizsi egyetem matematikaprofesszora volt, aki azonban főleg két csodagyermek fia révén vált híressé. Alexis Claude 10 éves fejjel már áttanulmányozta L'Hospital (1661-1704) kúpszeletekről és a differenciálásról írt tankönyvét. Még nem volt 13 éves, amikor értekezést adott be az Akadémiának a negyedrendű algebrai görbékről; 16 éves korában írta a két évvel később megjelenő könyvét *Recherches sur les Courbes á double courbure* (Tanulmányok a kettős görbületű görbékről) címmel. E könyv alapján 18 évesen, fiatal kora ellenére az Akadémia tagjául választotta. E műve az első analitikus térgeometria. A térgörbéket felületek metszésvonala ként állította elő, és ezeket a két koordináta síkra eső vetületükkel tanulmányozta. Kimagasló eredményeket ért el a differenciálszámításban is. *Éléments de géométríe* (Elemi geometria) tankönyve 1741-ben Marquise du CHÁTELET számára készült.

CLAIRAUT-nak himlőben, 16 évesen elhunyt zseniális öccse, a „Cadet Clairaut” halála előtt egy évvel, 1731-ben publikálta a *Traité de quadratures circulaires et hyperboliques* (Körök és hiperbolák kvadratúrája) című könyvét.

A zseniális elődök hosszú sora után jött Euler, akinek már nem jut jelző, mert elhasználtam azokat az úttörőkre. Ő írta meg az első igazán mai értelemben vett analitikus geometriát, rendszerezve benne a már előtte feltárt és az általa felfedezett ismereteket. 1748-ban jelent meg az I*ntroductio in analysin infinitorum* (Bevezetés a végtelenek analízisébe) című műve. Ennek második kötetében olvashatjuk először a síknak és a térnek is részletes és tervszerűen felépített analitikus geometriáját. Már 1728-ban közölte a *Pétervári Kommentárokban* a hengerek, a kúpok és a forgásfelületek egyenletét és analitikus geometriai vizsgálatát. Az *Introductio* második kötetének első 22 fejezete a sík analitikus geometriáját öleli fel. Ismerteti a derékszögű és a ferdeszögű koordináta-rendszert, majd az eltolás és az origó körüli elforgatás transzformációkat. A görbéket ő is, mint Newton, egyenletük

fokszáma szerint osztályozza. Kidolgozza azt az általános módszert, amellyel a görbék tulajdonságaira egyenletükből következtethetünk. A harmadrendű görbéknél kimutatja, hogy Newton osztályozása hiányos. Ő e görbék végtelen ágainak tulajdonságai alapján 16 csoportot különböztet meg. Végez érintővizsgálatokat, meghatározza az algebrai görbe egy pontjához tartozó görbületi sugarát, inflexiós pontjait, csúcsait és más jellemző tulajdonságait. A speciális görbék, például a spirálisok vizsgálatánál bevezeti a polárkoordináta-rendszert (119. old.). Ebben olyan biztos gyakorlatra tesz szert, hogy sokan úgy vélik, ő a polárkoordináta-rendszer feltalálója. Az igazság az, hogy már régebben is használták, és rendszeres bevezetése Newton nevéhez fűződik. Ő 1671-ben *A fluxiók módszere* című könyvében 9 új típusú koordináta-rendszert ismertetett. Ezek közül a második az ún. bipoláris rendszer. Ennél valamely síkbeli pont koordinátáit a sík adott két pontjától (pólusoktól) mért két távolsága jelenti. Ha ezeket x és y betűkkel jelöljük, akkor ebben a rendszerben például az ellipszis egyenlete $x+y=2a$, ahol $2a$ az ellipszis nagytengelye. Newton hetedik „új” koordináta-rendszere a ma is használatos polárkoordináta-rendszer, amely az O kezdőpontú (pólusú) távolságegységgel ellátott félegyenes (polártengely). Egy pont két koordinátája: a pólustól mért távolsága (rádiuszvektor) és az a pozitív szög, amelyet a rádiuszvektor a polártengellyel bezár.

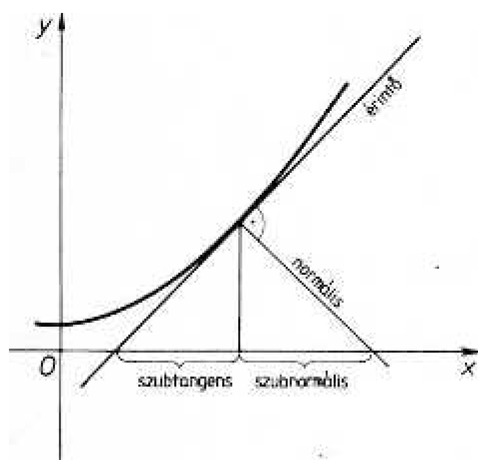
Euler használt negatív rádiuszvektorokat és negatív polárszögeket is. Az analitikus geometria keretében dolgozta ki a ma használatos trigonometria teljes rendszerét. Igen sűrűn alkalmazott egy görbe leírására paraméteres egyenletrendszert, ahol a pont két koordinátája egy közös segédváltozó függvénye. Fontos az *Introductió*nak az a része is, amelyben a görbék hasonlóságát és affinitását tárgyalta. Az affinitást is koordinátageometriai úton definiálta. Egyik görbe a másiknak akkor affin képe, ha $P(x; y)$ és $P'(x': y')$ pontjaikra nézve fennáll az $x'=ax$ *és* $y'=ay$ összefüggés, ahol *a és b* valós számok. A mű tárgyalja a görbék metszésével kapcsolatos problémákat, egyenletek, trigonometrikus egyenletek grafikus megoldását, transzcendens (nem algebrai) görbéket és sok más, az analitikus geometriai módszerrel megválaszolható kérdést. Kiemelkedő e műnek *A felületekre vonatkozó függeléke,* amely a térnek az első rendszeres és

alapos analitikus geometriai tankönyve. Ebben Euler kidolgozza a felületek tanulmányozására a tetszőleges síkkal való metszés módszerét. Felírta a térbeli derékszögű koordináta-rendszer origó körüli elforgatására vonatkozó transzformációs képleteket. Az elforgatást jellemző szögeket róla nevezték el. Ugyancsak ebben a könyvben olvashatók először az el nem fajuló másodrendű felületek egyenletei: az ellipszoidé, az egyköpenyű és a kétköpenyű hiperboloidé, valamint az elliptikus és a hiperbolikus paraboloidé, tehát mind az öt alaptípusé.

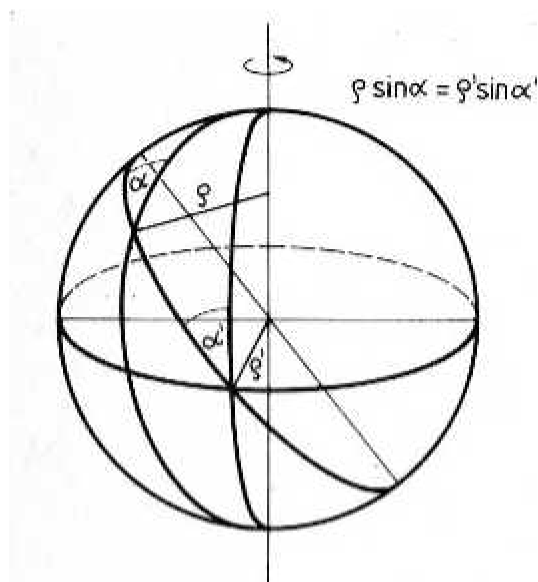
EULER AZ *Introductió*ban a differenciál- és integrálszámítás akkor még hiányzó rendszeres felépítését akarta megmutatni, és az analitikus geometriai rész ennek az előkészítése. Érthető tehát, hogy ebben a részben is bőven találhatók függvénytani részletek, amelyekben jelentős szerephez jutott a differenciálszámítás.

Éppen az infinitezimális számításnak a geometriában való alkalmazása ágaztatta el az analitikus geometriából a differenciálgeometriát, a geometriának azt a területét, amely az algebrai görbéket és felületeket hangsúlyosan a differenciálszámítás módszereivel vizsgálja.

A DIFFERENCIÁLGEOMETRIA



296. ábra



297. ábra

A differenciálgeometria EULERnél már egészen határozott formában jelentkezett, de Clairaut műveiben is számos differenciálgeometriai

eredmény található, sőt ha szigorúan vesszük, akkor már a differenciálszámítás newtoni és leibnizi megfogalmazása előtti idők úttörői is mutattak fel nem egy olyan felfedezést, amelyet ma joggal utalhatunk a differenciálgeometria körébe.

CLAIRAUT-nak az 1731-es, a kettős görbületű görbékről írt könyvében már megjelentek a tipikusan differenciálgeometriai feladatok: a görbék érintőinek, normálisainak a meghatározása, a szubtangensek és szubnormálisok kiszámítása, ívhossz-számítás stb. *(296. ábra).* CLAIRAUT 1733-BAN RÉSZT VETT A MAUPERTUIS (16981759) ÁLTAL VEZETETT LAPPFÖLDI FOKMÉRÉSBEN, AHOL A MI SAJNOVICS JÁNOSUNK IS JELEN VOLT. CLAIRAUT ÉSZREVETTE, HOGY A FÖLD GEODETIKUS VONALAIRA (A FELÜLET KÉT PONTJA KÖZÖTT A FELÜLETEN MÉRT LEGRÖVIDEBB TÁVOLSÁGÚ GÖRBE) IGAZ, HOGY MINDEN PONTJUKBAN A PONTON ÁTMENŐ ÉS A FORGÁSTENGELYRE MERŐLEGES KÖR SUGARÁNAK, VALAMINT A GEODETIKUS VONAL ÉS A MERIDIÁNKOR ÁLTAL BEZÁRT SZÖG SZINUSZÁNAK A SZORZATA ÁLLANDÓ *(297. ábra).* Ezt az eredményt általánosította és bizonyította tetszőleges forgásfelületre. Ugyanekkor, 1728 és 1732 között Euler is foglalkozott a felületek geodetikus vonalaival. Azok differenciálegyenleteiből számos következtetést vont le. Kimutatta például, hogy a felületben erőhatás nélkül mozgó tömegpont mindig a felület valamelyik geodetikus vonalán halad. A geodetikus vonalak meghatározásával és vizsgálatával, amely egy bizonyos jellegű szélsőérték-számításon alapul, indult meg 1744-ben Euler nyomán a variációszámítás is.

EULER DIFFERENCIÁLGEOMETRIAI EREDMÉNYEIT 1767-BEN KÖZÖLTE A *Vizsgálatok a felületek görbületéről* című tanulmányában. A térképészet problémái ösztönözték arra, hogy tanulmányozza a síkba kiteríthető felületeket. Differenciálgeometriai módszerekkel megállapította valamely felület síkba fejthetőségének a feltételeit (1771).

Sok-sok részeredmény után a differenciálgeometria igazán önálló területté vált Monge működése következtében. A Politechnikai Főiskolán tartott egy, *Az analízis alkalmazása a geometriában* című kurzust, amely differenciálgeometria volt. E tárgyhoz tankönyv még nem lévén, ő maga állította össze hallgatói számára 1795-ben a *Feuilles d’analyse* (Analízisjegyzetek) című

kiadványát, amelyben kirajzolódott a sok részében ma is korszerű háromdimenziós analitikus geometria. Néhány évvel később, 1802-ben a főiskola folyóiratában terjedelmes cikket közölt Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) francia matematikussal karöltve *Application dalgébre á la géométrie* (Az algebra alkalmazása a geometriában) címmel. A tanulmány Püthagorasz tételének egy szép általánosításával kezdődik: annak a bebizonyításával, hogy ha egy síkidomot három, egymásra kölcsönösen merőleges síkra vetítünk, akkor a vetületek területeinek négyzetösszege akkora, mint a síkidom területének a négyzete. Itt Monge pótolta azt, ami Clairaut és Euler analitikus geometriájából kimaradt, nevezetesen részletesen tárgyalta az egyenes térbeli analitikus geometriáját. E rész tárgykörei: az egyenes mint két sík metszete, pont és egyenes távolsága, kitérő egyenesek távolsága, az egyenes vetületének egyenlete, az egyenesre, síkra merőleges egyenes stb.

Monge új eredményei között van két tétel, amelyet róla neveztek el. Az első szerint a tetraéder élfelező merőleges síkjai egy pontban találkoznak, a Monge-féle pontban, amely a tetraéder csúcsain átmenő gömb középpontja. A második tétel egy elég meglepő mértani helyet határoz meg: Azon derékszögű testszögletek csúcsainak mértani helye, amelyek oldalai érintenek egy másodrendű felületet: gömb, amelyet Monge-féle gömbnek neveznek.

A részletfelfedezések mellett Monge fő érdeme a differenciálgeometria nagykorúsítása. Igaza lett LAGRANGE-nak amikor azt mondta: „Az analízisnek a geometriábani alkalmazásával ez az ördögi ember halhatatlanságot fog szerezni magának.”

Monge, ez a ha nem is ördögi, de mindenképpen kiváló kutató és nagyszerű pedagógus nem szeretett tankönyveket írni. Így végül is adós maradt az általa előadott teljes analitikus geometriai, illetve differenciálgeometriai anyag kézikönyvszerű feldolgozásával. Ezt a munkát azonban - bizonyítva tanítványaira gyakorolt hatását - elvégezték követői. Rövid négy esztendő alatt, 1798 és 1802 között átlag minden évre jutott egy kiváló analitikus geometriai mű. Ezek írói között volt

SYLVESTRE FRANCOIS LACROIX, JEAN-BAPTISTE BIOT (1774-1862) és Louis PUISSANT (1769-1843). Ezek a sikeres könyvek szokatlanul sok kiadást értek el. Így például LACROIX-nak, MONGE tanítványának és későbbi tanártársának a művét kerek 100 év alatt huszonötször adták ki. Ezt a könyvet a mi BOLYAI JÁNOSunk is haszonnal forgatta.

A differenciálgeometria későbbi fejlődési irányát nagyban befolyásolta, hogy Monge a differenciálegyenletek elméletét alkalmazta a geometriában. Észrevette ugyanis a parciális differenciálegyenletek és a felületelmélet nagyon termékeny kapcsolatát. Sikerült az elsőrendű parciális differenciálegyenletek geometriai értelmezése. Kiderült, hogy a felületek szerkezeti tulajdonságainak vizsgálatában sokszor fontosabb szerepet játszik a parciális differenciálegyenlet, mint a felület algebrai egyenlete. Ekkor a felület származtatása valamely görbe mozgatásával történik. Így összekapcsolódnak a geometriai és a mechanikai fogalmak a differenciálegyenletekkel. Ez a szemlélet magában hordozta a differenciálgeometria egy későbbi szakaszának a kifejlődését.



298. ábra

Ugyancsak ilyen messzehatóan alapozó szerepet játszott Monge egy feladata, amely az 1794-ben megjelent *Memoire sur la théorie des déblais et remblais* (Tanulmány az árok és a töltés elméletéről) című könyvében olvasható. A *298. ábrán* látható az *A* árok és a belőle eltávolított *F* földhányás keresztmetszete. Az árkot határoló felület felszíne természetesen más, mint a földhányást határolóé, bár a kettő által bezárt térfogat egyenlő. A feladat azt kívánja, hogy az *F* földdel tömjük be az *A* árkot a lehető legkisebb munkavégzés árán. Az *F* földsáncot bontsuk gondolatban tömegpontokra. Az *m* tömegpont például az mpm_1 egyenes szakasz mentén kerüljön be az árokba. A föld minden kis *m* tömege a *p* párkányvonalat szelő valamely egyenes mentén jut el végső helyére. Ezek az egyenesek a

megfelelő kikötések esetén kétparaméteres egyenessereget képeznek. A kétparaméteres egyenesseregeket sugárkongruenciáknak nevezik, és pontosan ezek vizsgálata vezetett a sugárkongruenciák későbbi általános elméletére, amely különösen az optikában talált alkalmazásra és fejlődési lehetőségre.

Ebből a szempontból különösen fontos Étienne Louis Malus (1775-1812) francia fizikus 1808-ban megjelent *Optikája,* amely a címhez hűen fénytani vizsgálatokkal (fénypolarizáció) foglalkozik. A fénysugarak fizikai viselkedését leíró matematikai apparátus kibővítése végett foglalkozott Malus a sugárkongruenciákkal. Egyrészt új tételeket bizonyított, másrészt ő vezette be új fogalomként a fényvisszaverődéssel és a fénytöréssel összefüggő komplex sugárcsaládnak, azaz a három paramétertől függő egyenesek seregének a fogalmát. (Mint fizikus kimutatta, hogy egy felületről való visszaverődéskor és fénytöréskor a fénysugarak megőrzik az ún. normál sugárkongruenciák - valamely felületre merőleges sugárkongruenciák - tulajdonságait.)

Malus munkája után 22 évvel jelent meg William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus *Supplement to an essay on the theory of systems of rays* (Kiegészítés a sugárrendszerek elméletéről szóló tanulmányhoz) című értekezése. Ennek megállapításai közül a legfontosabb az a Hamilton-tétel, amely összefüggést fogalmaz meg két, egymáshoz közeledő, egymásra merőleges sugárkongruencia alappontjainak határhelyzete között.

A következő nagy általánosítási lépést Julius Plücker kiváló német geométer tette meg. *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise* (A térgeometria rendszere új analitikus tárgyalásmódban) címen a *Journalé für Mathematique* folyóiratban jelent meg alapvető cikke 1846-ban, de már az 1831-ben kiadott *Analitische-geometrische Entwicklungenben* (Analitikus geometriai fejtegetések) meglepő gondolatokat és elveket közölt. A Gergonne és Poncelet által felfedezett dualitástételt általánosította, éspedig úgy, hogy ezzel új geometriák kibontakozását tette lehetővé. Alapvető gondolatmenete a Descartes-féle síkbeli koordináta-rendszerre vonatkozó egyenes egyenletéből indult ki. Itt az elsőfokú egyenletben (például: $y = ax + b$) mindig két Descartes-féle koordináta szerepel változóként, és

két, az egyenes helyét rögzítő paraméter. Plücker észrevette, hogy ha a változók és a paraméterek szerepét felcseréljük, akkor az egyenlet már nem az egyenesnek, hanem egy sugársornak, azaz egy pontnak az egyenletévé válik. Ha ugyanis az x és y koordinátákat rögzítjük, amivel a $P(x; y)$ pontot határoztuk meg és a paramétereket (például az iránytangenst és annak megfelelően az y-tengelyből lemetszett darabot) változtatjuk, akkor a P tartójú sugársor, vagy más szavakkal: a P pont egyenletét kapjuk. Plücker így fogalmazott: az első esetben a pontok kétdimenziós terében a kétparaméteres egyenlet kijelölt egy egyenest, a második esetben az egyenesek kétdimenziós terében az ugyancsak kétparaméteres egyenlet meghatározott egy pontot. Először a síkot ∞^2 pont halmazának tekintettük, másodszor pedig ∞^2 egyenes összességének, tehát a sík szerkezeti felépítésében volt a különbség. Előbb térelemnek használtuk a pontot, utóbb pedig az egyenest. E gondolatmenetben hangsúlyt nyert, hogy a tér annyi dimenziós, ahány paraméter van a térelemet meghatározó egyenletben. Igen ám, de ugyanabban a síkban például a kör egyenletében három, egymástól független paraméter van. Az előbbiek szerint, ha térelemnek a kört választjuk, akkor a sík ∞^3 számú körnek a háromdimenziós halmaza.

Az elmondottak értelemszerűen átvihetők a pontok háromdimenziós terére is. Tehát a térnek - KANTtal ellentétben - nem abszolút tulajdonsága a dimenzió. A dimenziószám a tér szerkezetétől, azaz attól függ, hogy milyen elemekből építjük fel.

A síkban a pont és az egyenes duálelemek, mindkettőnek ugyanannyi dimenziójú tere a sík. Plücker e megállapítást így általánosította: ha két térelemnek ugyanaz a tér ugyanannyi dimenziójú tere, akkor azok duálelemek. Gergonne és Poncelet duálelméletéről a felfedezők és PLÜCKERig mások is úgy vélték, hogy a dualitás a tér abszolút tulajdonsága. Plücker a dualitási elvet koordinátageometriai úton vezette le, és nála ez az elv a koordináták szabad megválasztásának természetes következménye.

PLÜCKER TETSZŐLEGES TÉRSZERKEZETI FELFOGÁSA TOVÁBBI ÁLTALÁNOSÍTÁST TETT LEHETŐVÉ. NÁLA MÉG AZ EGYENLET PARAMÉTEREI MINDIG SZÁMOK VOLTAK. A XX. SZÁZADBAN AZONBAN MAURICE RENÉ FRÉCHET (1878— 1973) ELŐSZÖR

TANULMÁNYOZTA AZOKAT A TEREKET, AMELYEKBEN A TÉRELEMET MEGHATÁROZÓ PARAMÉTEREK NEM FELTÉTLENÜL SZÁMOK. ÍGY JUTOTT EL 1906-BAN AZ ABSZTRAKT TEREK ELMÉLETÉHEZ, AMELYEK ÁLTALÁNOS DEFINÍCIÓJÁT TŐLE FÜGGETLENÜL A MAGYAR RIESZ FRIGYES (1880-1956) IS MEGADTA.

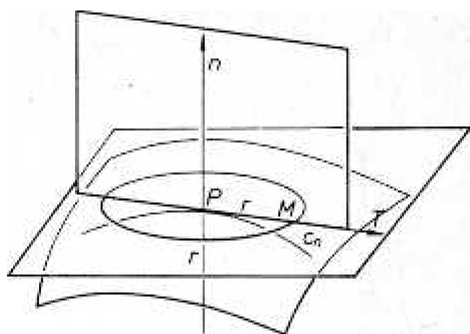
A tér egyeneseinek különböző serege, családja különleges tulajdonságokkal különleges szerepeket kaphat. Plücker a következő egyenesseregeket tanulmányozta: az egy ponton átmenő végtelen sok egyenes halmazát, vagyis a sugársort; a már említett sugárkongruenciát, amely ∞^2 sok, két paramétertől függő egyenest tartalmaz, és végül a komplex egyenessereget (röviden csak komplex), amelyben ∞^3 számú, három paramétertől függő egyenes van. Plücker a térben az egyenest két sík metszeteként fogta fel, tehát a meghatározásához szükséges $x = az + b$ *és* $y = cz + d$ egyenletekben négy paraméter van, azért Plücker térgeometriája az egyenesek négydimenziós terének a tudománya. A sugárkongruencia és a komplex elnevezések is PLÜCKERtől valók. Két komplex sugárcsalád egybeesését nevezte sugárkongruenciának (kongruencia = egybeesés).

A differenciálgeometria történetéből nem hagyható ki Monge tanítványának, Charles Dupinnek (1784-1873) a neve. Ez a francia tengerésztiszt-matematikus 16 éves korában fedezte fel a Dupin-féle cikloidot, amikor tanulmányozta a három adott gömböt burkoló gömbök seregét, ő vezette be a róla elnevezett indikátrixgörbe fogalmát, amelynek segítségével szemléletesen tanulmányozható a felület normálgörbületeinek a változása. E változás megismerése vezetett a felületi pontok osztályozásához: elliptikus, hiperbolikus és- parabolikus pontok. A könnyebb megértés kedvéért szabad legyen néhány alapfogalmat ismertetnem.

A felület egy P pontjához tartozó érintősíkra az érintési pontban merőleges egyenest a felület P pontbeli normálisának nevezzük.

Ezen a normálison átmenő, tehát az érintősíkra merőleges síkok a P ponthoz tartozó normálsíkok. A normálsíkok a felületből kivágnak egy-egy c_n felületi görbét (normálmetszetek), a P pontbeli érintősíkból pedig egy-egy PT egyenest *(299. ábra)*. Nyilván a PT egyenes mind a c_n görbét, mind az adott felületet érinti a P pontban. Legyen a c_n görbének a P ponthoz tartozó görbületi sugara

r. E sugár reciprokával szokás jellemezni a P pontban a c_n görbületének a nagyságát, ezért ezt görbületi mértéknek, röviden görbületnek nevezik. Mérjük fel az r görbületi sugarat a PT egyenesre: $PM = r$. Ha most a normálsíkot megforgatjuk a P pontbeli normális körül, akkor az egyes M pontok az érintősíkban leírnak egy görbét, amelyet a felület P pontjához tartozó Dupin-féle indikátrixának hívunk. Bizonyítható, hogy ez az indikátrix mindig kúpszelet. Az indikátrix M pontbeli görbülete egyenlő a megfelelő normálmetszet P pontbeli görbületével. Így a normálmetszetek P pontbeli görbületét valóban igen szemléletesen mutatja az indikátrix. Aszerint, amint az indikátrix ellipszis, hiperbola vagy parabola, az illető P pontot elliptikusnak, hiperbolikusnak vagy parabolikusnak nevezzük.



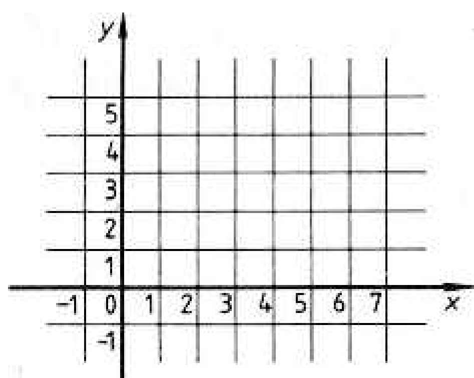
299. ábra

A normálsík forgatásakor találunk egy olyan helyzetet, amelyhez a legnagyobb görbületi sugár (például az ellipszis indikátrixnál a nagytengely), és találunk olyat, amelyhez a legkisebb görbületi sugár (például a kistengely) tartozik. E helyzetekben a normálgörbületet főgörbületnek nevezzük. Jelöljük az egyiket g_1-gyel, a másikat g_2-vel. E két főgörbület szorzata (a Gauss-féle görbület) alapján is szokás a felületi pontok osztályozását megfogalmazni. Legyen ugyanis egy felület P pontjában a Gauss-féle görbület $k = g_1 \cdot g_2$, akkor $k > 0$ esetén a P pont elliptikus, a P pont tetszőleges kis környezetében a felületdarab a P pontbeli érintősík egyik oldalára esik, például a gömbnél; $k < 0$ esetben a P pont hiperbolikus. Ekkor a P pont tetszőleges kis környezetében a P ponthoz tartozó érintősík a felületet átmetszi, például a hiperbolikus paraboloid pontjainál; $k = 0$ esetében a P pont

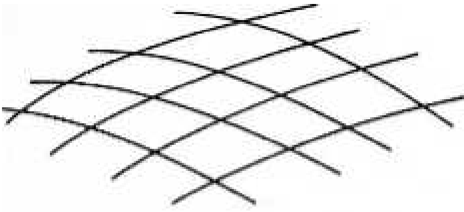
parabolikus, a *P* pont tetszőleges kicsiny környezetében a felületnek van pontja a *P* ponthoz tartozó érintősíkban, például a forgáshenger pontjainál, ahol az indikátrix két párhuzamos egyenessé degenerált parabola.

A Gauss-féle görbület neve át is vitt bennünket a matematikusok fejedelmének, GAUSSnak a birodalmába. Itt bukkanunk rá a differenciálgeometria, egyszersmind az analitikus geometria további jelentős fejlődési szakaszára. Bárhogyan is határozzuk meg a síkban egy pont helyét, az mindig két számadattal történik, például a Descartes-féle koordináták esetében is, és a polárkoordináták használatakor szintén. Ez a két szám azonban magának a koordinátasíknak a helyzetéről semmit sem mond, tehát ezek a számpárok a sík „belső” geometriáját jellemzik, a síkon belüli geometriai feladatok számára teszik lehetővé az algebrai módszert.

Gauss ezt a gondolatot vitte át a koordinátasíkról tetszőleges felületre. Vegyük észre, hogy a Descartes-féle síkon a két koordinátának például az egész értékei egy egyeneshálót határoznak meg a *300. ábra* szerint. Persze ez a háló az x és y értékek megválasztásával tetszés szerint sűríthető. Vegyük ehhez még azt is, hogy az x és y koordináták valamely u és v paraméterpár függvényeként is megadhatók. Ez történik például, amikor a derékszögű koordinátákat átírjuk polárkoordinátákra. Általában x és y megadható



300. ábra



301. ábra

$x = x(u;v)$ $y = (u; v)$

paraméteres alakban, ahol x és y folytonos és differenciálható függvénye az u és v változóknak. A továbbiak miatt ki kell kötnünk azt is, hogy az ún. függvénydeterminráns:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Amikor Gauss a hannoveri kormány megbízásából a tartomány geodéziai felmérését vezette, arra gondolt, hogy miért ne lehetne a szeszélyesen változó földfelszínt is az előbbiek mintájára beborítani két vonalsereg által alkotott vonalhálóval. Természetesen most a görbe koordinátavonalak általában nem merőlegesen metszik egymást *(301. ábra).* A Gauss-féle görbe vonalú koordinátarendszerben a felületen a felület pontjait az *u, v* számpárok egyértelműen meghatározzák.

GAUSSnak a görbe vonalú koordináták bevezetése után kiemelkedő felfedezése volt az, hogy valamely felület geometriája teljesen felépíthető a felületen mért távolság definíciója alapján. A szemléletesség kedvéért gondoljunk megint a síkra. A sík $P_1(x_1;y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontjainak távolságát meghatározza az ismert

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

képlet. Itt most az x_1, y_1 és x_2, y_2 koordinátákat csupán a két

ponthoz rendelt számpároknak tekintjük, megfosztva azokat minden távolságmérték jellegüktől. Ebből az egyetlen távolságdefinícióból nyerhető az egyenesnek mint a két pontot legrövidebb úton összekötő görbének az egyenlete, és a körnek mint a centrumtól azonos távolságú pontok összességének az egyenlete is. A szög mérőszáma pedig a körív és a sugár hányadosa értelmezés alapján érhető el. Ilyen módon a távolságdefinícióból előáll a sík geometriájának minden építőeleme.

Így van ez akkor is, ha a távolságdefiníciót infinitezimális mennyiségekkel fogalmazzuk meg. Ekkor az (x ; y) pont és az $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ pont közötti távolság négyzete

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

ahol a dx és dy jelölik, hogy a Δx és Δy tetszőleges kicsinnyé tehetők. Ezen definíció alapján az $y = f(x)$ görbe P *és* Q pontok közötti ívének s hosszát meghatározza az

$$s = \int_P^Q \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

képlet. Megkereshető az az $f(x)$ görbe, amelynél a tetszőleges két pontja közti távolság a görbén mérve a legkisebb. Eredményül a síkban az egyenes egyenletét kapjuk, és távolságképletként az

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

összefüggést. Visszajutottunk tehát az előbbi gondolatmenetünk kezdetéhez. Elég eszerint a távolságot infinitezimális mennyiségekkel meghatározni. Az x és y koordináták helyett természetesen használhatók valamely felületen a Gauss-féle görbe vonalú koordináták is. Gauss kimutatta, hogy a térbeli esetben is az ívelem

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

definíciója alapján felépíthető valamely térbeli görbült felület teljes

geometriája.

Gauss azonban maga is meglepőnek találta, és ezért theoria egregiumnak (kiemelkedő tételnek) nevezte el azt a felfedezését, hogy valamely felületnek a Gauss-féle görbülete előállítható csupán a felületen definiált, tehát az u és v paraméterekkel meghatározott ívelem segítségével. Ez azért meglepő, mert az ívelem a felület belső tulajdonsága, meghatározására nem kell a felületből kilépni a térbe, ugyanakkor a Gauss-görbület kimondottan a felületen kívüli térben tükrözi a felület alakját. Ennek messzemenő fizikai következményei is vannak. Nem jelent ez kevesebbet, mint azt, hogy a felületben élő értelmes lény következtetni tud csupán felületének belső geometriai tulajdonságaiból felületének görbültségére. Általánosítva: Mi, a háromdimenziós lények meg tudjuk - meg tudtuk - állapítani a negyedik dimenzió érzékelése nélkül is, hogy terünk görbült, Gauss-féle görbülete kiszámítható. Az igazság kedvéért megjegyezzük, hogy terünk görbültségét fizikai jelenségekből állapíthattuk meg Albert Einstein relativitáselmélete alapján. Einstein azonban fizikájának geometriájához nem véletlenül kérte kölcsön a Gauss-féle görbe vonalú koordinátákat. A Bolyai-Lobacsevszkij-geometria kedvéért - amelyről később szándékozom szólni - kitérek Gaussnak egy szintén meglepő differenciálgeometriai eredményére. Rábukkant a nevezetes

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\int_{\Delta} k \cdot \mathrm{d}\sigma$$

összefüggésre, ahol α, β és γ valamely felületen a geodetikus vonalak által bezárt háromszög szögei, k a Gauss-féle görbület és $\mathrm{d}\sigma$ a felületelem. *Az* integrálást ki kell terjeszteni a háromszög egészére. Az állandó k görbületű felület esetében k az integráljel elé emelhető, és

$$\int_{\Delta} \mathrm{d}\sigma$$

a háromszög t területe. Ekkor tehát

$kt = \alpha + \beta + \gamma — \pi.$

A k értéke szerint a következő esetek lehetségesek:

1. Ha $k > 0$, azaz a felület minden pontja elliptikus, akkor

$$t = \frac{1}{k}(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

2. Ha $k < 0$, azaz a felület minden pontja hiperbolikus, akkor

$$t = \frac{1}{k}(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

3. Ha $k = 0$, azaz a felület minden pontja parabolikus, akkor

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

ami az euklideszi geometria jellemző törvénye.

Németországban Gauss kezdetben nem talált követőkre a differenciálgeometria területén, valószínűleg azért, mert a német matematikusok zöme a *Crelle-Journal* köré csoportosult, és e folyóirat akkori iránya inkább a szintetikus és az algebrai geometria felé mutatott. Mégis közvetlenül Gauss hatása alatt gazdagította a tárgykört néhány felismeréssel Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Eredményei közül kiemelkednek az ellipszoid geodetikus vonalaira vonatkozó 1838-as vizsgálatai és 1843-ban annak a feltételnek a megfogalmazása, amely mellett a geodetikus vonalak a legrövidebbek. Ő azonban főleg a függvényelméletben fejtett ki fontos alkotó munkásságot.

A felületek belső geometriájának alapvetően jelentős kutatója volt a kortársai által eléggé meg nem becsült

Ferdinand Adolf Gottlieb Minding (1806-1885). Jogászcsaládban született, a lengyelországi Kaliszban. Először Hallében, azután a berlini egyetemen hallgatott filozófiát és nyelvészetet. Látogatott természettudományi előadásokat is, de a matematikát autodidaktaként sajátította el. 1830-ban Hallében az

integrálszámítás tárgykörből doktorált, és ez feljogosította, hogy a berlini egyetemen magántanárként előadásokat tartson algebrából, analízisből és mechanikából. 1834-től a berlini építészeti főiskolán tanított, de hosszú évek munkájával sem tudta elérni sem az akadémiai tagságot, sem a professzori katedrát a német egyetemek valamelyikén. Így aztán 1844-ben elfogadta a tartui egyetem meghívását. 40 évig dolgozott Oroszországban megbecsült tudósként. Családjával együtt felvette az orosz állampolgárságot is. Tanítványa volt a moszkvai geometriai iskola megalapítója: Karl Mihajlovics Peterszon (1828-1881).

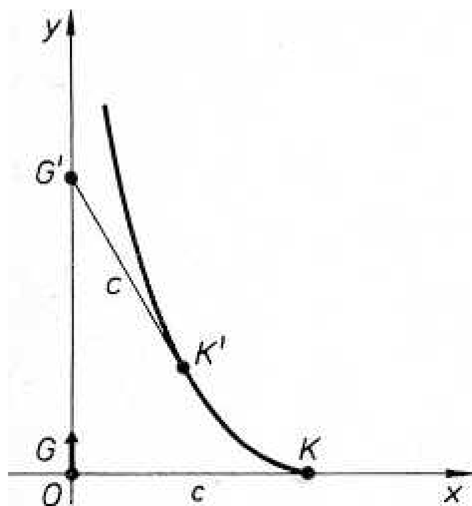
Minding 1865-ben levelező, és 1879-ben rendes tagja lett a szentpétervári Akadémiának. A matematika sok területével foglalkozott eredményesen: algebrával, számelmélettel, differenciálegyenletekkel, az algebrai függvények integrálásával és ami most bennünket leginkább érdekel: a geometriával.

1830-ban bevezette a geodetikus görbület fogalmát, amely a görbületi vektornak az érintősíkra való vetülete. Az elnevezés Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) francia matematikustól származik. Minding akkor jutott ehhez a hasznos fogalomhoz, amikor a *Journal für Mathematatik* című folyóiratban megjelent, Ü*ber die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flachen* (A görbe felületek legrövidebb kerületű görbéiről) című cikkében megkereste azt a legkisebb kerületű görbét, amely egy görbe felületen adott területet határol. Az így kapott görbét nevezte el geodetikus körnek. Tisztázta az ilyen kör létezésének a feltételét is a folytonos görbületű felületek esetében.

Már Euler bebizonyította, hogy minden térgörbe érintői síkba fejthető felületet alkotnak (1771), Monge pedig 1775-ben azt, hogy valamely síkba fejthető felület értelmezhető úgy, mint valamely térgörbe érintőinek a mértani helye. Ezekre a tételekre támaszkodva Minding 1837-ben a *Beweis eines geometrischen Satzes* (Egy geometriai tétel bizonyítása) című tanulmányában kimutatta, hogy a geodetikus görbület megkapható, ha a felületi görbe érintői által meghatározott felületet síkba fejtjük. Ekkor a felületi görbének megfelelő síkgörbe görbülete a geodetikus görbület. Ez a módszer termékenynek bizonyult az olasz Tullio Levi-Civita

(1873-1941) kezében, amikor megalapozta a felületi görbe menti vektor párhuzamos metszetének módszerét 1917-ben. Eljárása ma alapját képezi a Riemann-terek és azok általánosításai vizsgálatának.

1838 és 1840 között jelentek meg MINDINGnek azok az írásai, amelyek a felületek hajlíthatóságával, azaz azokkal a törvényekkel foglalkoznak, amelyek a hajlításkor invariánsok maradnak. Ezek között a cikkek között van az is, amelyben tárgyalta a felületek egymásra fektethetőségét. Majdnem teljesen sikerült tisztáznia a felületek egymásba hajlíthatóságának a feltételeit. Elméletének hiányait a már említett Bonnet pótolta 1865-ben. MINDINGnek a hajlíthatóságra vonatkozó vizsgálatait többek között Heinrich Liebmann (1874-1933) német és Alekszej Vasziljevics Pogorjelov (1919—) szovjet matematikus folytatta.

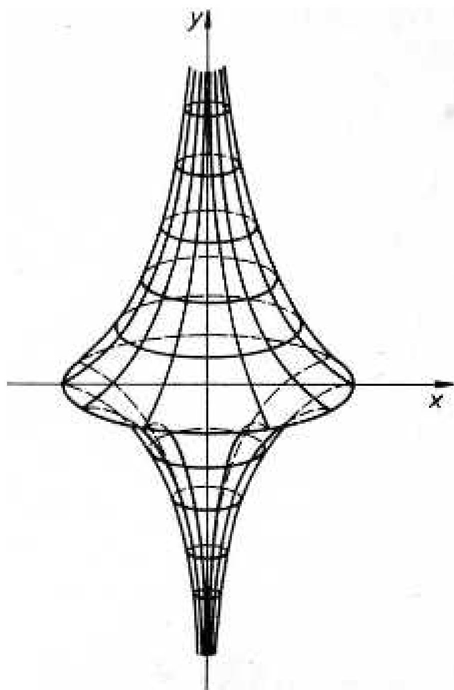


302. ábra

A Bolyai-Lobacsevszkij-geometria vonatkozásában vált fontossá egy Minding által feltalált felület, amelyet Eugenio Beltrami (1835-1900) olasz matematikus pszeudoszférának nevezett el. ő vette észre, hogy a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria ezen a felületen érvényes. A pszeudoszférát Minding az állandó Gauss-görbületű felületek kutatása közben fedezte fel. Így jutott el a traktrix-görbe megforgatásából származó pszeudoszférához. A traktrix vagy más nevén a vontatási (üldözési) görbe származtatható a

következőképpen : A *302. ábra* x-tengelyén egy kutyát *(K)* gazdája (G) az y-tengely mentén haladva húz maga után a $GK = G'K' = c$ hosszú pórázon. A kutya azonban vontatja magát úgy, hogy ellenszegül a pillanatnyi $G'K'$ pórázzal egy vonalba eső és a G'-től elirányuló erővel. Így a kutya olyan, az y-tengelyhez aszimptotikusan közeledő görbén mozog, amelynek bármely c érintő szakasza, amely az érintési ponttól az y-tengelyig tart: állandó.

Szokás ezt a görbét üldözési görbének is nevezni, mert ilyen görbén mozog az a kutya is, amely az y-tengelyen állandó sebességgel menekülő nyulat üldözi, ha a kutya mozgási iránya mindig a futó nyúl felé mutat, az x-tengely valamelyik pontjából indul és a kutya-nyúl távolság állandó. Minding ezt az x-tengelyre vonatkozó tükörképével kiegészített vontatási görbét, amelynek az egyenlete



303. ábra

$$y=\pm\left(c\cdot\ln\frac{c+\sqrt{c^2-x^2}}{x}-\sqrt{c^2-x^2}\right),$$

megforgatta az y-tengely körül. Az így keletkezett felületet a *303. ábra* szemlélteti. Minding azt találta, hogy a pszeudoszféra Gauss-féle görbülete minden pontjában negatív, éspedig $k=-1/c^2$, azaz a felület minden pontja hiperbolikus. Ezután az állandó negatív görbületű felület egy geodetikus vonalakkal határolt háromszögére olyan trigonometriai összefüggést vezetett le, amelyben a hiperbolikus függvények játszották a fő szerepet, és amelyből a hiperbolikus trigonometria minden összefüggése következett. Minding ezt az eredményt 1840-ben publikálta a *Journal für Mathematik* folyóiratban *Beitrage zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flachen* (Adalékok a görbe felületek legrövidebb vonalainak elméletéhez) címmel. Ekkor pedig már Bolyai és Lobacsevszkij is kidolgozták a hiperbolikus geometriát, amelyben éppen a hiperbolikus függvények trigonometriája kapott jelentős helyet. Minding eredményeit azonban nem ismerték, bár Lobacsevszkij is az előbb említett folyóiratban közölte 1837-ben a *Voobrazsemaja geometria* (Elképzelt geometria) című írását. Bizonyos, hogy a nemeuklideszi geometria elfogadtatása lényegesen könnyebb lett volna, ha rá tudnak mutatni egy olyan felületre, amelyen ez a geometria megvalósul. A hiperbolikus geometria és a pszeudoszféra közötti összefüggést

Eugenio Beltrami (1835-1900) olasz matematikus vette észre, amikor térképészeti céllal olyan felületeket keresett, amelyek geodetikus vonalainak a síkra való leképezéskor egyenesek felelnek meg. (A geodetikus vonal az a felületi görbe, amelynek minden pontjában a felületi normális és a görbe főnormálisa egybeesik.) Úgy találta, hogy ilyenek a gömbfelület és az állandó negatív görbületű felületek. Az utóbbira példa a Minding-féle pszeudoszféra.

Beltrami Cremonában született. Tanított a bolognai és a római egyetemen. 1873-ban tagja, 1898-ban pedig elnöke lett a római *Academia dei Linceinek.* 1868-ban jelent meg *Saggio di interpretazione delta geometria non-euclidea* (Kísérlet a nemeuklideszi geometria értelmezésére) című írása, amely Európa-szerte ismertté és elfogadottá tette a Bolyai-Lobacsevszkij-geometriát. A

differenciál-geometrián kívül eredményeket ért el a differenciálegyenletek elmélete és a matematikai fizika területén.

Természetesen e könyv szűk határai között lehetetlen mindenkit méltóképpen említeni, aki a XIX-XX. században a differenciálgeometria kiterebélyesedő területén sikeresen működött. Meg kell elégednünk néhány kiemelkedő matematikus mellett a többieknek szinte csupán név szerinti felsorolásával.

Franciaországban - mint láttuk - a differenciálgeometriának erős gyökerei voltak. A XIX. század elejéről nem hagyható ki Lamé és Saint-Venant munkássága.

Gabriel Lamé (1795-1870) francia mérnök, matematikus és fizikus Tours-ban született. A Politechnikai Főiskolán végzett. 25 éves korában meghívták a pétervári Közlekedésügyi Főiskola előadójának. 1832-ben visszatért hazájába, és a párizsi politechnikai iskola professzora lett. 1843-ban választották akadémikussá. Az 1840-ben megjelent *Mémoire sur les coordomées curvilignes* (Értekezés a görbe vonalú koordinátákról) című tanulmányában először használt az ortogonális rendszerekkel kapcsolatban térbeli görbe vonalú koordinátákat. Lamé valójában a matematikai fizikán belül a rugalmasság elméletével foglalkozott. A differenciálgeometriát tehát fizikai problémák megoldására használta. A görbe vonalú koordinátákról és azok alkalmazásáról 1859-ben egy igen sikeres tankönyve jelent meg.

Adhémard Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) szintén francia mérnök-matematikus volt. Ville-d'Avray-ben született, és oklevelét a Politechnikai Főiskolán szerezte 1816-ban. Mérnökként kezdte, majd később tanított a párizsi Utak és Hidak Főiskoláján, valamint Versailles-ban a Mezőgazdasági Egyetemen. Kutatási területe a rugalmasságtan, a hidrosztatika és a hidrodinamika. Matematikából eredményeket ért el a vektoranalízis és a differenciálgeometria területén. Az 1845-ben megjelent *Mémoire sur les lignes courbes non planes* (Értekezés a térgörbékről) című munkájában bevezette a binormális fogalmát.

Mivel a binormális és a vele kapcsolatos fogalmak a térgörbék kutatásában fontos szerepet kaptak, azért szabad legyen ezeket vázlatosan ismertetnem. Határozzon meg egy térgörbét az

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

paraméteres egyenletrendszer, vagy ennek vektoregyenletbe való összefoglalása,

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{i} \cdot x(s) + \vec{j} \cdot y(s) + \vec{k} \cdot z(s),$$

ahol i, j és k a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok. Ennek az r(s) görbének valamely P_0 pontbeli érintőjére merőlegesen fektessünk a P_0 ponton átmenő síkot. Ez a görbének a P_0 pontbeli normálsíkja. A normálsíknak tehát az érintővektor normálvektora. Képzeljük most el azt a síkot, amely átmegy az r(s) görbe P_0 ponthoz tartozó érintőjén és a görbe egy, a P_0-tól különböző *P* pontján. Közelítsük ezután a *P* pontot a görbén a P_0-hoz. Ha a P_0-beli érintőt és a közelítő *P* pontot hordozó síknak van határhelyzete a $P \to P_0$ esetben, akkor e határhelyzetsíkot a görbe P_0 pontjához tartozó simulósíknak nevezzük.

A P_0*-hoz* tartozó normálsík és a simulósík közös egyenese a görbe P_0-beli főnormálisa *(304. ábra).* A főnormális irányába mutató egységvektort a görbe főnormális egységvektorának hívjuk, és jelöljük n(s)-sel, röviden n-nel. Jelöljük a görbe érintőjének az irányába mutató egységvektort t(s)-sel, röviden t-vel. Ekkor: n□t. A Saint-Venant által bevezetett binormális: *b(s),* röviden *b,* az az egységvektor, amely a P_0 pontban merőleges a simulósíkra, tehát t-re és *n* -re is úgy, hogy *t*, *n* és *b* ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkosson. Ez vektoriális szorzattal kifejezve: *b* = t X n. Az itt szereplő három vektor egy háromoldalú testszögletet feszít ki, aminek a neve kísérő triéder. A térgörbék elméletében ezek a vektorok főszereplők, és hozzájuk csatlakozik még a görbület [g(s)] és a torzió (csavarodás, jele: χ) fogalma. Az előbbiről már volt szó, az utóbbira Frenet-vel kapcsolatban fogunk kitérni.

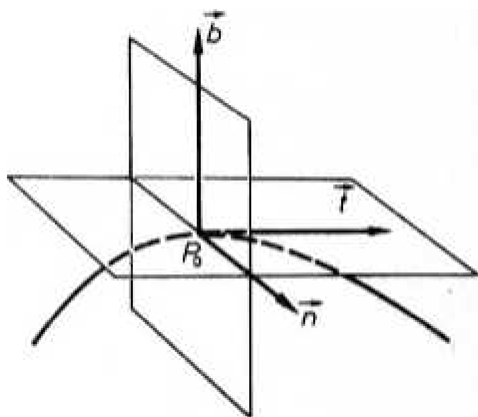
A XIX. század második harmadában a francia geometriai iskola Joseph Liouvuxe (1809-1882), a Politechnikai Főiskola és a Collégé de Francé professzora köré csoportosult. Ez az igen széles

érdeklődésű tudós továbbfejlesztette Monge tanait, és felhasználta Gauss differenciálgeometriai felfedezéseit is. Minding eredményeit szintén tárgyalta, de nevét nem említette. Ennek a francia differenciálgeometriai iskolának a tagja volt

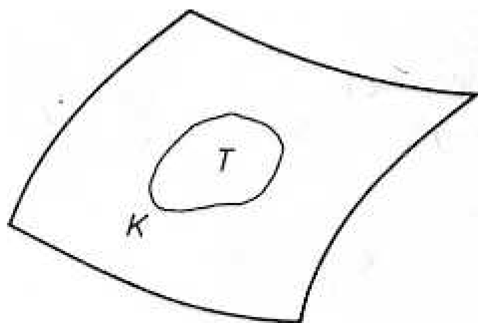
Pierre Ossian Bonnet (1819-1892), a Sorbonne professzora, aki általánosította GAUSSnak a geodetikus háromszögek szögösszegére vonatkozó tételét. E szerint:

$$\int_T k \cdot \mathrm{d}\sigma + \oint_K \frac{\mathrm{d}s}{\varrho} = 2\pi,$$

azaz a Gauss-görbület *T* területre kiterjesztett határozott integrálja, meg a geodetikus görbület (589. oldal) reciprokának a *T* területet határoló *K* kerületre kiterjesztett határozott integrálja éppen 2π *(305. ábra).* Ugyancsak ehhez az iskolához tartozott



304. ábra



JEAN FRÉDÉRIC FRENET (1816-1900) a lyoni egyetem tanára, 1847-ben, doktori disszertációjában megfogalmazta a róla elnevezett összefüggéseket az érintő (t) a főnormális (n), a binomiális *(b)* vektorok, a Gauss-görbület (*k*) és a torzió (χ) között:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + \chi\vec{b} \quad \text{és} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi\vec{n}.$$

Az első összefüggés rögzíti az *n* vektor irányát és a harmadik definiálja a χ torziót. A doktori disszertáció lényege *Sur les courbes á double courbure* (A kétszeres görbületű görbékről) címen 1852-ben cikk formában is megjelent. Ugyanezeket az összefüggéseket FreNET-től függetlenül megtalálta

Joseph Alfréd Serret (1819-1885) is, a párizsi Akadémia tagja, aki ilyen tárgyú eredményeit 1851-ben közölte a *Journal de mathématiques pures el appliquées* folyóiratban *Sur quelques formules relatives á théorie des courbes á double courbure* (Néhány formuláról, amely a kétszeres görbületű görbékre vonatkozik) címmel. Ugyanebben a lapban jelent meg FRENET hasonló tárgyú közleménye is 1852-ben. A Frenet-Serret-képletek lehetővé teszik, hogy a térgörbékre vonatkozó legfontosabb problémákat megoldhassuk. Szerepük volt abban is, hogy ekkoriban a térgörbék elméletéről néhány jól használható tankönyv is született, például J. A. SERRET rokonának, PAUL SERRET-nek (1827-1898) és FERDINAND JOACHIMSTHAL (1818-1861) breslaui professzornak a tollából.

A XIX. század második felében a differenciálgeometria jeles

művelőit Európa-szerte megtalálhatjuk. A sugárkongruenciákkal kapcsolatban már beszéltünk az ír HAMILTONról. Ennek a témakörnek volt kutatója ERNST EDUARD KUMMER (1810-1893) is, aki azonban fő eredményeit a számelméletben, az algebrában, az analízisben és a mechanikában érte el. Igazán nagy lendületet adott a differenciálgeometria felületelméletének

Julius Weingarten (1836-1910), a Berlinben született német matematikus, aki Freibergben volt a politechnikum professzora. Az 1861-ben megjelent *Über eine Klasse der Flachen die aufeinander abwickelbar sind* (Az egymásra lefejthető felületek egy osztályáról) című munkájában a felületek hajlításával kapcsolatos differenciálformulákat állította fel. Az általa közölt másodrendű differenciálformák a GAUSS által megadott koefficiensekkel (lásd a 687. oldalon) együtt olyan differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, amelynek a segítségével valamely hajlított felület meghatározható.

A Gauss-féle együtthatóképletek kiegészítését a másodrendű differenciálformulákkal Mainardi-Codazzi-formuláknak nevezik, mert Angelo Gaspare Mainardi (1800-1879) paviai olasz professzor és Delfino Codazzi (1824-1873), szintén paviai tanár egymástól függetlenül megoldották azt a feladatot, hogy adott kvadratikus differenciálformulák alapján a felületet meghatározzák: Mainardi 1857-ben Codazzi pedig 1868-ban. Mindkettőjüket megelőzte azonban

Karl Mihajlovics Peterszon (1828-1881) orosz matematikus, aki Rigában született, és a tartui egyetemen Minding tanítványa volt. Az odesszai egyetemen doktori fokozatot szerzett, de egész életében egy középiskola tanára maradt Moszkvában. Az ő működése óta beszélhetünk a moszkvai geometriai iskoláról, amely tehát differenciálgeometriával indult. Peterszon 1853-ban az *Über die Biegung der Flachen* (A felületek hajlításáról) című kandidátusi disszertációjában Gauss és Minding hatására, a felületek hajlításának kérdéseivel foglalkozva, meglátta a Gauss-féle együtthatók sajátos tulajdonságait, és megtalálta annak a feltételét, hogy ezek a másodrendű analitikai formák felületet határozzanak meg. A koefficiensek közti összefüggéseket kiegészítette még kettővel, és így létrejöttek a Gauss-Peterszon-féle differenciálegyenletek, a felületelmélet alapjai. Eredményeit először

1901-ben ismertette kivonatosan Paul Gustav Stackel (1862-1919) német matematikus és matematikatörténész. Ez a Berlinben született, Kidben, Hannoverben, Karlsruhéban és Heidelbergben dolgozó tudós, akinek abban is nagy szerepe volt, hogy a Bolyaiakra felhívja a világ figyelmét, maga is foglalkozott differenciálgeometriával, a differenciálegyenletek elméletével, számelmélettel és mechanikával. Peterszon említett munkája oroszul csak 1952-ben jelent meg. Nem csoda, hogy alapvetően fontos differenciálgeometriai felfedezései hosszú ideig hazájában is ismeretlenek voltak.

Éppen csak említeni szeretném még a differenciálgeometria egyik tárgykörét, a minimálfelületek elméletét. Ezen belül valamely felületen keresendő egy adott görbehosszal határolt legnagyobb területű felületidom. A minimálfelületek kutatói közül kiválik Heinrich Friedrich Scherk (1798-1885) bremeni tanár, Jacobi tanítványa, a *Bemerkungen über die kleinste Flachen innerhalb gegebener Grenzen* (Megjegyzések az adott határok közötti legkisebb felületekről) című, 1835-ös tanulmányával és a svájci születésű Emmanuel Gabriel Björling (1808-1872) uppsalai professzor az *In integrationem aequationis derivaíorum partialium superficiei, ...* (A felületek parciális differenciálegyenleteinek integrálásáról, ...) című, 1844-ben megjelent értekezésével.

A XTX. századi differenciálgeometria neves művelői között említjük meg: Francesco Brioschit (1824-1897), a paviai egyetem professzorát; Luigi CREMONÁt, az itáliai geometriai iskola megalapítóját és Jacques Edmond Émile Bourt (1832-1866), a párizsi politechnikai iskola mechanikatanárát.

E tudományág magyar művelői közül a legkiemelkedőbbek voltak: Dávid Lajos (1881-1962) debreceni professzor, aki eredményeit a *Gyakorlati differenciálgeometria* című könyvében foglalta össze; Varga Ottó (1909-1969) debreceni, majd budapesti egyetemi tanár és Horváth János (1922-1970) szegedi docens, aki főleg a fizikai vonatkozású differenciálegyenletekkel foglalkozott. E tudományterületnek ma is dolgoznak jeles hazai tudósai, köztük például Debrecenben Rapcsák András (1914-) akadémikus.

A SZINTETIKUS ÉS AZ ANALITIKUS GEOMETRIA HÁZASSÁGA

Biztos vagyok benne, hogy külön kis fejezetre érdemes két kiváló német matematikus geometriai munkásságának az a része, amely a szintetikus geometriába analitikus módon vezette be a pontkoordinátákat. E két tudós: Möbius és Plücker.

August Ferdinand Möbius (1790-1868) Schulzfortban született. Apja tánctanár volt. Az 1813—1814-es években Göttingenben Gauss csillagászati előadásait hallgatta, és 1816-ban már megfigyelő csillagászként működött Pleisenburgban, majd 1818-ban az obszervatórium igazgatója, később, igazgatói állását is megtartva, a lipcsei egyetem matematikatanára lett.

Számos kitűnő matematikai eredményt tartalmazó műve közül, amelyek főként a projektív geometriát gazdagították, most csak egyet emelek ki, a *Der baryzentrische Kalkül* (A baricentrikus számítás) címűt, amely 1827-ben jelent meg Lipcsében. Ebben vezette be Möbius az ún. baricentrikus koordinátákat. Ennek megértéséhez képzeljük el a síkban megadott $A_1A_2A_3$ háromszöget és e háromszög csúcsaiban rendre az x_1, x_2 és x_3 tömegű pontokat. A tömegek mérőszáma egyértelműen meghatározza a három tömeg tömegközéppontját, illetve *P* súlypontját. Ha most az x_1 x_2, x_3 mérőszámokat megfosztjuk minden fizikai értelmüktől, akkor azt mondjuk, hogy az x_1, x_2, x_3 számhármas meghatározza az $A_1A_2A_3$ háromszögben a F pont helyét, más szavakkal a *P* pontnak az $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozó koordinátái az x_1, x_2 és x_3 számok. Elnevezés szerint ezek a P pont $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozó baricentrikus (súlyponti) koordinátái. Ha x_1, x_2 és x_3 mindegyike pozitív, akkor a hozzájuk rendelt pont nyilván az A_1,A_2 A_3 háromszög belsejében van.

Az (x_1, x_2, 0) pont a háromszög A_1A_2 oldalára, az (x_1, 0, x_3) pont az A_1A_3 oldalára és a (0, x_2, x_3) pont az A_2A_3 oldalára illeszkedik. Az A_1, A_2, A_3 csúcsok koordinátái rendre: (x_1, 0, 0), (0, x_2, 0) és (0, 0, x_3). Mindhárom koordináta egyszerre nem lehet 0. Ha valamelyik

koordináta negatív, akkor a számhármas a háromszögön kívüli valamelyik pontra vonatkozik. Bizonyára azt is észrevesszük, hogy a sík pontjainak és a számhármasoknak az egymáshoz rendelése kölcsönös ugyan, de nem egyértelmű. Ha ugyanis az x_1, x_2, x_3 számhármast egy *k* számmal szorozzuk, azaz helyettük a kx_1, kx_2, kx_3 számhármast vesszük, akkor ez ugyanazt a pontot határozza meg, mint az x_1 x_2, x_3. A pont baricentrikus, vagy mai nevükön homogén koordinátái a sík valamely pontját csak egy közös szorzótényezőtől eltekintve határozzák meg egyértelműen.

A vázolt eljárás minden további nélkül kiterjeszthető a térre is. Ott az $A_1A_2A_3$ alapháromszög szerepét az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder veszi át. Ennek a csúcsaiba képzelt x_1, x_2, x_3 és x_4 tömegek - illetve az (x_1, x_2, x_3, x_4) számnégyes - határozza meg a tetraéder *P* súlypontját, azaz a *P* térbeli pont helyét. A négy koordináta előjelétől, illetve 0 értékétől függően a pont a tetraéder belsejében, valamelyik lapján, élén, csúcsán vagy a tetraéderen kívül van. Nem nehéz meglátni, hogy a báricentrikus koordináták általánosítása magasabb dimenziójú terekre éppen úgy lehetséges, mint ahogy ez a síkról a háromdimenziós térre megtörtént. Ezt az általánosítást Möbius meg is tette.

Más, de szintén analitikus úton jutott el a homogén koordináták fogalmához

Julius Plücker (1801-1868). Eberfeldben született. Iskoláit Düsseldorfban, Bonnban és Párizsban végezte. A doktori értekezését 1825-ben védte meg Bonnban, és három év múlva ugyanott lett rendkívüli egyetemi tanár. Az 1832-1834-es években a berlini egyetemen adott elő, közben még egy gimnáziumban is tanított. Innen azonban elüldözték Steiner követői, akik támadták a nem tisztán szintetikus módszereiért. Az 1835-1836-os hallei évek után 1836-ban a bonni egyetemen két katedrát is kapott, matematikusként és fizikusként. A fizikát sem mellékesen művelte, hiszen ő a katódsugarak felfedezője (1859) és a kristálymágnesesség első észlelője (1847). Tanulmányozta az elektromos kisüléseket és az azokat kísérő mágneses jelenségeket. Ezekkel párhuzamosan folytatta szintetikus geometriai kutatásait, és 1828-tól kezdve egymás után jelentek megjelentős analitikus geometriai könyvei. Ezek közül most kettőt idézek: az *Analytisch-geometrische*

Entwicklungen (Analitikus geometriai vizsgálatok) című 1828-1831-ben Essenben megjelent és a *System der analytischen Geometrie* (Az analitikus geometria rendszere) című, 1835-ös berlini kiadású könyvét.

Az elsőben vezette be Plücker a pont homogén koordinátáit a következőképpen. Ha a *P(x,y)* derékszögű koordinátákkal megadott ponthoz hozzárendeljük az x_1 x_2, x_3 számhármast úgy,
hogy teljesüljön az

$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$

összefüggés, akkor az x_1, x_2, x_3 számhármast a P pont homogén koordinátáinak nevezzük. Természetesen:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad \text{és} \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

és az is nyilvánvaló, hogy ha az x_1, x_2, x_3 számok a P pont homogén koordinátái, akkor a kx_1, kx_2, kx_3, ahol $k \neq 0$, szintén ugyanannak a pontnak a homogén koordinátái.

Plücker homogén koordinátáinak általánosítása a háromvagy annál több dimenziós terekre nehézség nélkül végrehajtható, hiszen például a háromdimenziós tér esetén csak a kiinduló összetett aránypárt kell az

$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1$

egyenlőségre bővítenünk, és akkor az

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

helyettesítésekkel bármely Descartes-koordinátás egyenlet homogén koordinátásra írható át. Plücker a homogén koordináták többdimenziós terekre való általánosítását szintén elvégezte.

Plücker számos tételnél bemutatta a homogén koordináták használatának előnyeit. Segítségükkel

PÉLDÁUL MEGHATÁROZHATÓK A SÍK VÉGTELEN TÁVOLI PONTJAI ÉS VÉGTELEN TÁVOLI EGYENESE, SŐT A KÉPZETES PONTOK IS. ÁLLAPODJUNK MEG ABBAN, HOGY $(x_1, x_2, 0)$ a sík egy végtelen távoli pontját jelenti, és természetesen $(kx_1, kx_2, 0)$ is ugyanazt a pontot. Keressük most meg az

$$ax + by + c = 0$$

egyenes végtelen távoli pontját! Az egyenlet homogén koordinátákkal:

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0,$$

vagy

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Ha ezen az egyenesen rajta van az $(x_1, x_2, 0)$ végtelen távoli pont, akkor

$$ax_1 + bx_2 = 0, \quad \text{tehát} \quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{b}{a}.$$

Ezen az egyenesen levő végtelen távoli pont tehát a $(-b, a, 0)$ vagy a $(b, -a, 0)$ pont.

Ha az $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ egyenletben $a = 0$, $b = 0$ és $c \neq 0$, akkor a $cx_3 = 0$ szerint: $x_3 = 0$. Az $x_3 = 0$ egyenletet tehát kielégítik a sík összes végtelen távoli pontjának koordinátái, vagyis ez a sík végtelen távoli egyenesének az egyenlete.

Hogyan jellemezhetők a homogén koordinátákkal a képzetes pontok? Az általános helyzetű kör egyenlete:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Homogén koordinátákkal:

$$ax_1^2 + ax_2^2 + bx_1x_3 + cx_2x_3 + dx_3^2 = 0.$$

Amint látjuk, a tagok most - éppen úgy, mint az egyenes egyenletében - homogének, és mindegyik másodfokú.

Keressük meg e körnek és az $x_3=0$ végtelen távoli egyenesnek a közös pontjait! Ekkor:

$$a(x_1^2+x_2^2)=0, \quad \text{azaz} \quad x_1^2=-x_2^2.$$

Válasszuk x_1 értékét 1-nek! Ekkor $x_2= \pm i$. A két képzetes metszéspont tehát: (1, *i,* 0) és (1, —i, 0). Ezeket a pontokat Plücker képzetes körpontoknak nevezte. Nyilvánvalóan ezek a sík minden körén „rajta vannak”.

A homogén koordináták hasznát sejtető kis ízelítő után vegyük még észre, hogy az egyenes

$ax_1+bx_2+cx_3=0$

homogén koordinátás egyenletében az x_1, x_2, x_3 a pontok koordinátái, az *a, b, c* együtthatók pedig egy konkrét egyenest határoznak meg. Nevezhetjük az utóbbiakat joggal az egyenes koordinátáinak is. Az egyenlet a pont és az egyenes homogén koordinátáiban szimmetrikus, azaz szerepük felcserélhető. A homogén koordinátás egyenletből tehát közvetlenül leolvasható, hogy a síkban a pont és az egyenes duális elemek, amint ezt már PLÜCKERnek egy kissé más gondolatmenetével is beláttuk.

1839-ben jelent meg Plücker *Theorie der algebraische Curven* (Az algebrai görbék elmélete) című könyve Bonnban. Amint a cím is elárulja, benne az algebrai görbéknek, és ezen belül a kúpszeleteknek is, rendszeres elmélete található, természetesen homogén koordinátákkal.

A tér geometriáját az egyenes vonalkoordinátáinak a segítségével építette fel Plücker az 1868-1869-ben, Lipcsében kiadott *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf Betrachtung der geraden Linien als Raumelement* (A tér új geometriája arra alapozva, hogy a térelem az egyenes) című könyvében.

E kis fejezet végén igazságot kell szolgáltatnunk Karl Wilhelm

FEUERBACHnak, aki majdnem ugyanakkor adta közre a baricentrikus koordináták ötletét, amikor Möbius, és tőle teljesen függetlenül. Ugyancsak így járt a francia Étienne Bobillier (1798-1840), aki az algebrai görbékkel és a másodrendű felületekkel is foglalkozott.

AZ ANALITIKUS GEOMETRIA ÉS A VEKTOROK

Amint láttuk, Descartes óta és különösen a XIX. században az analitikus geometriát számos olyan módszer alakította, amely az analitikus jelzőt meghagyta ugyan, azonban a keletkezett geometriák egymástól mégis különböztek. A módszerek szaporodásával akarva, nem akarva együtt járt a tárgykör kibővülése is, például a kétdimenziós tér koordinátáinak háromdimenzióssá általánosítása lehetővé tette a térgörbék és a felületek analitikus geometriai tanulmányozását. Sokszor a kör annyira kibővült, hogy a bekapcsolódó új terület önálló tudományágként le is vált az analitikus geometria testéről, mint ahogy ezt tapasztaltuk az algebrai geometria és a differenciálgeometria esetében is. A XIX. század elejére az analitikus geometria képes volt minden, egyenlettel leírható geometriai alakzat vizsgálatára.

Az új eljárások csak akkor életképesek, ha többet „tudnak”, mint az addigiak. Új fogalmak formálták tovább az analitikus geometriát az ír Hamilton és a német Grassmann felfedezéseinek köszönhetően, ők voltak, akik kialakították a vektor fogalmát. Ennek alkalmazása az analitikus geometriát még szorosabb kapcsolatba hozta más matematikai területekkel, de a matematikán kívül például a fizikával is. A két különböző hazájú és sorsú tudós másmás utakat járva jutott el ugyanahhoz a fogalomhoz, a vektorhoz, méghozzá mindjárt tetszőleges dimenziójú térre érvényesen.

William Rowan Hamilton (1805-1865) az írországi Dublinban született. Ügyvéd édesapját és igen művelt édesanyját egészen fiatalon veszítette el. Nyelvész nagybátyja nevelte fel, akinek gondozása alatt kitűnt, hogy az ifjú nem közönséges nyelvtehetség, ötéves

korában olvasott görögül, héberül és latinul. 10 évesen hat keleti nyelvet ismert, és 12 éves fejjel 12 nyelven beszélt. Lehet, hogy egy fejszámoló művésszel való találkozása erősítette meg benne a matematika iránti érdeklődést. 15 éves koráig már végzett Eukleidész latinra fordított *Sztoikheiájával,* és 17 évesen már ismerte Newton és Laplace főbb munkáit. Dublinban a Trinity College-ban végzett, és 22 éves volt, amikor kinevezték Írország királyi csillagászának, a dunsinki obszervatórium igazgatójának és a csillagászat professzorának. 1827-ben az ír Akadémiának benyújtott tanulmányában kifejtette, hogy a tér és az idő egymástól teljességgel elválaszthatatlan fogalmak. Ennek a relativitáselméletet megelőző megállapításnak a matematikai vetületét abban látta, hogy a geometria a tér, az algebra pedig - és ezen főleg az analízist értette - az idő tudománya. Ebből a kettős véleményből az következnék, hogy a téridő tudománya éppen az analitikus, illetve a differenciálgeometria volna.

Hamilton azonban a vektorok bevezetésénél - a szó is tőle származik - nem geometriai oldalról indult, hanem algebrai fogalmakból. 1833-ban terjesztette fel az ír Akadémiának azt az értekezését, amelyben kidolgozta a valós számkettősök algebráját. A számkettősök közti műveletek a szorzásnál kezdtek érdekesek lenni, amelyet Hamilton az

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

azonossággal definiált. Látjuk tehát, hogy voltaképpen a komplex számoknak a rendezett valós számpárokkal való definiálásáról van szó, amikor ugyanis az (a, b) az $a+bi$ komplex számot jelenti, ahol a és b valós számok, i pedig a képzetes egység, amelyre igaz, hogy $i^2 = -1$. A valós számpárok, illetve a komplex számok közti műveletek ilyen meghatározása csírájában tartalmazza a komplex számoknak a koordinátasíkon való ábrázolását, amelyet még 1799-ben dolgozott ki vektorokkal Caspar Wessel (1745-1818) dán, 1806-ban Jan Robert Argand (1768-1822) svájci matematikus, legátfogóbban pedig 1837-ben Gauss. Kevesen tudják, hogy 1837-ben a mi Bolyai JÁNOSunk a *Responsio* című pályamunkájában az említett elődök eredményeit nem ismerve, tehát önállóan adta meg

és dolgozta ki a komplex számoknak mint rendezett valós számpároknak az aritmetikáját, sőt rámutatott arra is, hogy a komplex számoknak milyen jelentős szerep jutott a geometriában.

HAMILTON KEREK 10 ÉVIG TÖRTE A FEJÉT AZON, HOGY A SZÁMPÁROK ARITMETIKÁJÁNAK A MINTÁJÁRA HOGYAN LEHETNE MEGSZERKESZTENI A SZÁMHÁRMASOK ARITMETIKÁJÁT, VAGYIS AZ $a+bi+cj$ alakú számok közötti műveleti törvényeket. 1843. október 16-án, egy esti sétája alkalmával ötlött eszébe, hogy az általánosítás nem a számhármasok, hanem a számnégyesek útján lehetséges, azaz felfedezte az $a+bi+cj+dk$ alakú kvaterniókat, ahol *a, b, c* és *d* valós számok, az *i, j* és *k* egységekre pedig fennáll, hogy:

$i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $ji=-k$, $jk=i$, $kj=-i$,

$ki=j$ és végül $ik=-j$.

Ezen feltételek mellett a kvaterniókkal végzett műveletek követik a megszokott aritmetikai szabályokat, viszont itt - és ez a matematikatörténetben az első eset - a szorzásra nem érvényes a kommutativitás. Azon az esti sétán - amint Hamilton sokszor elmesélte -villámcsapásként jelent meg előtte az alapvető összefüggés: $i^2=j^2=k^2=ijk$.

A *Lectures on Quaternion* (Előadások a kvaterniókról) 1853-ban felent meg, és Hamilton élete végéig dolgozott e kezdeti mű tökéletesítésén és bővítésén. Az új könyvet, az *Elements of Quaternionst* (A kvaterniók elemei) fia adta ki a Hamilton halála utáni évben.

HAMILTON AZ $a+bi+cj+dk$ kvaternió első tagját (a-t) skalárnak nevezte el, mert csak ilyen számokat lehet skálaszerűen felsorolni, a $bi+cj+dk$ részt pedig vektornak (átvivőnek) hívta.
Elképzelése szerint ez a rész viszi át a *P(x, y, z)* pontot a *P'(x+b,y +c, z+d)* pontba. A $bi+cj+dk$ vektort olyan, nyíllal ellátott távolsággal ábrázolta, amely a *P(x,y,z)* pontból a *P'(x+b,y+c,z+d)* pontba mutat. Az a kvaternió skalárrészét Sα-val, a vektorrészt pedig Kα-val jelölte. Így, ha

$\alpha=S\alpha+V\alpha=a_1+a_2i+a_3j+a_4k$

és

$P = S\beta + V\beta = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$,

akkor az összeadás, illetve a szorzás szabályai:

$\alpha + \beta = (S\alpha + V\alpha) + (S\beta + V\beta) = S(\alpha + \beta) + V(\alpha + \beta)$,

ahol

$S(\alpha + \beta) = a_1 + b_1$ és $V(\alpha + \beta) = (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)i + (a_4 + b_4)k$,

illetve i

$\alpha^*\beta = (S\alpha + V\alpha)^*(S\beta + V\beta) = S(\alpha\beta) + V(\alpha\beta)$,

ahol

$S(\alpha\beta) = —(-a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)$

és

$V(\alpha\beta) = (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 — a_4 b_3)i + (a_l b_3 + a_3 b_1 — a_2 b_4 + a_4 b_2)j$ +

$+ (a_2 b_3 — a_3 b_2 + a_1 b_4 + a_4 b_1)k$.

Hamilton nemcsak a kvaterniók és ezen belül a vektorok algebráját dolgozta ki, hanem megalapozta és mechanikai munkáiban felhasználta a vektoranalízist is. Ő vezette be például a fizikában gyakran alkalmazott nabla differenciáloperátort. Az elnevezést a biblikus, hárfa alakú hangszertől vette, mert ennek a stilizált alakjával, a csúcsára állított egyenlő szárú háromszöggel jelölte a

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

differenciáloperátort. Akik elméleti fizikával, illetve vektoranalízissel foglalkoznak, azok jól ismerik a skalártér gradiensét, a vektortér rotációját és divergenciáját, ezeket a

HAMILTONtól származó fogalmakat.

Hermann Grassmann (1809—1877) német matematikus, fizikus és nyelvész. Apja protestáns lelkész volt Stettinben, ahol Grassmann született. Érettségi után a berlini egyetemen tanult teológiát és filozófiát. Akárcsak HAMILTONnak, neki is különös tehetsége volt a nyelvekhez. Benne a szanszkrit nyelv egyik tudósát tisztelhetjük, a *Rig-véda* szótár szerzőjét. 1832-től önerőből kezdett matematikával foglalkozni, és 1840-ben tette le azt a kiegészítő vizsgát, amelynek alapján szülővárosa gimnáziumában matematikát taníthatott. Ez a szokatlanul sokoldalú tudós a matematikán és a nyelvészeten kívül jelentős eredményeket ért el a fizikában is, német népdalgyűjteményt állított össze, vallásos mozgalmakban vett részt és a helyi újság szerkesztésében - és mindvégig maradt középiskolai tanár.

1844-ben, tehát Hamilton kvaternióinak megszületése után egy évvel, jelent meg Grassmann *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A lineáris kiterjedéstan, a matematika egy új ága) című értekezése. Ez a vektorszámításnak nagyon általános elméletét tartalmazza, méghozzá akárhány dimenziós térre alkalmas formalizmussal. Érdekes, hogy Grassmann csak a legfeljebb háromdimenziós tér tudományát tekintette geometriának, hozzáfűzve azt, hogy a dimenziószám további növelésekor keletkezett „absztrakt tudománynak” nincsenek korlátái. A HAMILTONéhoz hasonló értékű matematikai teljesítményeit kora nem becsülte eléggé. Ennek egyik oka az volt, hogy szokatlanul új matematikai tárgyát szokatlan, nem a közismert nyelvezettel fejtette ki, és ezért még az 1862-ben kiadott *Die Ausdehnungslehre* (A kiterjedéstan) című könyve is igen nehéz olvasmánynak bizonyult, pedig az első műnek tökéletesített, bővített és alaposabban kifejtett mása volt.

A vektoralgebra és a vektoranalízis a szó legszorosabb értelmében korszakalkotó felfedezés volt, amely az analitikus geometriát a mai értelembeni modern területté alakította, és ezen túl a vektorok és későbbi általánosításuk, a tenzorok nélkül nem lehet elképzelni sem a jelenlegi matematikát, sem a XX. századi fizikát.

A fizikusok - látva Hamilton nagyszerű eredményeit - rögtön

észrevették, hogy az elméleti fizika számára a vektoranalízis addig nem ismert sikerekkel kecsegtető apparátus. Nélküle nem születtek volna meg James Clerk. MAXWELLnek (1831-1879) híres differenciálegyenletei, amelyek tartalmazzák az elektromágneses tér egész elméletét. Felfigyelt Hamilton eredményeire az óceán túlsó partján Josiah Willard Gibbs (1839-1903) is, a Yale Egyetem professzora, aki *Elements of Vector Analysis* (A vektoranalízis elemei) című, 1881-1884-ben megjelent könyvével - figyelembe véve mindkét felfedező érdemeit - időálló kézikönyvet írt a címben megjelölt tárgyban. Ebben a könyvben a háromdimenziós térre kiépített vektoralgebra már megtartotta a szorzás kommutatív törvényét, tehát vele megkezdődött az a folyamat, amely az addig túlbecsült kvaternió-elméletet a megfelelő értékrendbe helyezte. A kezdeti lelkesedésre jellemző, hogy a Yale Egyetemen 1895-ben megalakult „A kvaterniónak és minden rokon rendszernek a tanulmányozását elősegítő társaság”. A vektor- és a tenzoranalízis kezdeti tündöklése idején magának az eredetnek, azaz a kvaternióelméletnek a fontossága csökkent, de a mai megállapodott helyzetében elfoglalhatta méltán előkelő helyét a matematika történetében, valamint hasznos alkalmazásra talált például a kvantumelméletben is.

Ugyancsak kitűnő könyvet írt 1903-ban a szóban forgó tárgykörből Oliver Heaviside (1850-1925) angol mérnök-fizikus *Electro-magnetic Theory* (Elektromágneses elmélet) címmel.

Hazánkban a vektoralgebra és a vektoranalízis első eredményes művelői Réthy Mór (1848-1925), Zemplén Győző (1879-1916) és Farkas Gyula (1847-1930) voltak.

Az analitikus geometria történetének vázolása után megállapíthatjuk, hogy a Fermat-Descartes-féle koordinátageometria mintegy 300 éven át fejlődőképes matematikai ágnak bizonyult, amely képes volt arra, hogy sokféle módszert hasznosítson, hogy új kutatási területeket nyisson, és hogy a matematika más területeivel létesített szoros kapcsolatai révén nélkülözhetetlenné váljék szinte az egész matematikában.

A GEOMETRIA AXIOMATIKUS

MEGALAPOZÁSÁNAK TÖRTÉNETE

AZ V. POSZTOLÁTUM

A görög matematika történetében láttuk, hogy a geometria axiomatikus megalapozása régi törekvés. Erről tesznek bizonyságot az EUKLEIDÉSZt megelőző *Elemek* című művek, mint amilyen Hippokratészé is. Eukleidész *Sztoikheiája* kétezer évre előremutató példa a geometria axiomatikus felépítésére, egyszersmind azonban kétezer évig problémát is jelentett az V. posztulátum körül kialakult bizonytalanságaival. Az V. posztulátum szerint: Ha két egyenes egy harmadikat metsz, akkor azok - eléggé meghosszabbítva - a metszőnek azon az oldalán találkoznak, amelyen a belső szögek összege kisebb két derékszögnél. Ez a posztulátum kétféle szempontból okozott problémát: 1. A többihez képest túlságosan bonyolult.

2. Közvetlen tapasztalattal - mint a többi - nem ellenőrizhető, nem magától értetődő, tehát úgy tűnik, hogy bizonyításra szorul.

Igen valószínű, hogy az V. posztulátum bizonyítását már maga Eukleidész is szükségesnek tartotta - legalábbis kezdetben.
Úgy történhetett, hogy a kiválasztott axiómákra elkezdte építeni a geometria épületét, ami fennakadás nélkül ment az első könyv 17. tételéig. Ez azt mondja ki, hogy bármely háromszögben két szög összege mindig kisebb, mint 180°.

A tétel bizonyítása könnyű volt, ha ugyanis a háromszög két kiválasztott szöge α és β, valamint a háromszögnek a β melletti külső szöge ε, akkor $\alpha<\varepsilon$, tehát $\alpha+\beta<\varepsilon+\beta=180°$. Leküzdhetetlen nehézségbe ütközött Eukleidész; amikor a tétel fordítottját akarta bebizonyítani, vagyis azt az állítást, hogy ha két egyenest metsz egy harmadik és e harmadik egyenes egyik oldalán a két belső szög összege 180°-nál kisebb, akkor az első két egyenes ezen az oldalon metszi egymást, azaz a három egyenes háromszöget zár be. Ennek az igazolása nem sikerült, pedig EUKLEIDÉSZnek a továbbiakban erre a tételre szüksége volt. A kérdést úgy oldotta meg, hogy a bizonyításnak ellenálló tételt besorolta a posztulátumok közé. Úgy gondoljuk, így született az V. posztulátum.

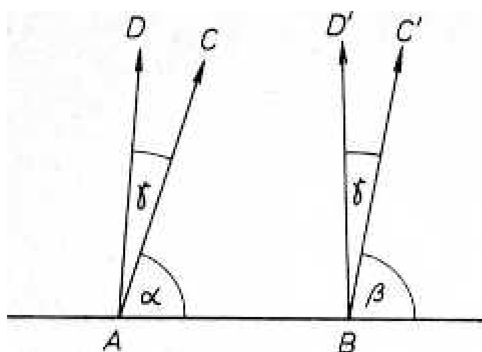
A bonyolultság problémáján viszonylag könnyű volt segíteni. Már a II. századbeli Ptolemaiosz Klaudiosz az V. posztulátumot egyszerűbbel helyettesítette. A köztudatban az ő megfogalmazása szerepel legsűrűbben: Egy egyeneshez valamely rá nem illeszkedő ponton át csak egyetlen párhuzamos húzható. E megfogalmazás nyomán szokás az V. posztulátumot párhuzamossági axiómának is nevezni. A történelem folyamán számos helyettesítő axióma született. Ezek közül - hazai vonatkozása miatt - kettőt említek. Mind a kettőt

Bolyai Farkas (1775-1856) magyar matematikus fogalmazta meg. Bolyán született, elszegényedett nemesi családból. Apja Bolyai Gáspár szolgabíró volt. A nagyenyedi, majd a kolozsvári református kollégiumban végezte középiskolai tanulmányait. Érettségi után báró Kemény Simon mentora és barátjaként külföldi tanulmányutat tett Németországban. Göttingenben meleg barátságot kötött GAUSS-szal, aki akkor még egyetemista volt. Bolyai itt ismerte meg az V. posztulátummal kapcsolatos problémákat. Ezek megoldására életének jó része ráment - eredménytelenül. Ebben a szellemi légkörben nőtt fel fia, János, a kétezer éves rejtély egyik megoldója. Ezért szokták mondani, hogy Bolyai Farkas legnagyobb műve Bolyai János, ami kétségkívül igaz, de Farkas matematikai eredményei sem értéktelenek. A geometria megalapozásában nagy jelentőségűnek bizonyult az általa bevezetett „végszerűen egyenlő" síkidomok fogalma. Ilyen két síkidom, ha véges számú, páronként egybevágó síkidomokra osztható. E fogalom és az abból kicsírázó gondolatok David Hilbert német matematikusnak voltak segítségére a geometria megalapozásában. Bolyai igazolta, hogy az egymással egyenlő területű sokszögek mindig végszerűen egyenlők. Nem tudta ezt bebizonyítani az egyenlő térfogatú testekre. Ez a kísérlet 1901-ben hiábavalónak is bizonyult, amikor Max Dehn (1878-1952) német matematikus megtalálta két sokszöglapokkal határolt test végszerűen egyenlőségének a feltételét.

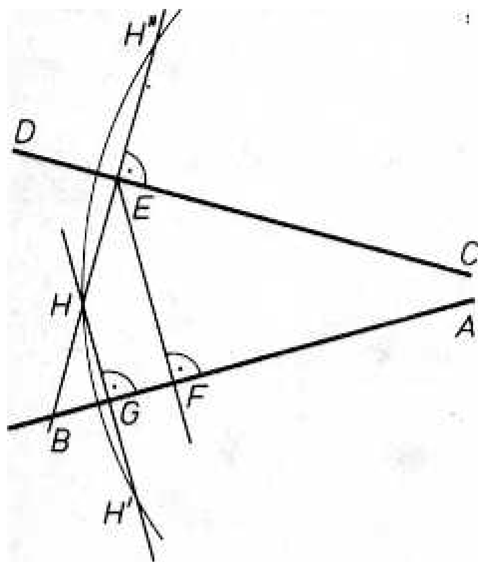
Ebből az is következett, hogy például a kocka és az azzal egyenlő térfogatú szabályos tetraéder nem végszerűen egyenlő, tehát nem építhető fel ugyanazon résztestekből. Bolyai Farkas már 1832-ben megfeleltetésnek definiálta a függvényt, amit Dirichlet csak 1837-ben tett meg, bár Lacroix már 1810-ben így fogalmazott. Bolyai

Farkas 1832-ben a sorok Raabe-féle konvergenciakritériumával egyenértékű feltételt adott, amit Joseph Ludwig Raabe. (1801-1859) svájci matematikusról neveztek el, aki kritériumát 1834-ben közölte. Augustus de Morgan (1806-1871) skót matematikus a róla elnevezett kritériumskálát 1832-ben tette közzé. Biztos azonban, hogy tőle függetlenül fedezte fel ugyanezt 1842-ben Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900) francia matematikus és 1843-ban Bolyai Farkas. Az akkori Erdélyben élő, kulturálisan elszigetelt marosvásárhelyi tanár nem értesülhetett mások felfedezéseiről, és mások sem vehettek tudomást az ő eredményeiről. Maradandóan értékes művében, a tankönyvnek szánt *Tentamen* két kötetében örökítette meg matematikai gondolatait 1832-1833-ban. E könyv ugyanaz, amelynek első kötetében függelékként, appendixként megjelent fiának világhírű műve a *Stientia spatii* (A tér tudománya).

Bolyai Farkas - mint bevezetőnkben említettük - több helyettesítő axiómát fogalmazott meg. Ezek közül az elsőt azért gondolta ki, hogy az V. posztulátumot tanítványai előtt szemléletessé tegye. E szerint: Ha a *306. ábrán* az α szög kisebb a β szögnél, akkor $\alpha+\gamma<\gamma+\gamma$. Ebből következik, hogy ha az ábra szerinti *AC és BC'* félegyenesek metszik egymást, akkor az *AD és BD'* félegyenesek is, továbbá az *AB* egyeneshez viszonyítva, a metsző félegyenesekre nézve, a belső szögek összege kisebb, mint két derékszög.



306. ábra



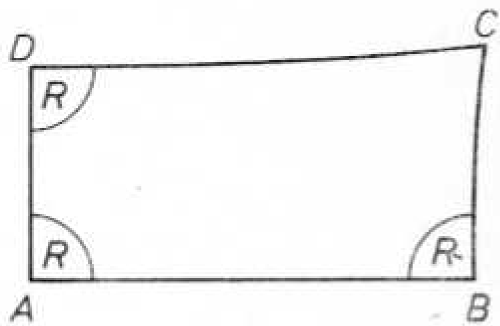
307. ábra

Bolyai Farkas másik helyettesítő axiómája, eredeti megfogalmazásban: „Ha bármely három olyan pont, amely nincsen ugyanazon az egyenesen, mindig egy gömb felületére eshetnék, akkor ezzel be volna bizonyítva EUKLIDES XI. axiómája." (Némely kiadás az V. posztulátumot XI. axiómának veszi.) Ezt a helyettesítő axiómát a síkra egyszerűsítve így szokták idézni: „Bármely három pont vagy egy egyenesen, vagy egy körön van." Szénássy Barna a *Bolyai Farkas* című könyvében megmutatja, hogyan következik az utóbbi egyszerűbb alakú axiómából az eredeti, Eukleidész szerinti. Fogadjuk el ugyanis a Bolyai-féle axiómát *(307. ábra).* Az *AB* egyenes tetszőleges *B* pontjából állítsunk merőlegest az *AB*-től különböző, de tetszőleges *CD* egyenesre. Legyen ennek talppontja *E.* Bocsássunk most ebből az *E* pontból merőlegest az *AB* egyenesre. E merőleges talppontja *F.* Ha az *F* pont egybeesne a *B* ponttal, akkor az *AB* és a *CD* egyenesek Eukleidész szerint párhuzamosak. Ha viszonyt az *F* pont különbözik a B-től, akkor a *BF* szakasz egy tetszőleges *G* belső pontjában állítsunk merőlegest *AB*-re. Ez *BE-t* metszi a *H* pontban. A *H* pontot tükrözzük az *AB* egyenesre, és a *CD* egyenesre is. Így nyerjük a *H'* és a *H"* pontokat. Mivel a *H, H'* és *H"* pontok nem esnek egy egyenesre,

azért érvényes azokra a Bolyai-féle axióma, azaz rajtuk keresztül csak egy kör fektethető. Ekkor azonban az *AB* és a *DC* húrfelező merőlegesek metszik egymást (a kör középpontjában), az *EB* (vagy az *EF)* egyenesekhez viszonyítva azon az oldalon, amelyen a belső szögek összege kisebb, mint két derékszög. Bolyai Farkas még két ilyen helyettesítő axiómát gyártott. Ezeknek ő túl nagy matematikai értéket nem tulajdonított. Bizonyára az euklideszi V. posztulátum alapján levezetett bármely megfordítható tétellel az V. posztulátum helyettesíthető.

AZ V. POSZTULÁTUM BIZONYÍTÁSI KÍSÉRLETEI

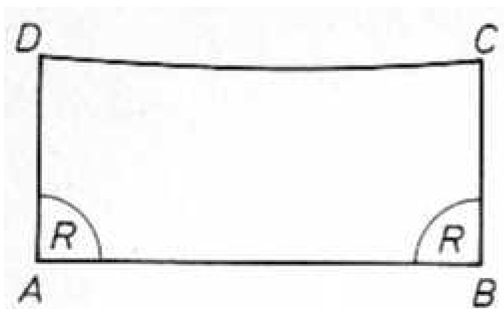
Nehezebb volt az V. posztulátummal szembeni másik kifogástól megszabadulni. Ez a vád lényegében az, hogy tapasztalattal nem igazolható. Ehhez valóban az kellene, hogy a szóban forgó két egyenes közül legalább az egyiken végigmehessünk, hogy megállapítsuk: metszik-e egymást vagy sem. Ez azonban még az űrrepülések korában sem lehetséges, már akkor sem, ha a két egyenes például átmenne a Föld két pólusán, és ezer fényévnyire elhaladva, egymáshoz egyezred milliméternyit közelednének. Ezért merült fel a matematikusokban az a gondolat, hogy az V. posztulátum tulajdonképpen tétel, nem független a többitől, hanem azokból bebizonyítható. Ha Eukleidész axiómarendszeréből elhagyjuk a párhuzamossági axiómát, akkor az így nyert axiómarendszert maradék-axiómarendszernek szokás nevezni. Azt kísérelték meg tehát már az arab matematikusok, hogy az V. posztulátumot bebizonyítsák a maradékaxiómarendszer alapján.



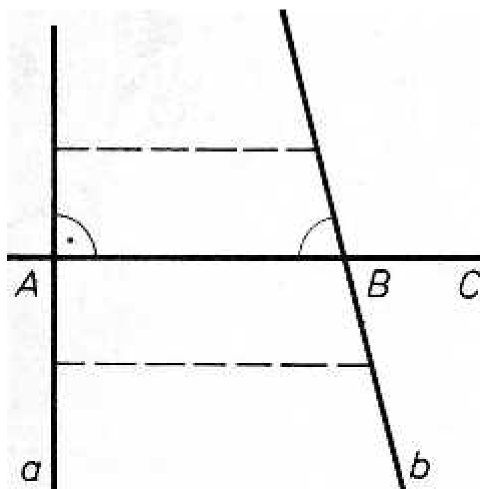
Elsők közt az egyiptomi Alhazen foglalkozott ilyen értelemben az V. posztulátummal (404. oldal). Kiindult egy olyan

négyszögből, amelynek három derékszöge van *(308. ábra,* Lambert-féle négyszög). Abból, hogy a négyszög három szöge derékszög, kimutatta, hogy a negyedik is az. Amire azonban bizonyítását alapozta, hogy ti. egy mozgó pont egy adott egyenestől mindig egyenlő távol van, ha azzal párhuzamos egyenesen mozog, az V. posztulátumnak megfelelő, helyettesítő axióma. Az V. posztulátumot tehát nem bizonyította, hanem helyettesítette.

ALHAZENT BÍRÁLTA OMAR HAJJÁM, A NISÁPURI MATEMATIKUS KÖLTŐ **(408.** oldal). ARISZTOTELÉSZre hivatkozva kifogásolta, hogy Alhazen összekeverte a geometriát a fizikával, mert „bizonyítását” mozgásra alapozta. Omar Hajjám azonban maga is beleesett ugyanabba a csapdába, mint az általa kritizált Alhazen. Omar Hajjám gondolatmenetét olyan négyszögre építette, amelynek két szembeni oldala egyenlő hosszú és mindkettő merőleges a harmadikra ***(309. ábra,*** Saccheri-féle négyszög). Ebben a négyszögben a másik két szöget egyenlőnek képzelte, és kizárta annak a lehetőségét, hogy e két szög hegyes vagy tompa legyen. E két lehetőséget ismét Arisztotelészre utalva tagadta, aki szerint két, egymáshoz hajló egyenes valahol föltétlenül metszi egymást. Ő sem vette észre, hogy Arisztotelész ezen állítása lényegében a párhuzamossági axióma, tehát azzal az állítással bizonyított, amelyet bizonyítani akart.



309. ábra



310. ábra

A harmadik perzsa-arab matematikus és csillagász, aki e kérdéssel foglalkozott, Násziraddín at-Túszi volt (411. oldal). Az ő „bizonyításában” sem nehéz felfedeznünk az eredeti euklideszi párhuzamossági axiómát. Megállapította, hogy amennyiben az *a* egyenes merőleges az *A* pontban a *c* egyenesre, és a *b* egyenes nem merőleges a *B* pontban a c-re, annyiban igaz, hogy az *a* és *b* egyenesek közötti, c-vel párhuzamos szakaszok mindig kisebbek a *c* egyenesnek azon az oldalán, amelyen az *a* egyenes felőli b-vel alkotott hegyesszög található *(310. ábra)*.

E hibás bizonyítási kísérletek mégsem voltak hiábavalók. Amikor a XVII. században Wallis lefordította Násziraddín műveit, akkor váltak ismeretessé Nyugat-Európában az V. posztulátummal kapcsolatos arab eredmények. Valószínű, hogy ezek ösztönözték az olasz Giovanni Girolamo Saccheri itáliai szerzetes-matematikust arra, hogy az Omar Hajjám-féle négyszögből kiindulva törekedjék bizonyítani az V. posztulátumot. Az ő módszere azonban az indirekt bizonyítás volt. A maradék-axiómarendszerhez hozzácsatolta a párhuzamossági axióma tagadását. Mivel mélyen meg volt győződve az V. posztulátum igazáról, azért remélte, hogy annak tagadása ellentmondásokhoz vezet. Ezt az ellentmondást - véleménye szerint - meg is találta. A bizonyítás során három esetet gondolt végig. Feltette, hogy az *ABCD* négyszögben a *D* és a *C* csúcsban tompaszög, majd derékszög és

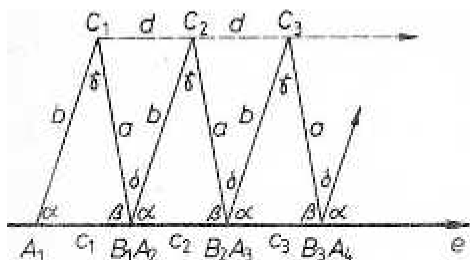
végül hegyesszög van. Kimutatta, hogy ha egyetlen olyan négyszög létezik, amelynél a *C* és a *D* szögek tompaszögek, akkor minden Omar Hajjám-féle négyszög ilyen tulajdonságú. Ugyanígy kimutatta, hogy ha létezik egy olyan négyszög, amelyben a *C* és a *D* szögek hegyesszögek, akkor minden Omar Hajjám-féle négyszög ilyen, és így van ez derékszög feltételezése esetén. E három eset között a derékszög feltételezése nyilván az euklideszi geometria érvényességét jelenti. Abból a feltevésből, amely szerint a C és a *D* szögek hegyesszögek, azt következtette, hogy van két, egymást nem metsző olyan egyenes, amelyeknek egymástól való távolsága - az egyik egyenesen valamelyik irányba haladva - tetszőleges kicsinnyé válik. Erre a tételre mondta ki Saccheri, hogy lehetetlen, mert „ellentmond az egyenes vonal természetének". Nem vette észre, hogy az ellentmondás nem az V. posztulátum tagadásával kiegészített maradék-axiómarendszerből következő valamelyik tétellel szemben lépett fel, hanem azzal az állítással szemben, hogy két, egymást nem metsző egyenes nem közeledhet egymáshoz, ami pedig az V. posztulátummal egyenértékű állítás. Az ellentmondás tehát nem az alapul vett axiómarendszeren belül lépett fel, hanem az V. posztulátummal szemben. Ez pedig természetes, hiszen az alapul választott axiómarendszerben az V. posztulátum tagadása szerepelt. Saccheri gondolatmenete, amellyel közel járt ahhoz, hogy felfedezze a nemeuklideszi geometriát, 1733-ban jelent meg *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur príma ipsa universae Geometriáé Principia* (A minden folttól megtisztított Eukleidész: azaz geometriai vállalkozás, amely megerősíti az általános geometria első alapelveit) címen.

Még közelebb jutott a nemeuklideszi geometria felfedezéséhez Johann Heinrich Lambert német matematikus, ugyanaz, aki 1766-ban kimutatta az *e* és π irracionális voltát, ő szintén indirekt úton igyekezett bizonyítani az V. posztulátumot. Az Alhazen-féle négyszögből indult ki, tehát abból, amelyben három derékszöget tételezett fel. A negyedik szögre itt is három feltevés lehetséges: vagy tompa-, vagy derék-, vagy hegyesszög. A derékszög feltevés az euklideszi geometria elfogadását jelenti, tehát a másik két feltevés megcáfolása a feladat. A maradék-axiómarendszer és az V. posztulátum tagadása alapján Lambert számos furcsa, valószínűtlen tételhez jutott, de nem esett Saccheri hibájába. A nyert tételeket nem tudta ugyan elfogadni, mégis úgy gondolta,

hogy ellentmondást nem sikerült felfedeznie, és éppen ezért eredményeit nem is közölte. Munkáját 1786-ban adta ki Johann Bernoulli (1710-1790), pedig az már 1766-ban elkészült. E mű címe: *Die Theorie der Parallellinien* (A párhuzamosok elmélete). Említsük meg érdekes eredményei közül azt, amely a háromszög területére vonatkozik. Jelöljük a háromszög szögeit α-val, β-val és γ-val. Abból a feltevésből, hogy a Lambert-féle négyszög negyedik szöge tompaszög, azt következtette, hogy a háromszög szögösszegére nézve: $\alpha+\beta+\gamma — 2R=\varepsilon>0$, azaz ekkor a háromszög szögeinek összege nagyobb két derékszögnél. A hegyesszögű feltevés esetén pedig: $2R—(\alpha+\beta+\gamma)=\delta>0$, azaz a háromszög szögösszege kisebb, mint két derékszög. Mindkét esetben megkereste a háromszög területképletét, és azt nyerte, hogy az első esetben a terület $t=r^2\varepsilon$, a második esetben pedig $t=r^2\delta$, ahol r^2 minden háromszögre nézve ugyanakkora ismeretlen pozitív érték.

Mindkét esetben arra a következtetésre jutott, hogy nem léteznek olyan hasonló háromszögek, amelyek nem egybevágók. Mivel azt tapasztalta, hogy az első feltevésből következő területképlet igaz az *r* sugarú gömbfelület gömbháromszögeire, azért úgy gondolta, hogy a második feltevés a képzetes sugarú gömb felületén érvényes, amelynek sugara r√(-1). E formális analógiának azonban semmiféle valóságtartalmat nem tulajdonított. Látható, hogy Lambert már építgette a nemeuklideszi geometria épületét, de annyira hitt az euklideszi geometria igazában, azaz abban, hogy a valóságos tér törvényeit az euklideszi geometria írja le, hogy az új geometriát nem ismerte fel. Nem látta meg, hogy az általa alkalmazott indirekt bizonyítás sohasem vezethet ellentmondásra, ámbár leszögezte, hogy Ő a keresett ellentmondást nem találta meg. Ezt azonban nem mint törvényt jelentette ki, hanem inkább mint a saját ügyetlenségének elismerését.

Lambert az V. posztulátum tagadásában még egyaránt jogosnak látta a hegyesszögű és a tompaszögű feltevést, annak megfelelően, hogy a háromszög szögösszege vagy kisebb két derékszögnél, vagy nagyobb két derékszögnél. Adrien Marie Legendre (1752-1833) francia matematikus 1800-ban kimutatta, hogy az $\alpha+\beta+\gamma>2R$ feltevés tarthatatlan.



311. ábra

LEGENDRE ELSŐ SZÖGTÉTELE SZERINT MÁR A MARADÉK-AXIÓMARENDSZERBŐL KÖVETKEZIK, HOGY A HÁROMSZÖG SZÖGÖSSZEGE NEM LEHET NAGYOBB KÉT DERÉKSZÖGNÉL. CSATOLJUK UGYANIS A MARADÉK-AXIÓMARENDSZERHEZ AZT A FELTEVÉST, HOGY $\alpha+\beta+\gamma>2R$, és tekintsük .a *311. ábrán* az $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... egybevágó háromszögeket! Helyezzük el ezeket az e egyenes mentén úgy, hogy a $c_1=c_2=c_3=$ ... oldalak hézag nélkül illeszkedjenek az e egyenesre! Eukleidész szerint a párhuzamossági axióma nélkül belátható, hogy valamely háromszög két szögének összege nem érheti el a $2R$ nagyságot, tehát az egymás melletti α és β szögek között kell hogy legyen valamekkora δ szög, amikor is $\alpha+\beta+\delta=2R$. Feltételezésünk szerint viszont $\alpha+\beta+\gamma>2R$, tehát $\gamma>\delta$. Vegyük most észre, hogy az $A_2C_2C_1$, $A_3C_3C_2$, ... háromszögek egybevágók. Ekkor pedig: $C_1C_2=C_2C_3=\ ...\ =d$. Az eredeti $A_1B_1C_1$ stb. háromszögekben és a közbeékelődő $A_2C_2C_1$ stb. háromszögekben az a és a b oldalak egyenlők, de $\delta<\gamma$. Ugyancsak a maradék-axiómarendszer alapján kimutatható, hogy ekkor $c_1=c>d$, azaz $c—d=e>0$.

Hasonlítsuk most össze az $A_1B_n=nc$ szakaszt az

$A_1C_1C_2...C_{n+1}B_n=2b+nd$

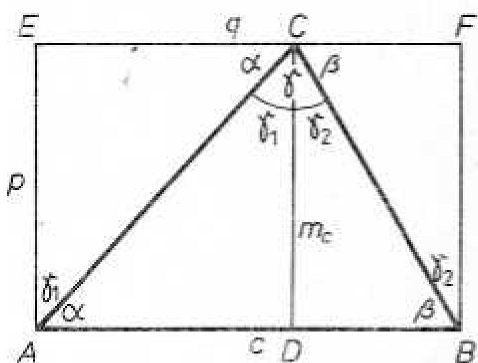
töröttvonallal. Mindkettő az A_1 és B_n pontokat köti össze, és

$nc<2b+nd$ vagy $n(c—d)<2b$,

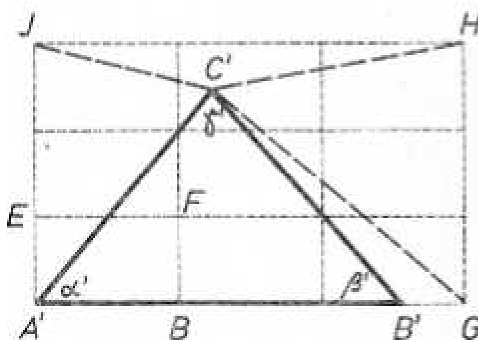
azaz $ne<2b$. Ez pedig minden n-re lehetetlen állítás, hiszen az Arkhimédész-féle axióma szerint (140. oldal), ha valamely szakaszt - most az e-t - elég sokszor veszünk, akkor bármekkora adott Szakasznál - most *2b-nél* - nagyobbat kaphatunk. Ez

ellentmondás miatt az eredeti $\alpha+\beta+\gamma>2R$ feltevés jogtalan.

Legendre második szögtétele, ugyancsak a maradék-axiómarendszerre építve, igazolja, hogy ha létezik egyetlen olyan háromszög, amelyben a szögösszeg két derékszög, akkor minden háromszög ilyen. Ha pedig valamely háromszögről kiderülne, hogy szögösszege kisebb két derékszögnél, akkor a többi háromszögben is így lenne. Legyen ugyanis az *ABC* háromszögben *(312. ábra)* $\alpha+\beta+\gamma=2R$. Ha a háromszög két hegyesszöge α és β, akkor rajzoljuk meg az m_c magasságot. Ez *ABC-t* két háromszögre bontja. Ha ezekben a szögek összege nem nagyobb 2R-nél, azaz az *ADC* háromszögben a szögösszeg



312. ábra



313. ábra

$2R—\delta_1$ ahol $\delta \geq 0$,

és a *DBC* háromszögben a szögösszeg

$2R\text{-}\delta_2$, ahol $\delta_2 \geq 0$,

akkor e két háromszög szögeinek összege:

$2R\text{-}\delta_1 + 2R\text{-}\delta_2 = \alpha + \beta + \gamma + 2R = 4R$.

Így $\delta_1 + \delta_2 = 0$. Mivel pedig $\delta_1 \geq 0$ és $\delta_2 \geq 0$, azért csak a $\delta_1 = 0$ és $\delta_2 = 0$ lehetséges.

Foglaljuk most az ábrán látható módon az *ABC* háromszöget az *ABFE* négyszögbe. Ha most az *AEC* háromszög egybevágó az *ADC* háromszöggel és a *BCF* háromszög a *BCD* háromszöggel, akkor C-nél $\alpha + \gamma + \beta = 2R$, és az *ABFE* négyszög minden szöge derékszög, azaz *ABFE* téglalap, melynek *AE* oldalát jelöljük p-vel és az *EF* oldalát *q-val*. Evidens, hogy az *ABFE* téglalappal egybevágó téglalapok összeillesztésével szerkeszthető *np, mq* oldalú téglalap, ahol *n* és *m* természetes számok.

Vegyünk most egy tetszőleges *A'B'C'* háromszöget α', β', γ' szögekkel. Építsünk az *ABFE-vel* egybevágó téglalapokból olyan téglalapot, amely már éppen lefedi az *A'B'C'* háromszöget *(313. ábra)*. Legyen ez az *A'GHJ* téglalap. Kössük össze a háromszög *C'* csúcsát e téglalap csúcsaival. Így legfeljebb 5, legalább 3 háromszögre bontottuk az *A'GHJ* téglalapot. E háromszögek szögösszege legyen rendre $2R—\delta_i$, ahol $\delta_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Ha most ennek az 5 háromszögnek a szögeit összeadjuk, akkor nyerjük a C'-t körülvevő 4R-nek és a téglalap szögösszegének (4R-nek) az összegét, 8R-et: $2R—\delta_1 + 2R— \delta_2 + 2R - \delta_3 + 2R\text{-} \delta_4 + 2R—\delta_5 = 8R$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{5} \delta_i = 0,$$

de és így $\delta_i = 0$, ha $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ez azt jelenti, hogy a részháromszögek szögösszege külön-külön is 2*R*. Ez vonatkozik a tetszőleges *A'B'C'* háromszögre is.

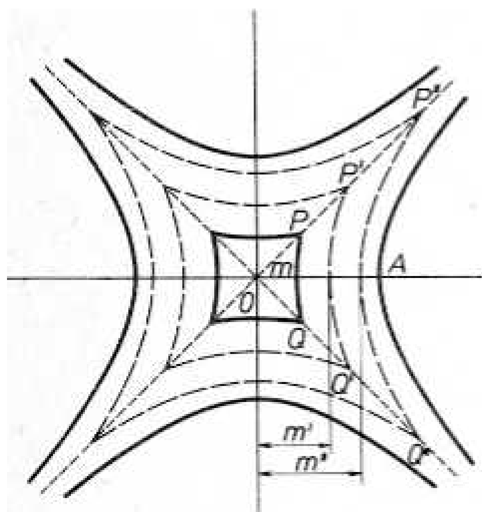
LEGENDRE első szögtételéből és a most ismertetett tételből következik, hogy ha létezik olyan *ABC* háromszög, amelyben $\alpha+\beta+\gamma<2R$, akkor minden háromszög ilyen. Tegyük fel ugyanis, hogy bár az *ABC* háromszögben $\alpha+\beta+\gamma<2R$, ami az első szögtétel szerint lehetséges, mégis létezik olyan *A'B'C'* háromszög, amelyben $\alpha'+\beta'+\gamma'=2R$. Az utóbbi tétel alapján azonban ekkor az *ABC* háromszög szögösszege is 2*R*. Ez pedig az eredeti, elfogadott feltevésnek ellentmond, tehát ha $\alpha+\beta+\gamma<2R$, akkor csak az $\alpha'+\beta'+\gamma'<2R$ lehetséges. - LEGENDRE első szögtételét 1828-ban GAUSS is igazolta.

Legendre bizonyítani próbálta, hogy 180°-nál kisebb szögösszegű háromszög nem létezik. Ennél a bizonyításnál azonban hibát követett el.

A NEMEUKLIDESZI GEOMETRIA FELFEDEZÉSE

GERLINGnek, GAUSS volt tanítványának a közvetítésével FERDINAND KARL SCHWEIKART (1780-1859) német matematikus és jogász 1818-ban, egy rövid leírást juttatott el GAUSShoz. Ebben kifejtette, hogy az euklideszi geometria mellett elképzelhető egy másik geometriai rendszer is, amelyben feltehető, hogy a háromszögek szögösszege nem egyenlő két derékszöggel. Vázolta azt is, hogy ez esetben belátható, hogy a háromszög szögösszege kisebb két derékszögnél, és hogy a szögösszeg annál kisebb, minél nagyobb a háromszög területe. Az is igazolható - állította -, hogy valamely egyenlő szárú háromszög szárait egyenlő mértékben meghosszabbítva, a szárszög csúcsához tartozó magasság véges határértékhez tart. Ezt szemlélteti a *314. ábrán* az *OPQ* háromszög változtatása. A rajz szerint, ha

$P \to E' \to P'' \to \infty$ és $Q \to Q' \to Q'' \to \infty$,



314. ábra

akkor m—>m' —> m"—>*OA,* ahol *OA* a hiperbola valós tengelyének a fele. Gauss egy évvel később, 1819-ben válaszolt GERLINGnek, és méltatta Schweikart elképzeléseit. Megjegyezte, hogy az elgondolásaival felépíthető geometriában bizonyos állandó ismeretében minden geometriai feladat éppen úgy megoldható, mint az euklideszi geometriában, egyben leszögezte, hogy mindezekkel ő már régen foglalkozik, tehát a prioritás jogát magának igényelte. Schweikart, erről értesülve, vizsgálatait abbahagyta, és addigi eredményeit sem közölte. Unokaöccse viszont, Adolf Taurinus (1794-1874) folytatta ilyen irányú kutatásait, és geometriai elképzeléseit ő is közölte GAUSS-szal.

Gauss Taurinust is megdicsérte, de levelében kifejtette, hogy a nemeuklideszi geometriára vonatkozó gondolatokat csak kevesek értenék meg, és arra kérte Taurinust, hogy eredményeiből semmit ne publikáljon, és a levélben foglaltakat szigorúan magánjellegű közlésnek tekintse. Taurinus ennek ellenére kiadott két kis füzetet 1826-ban. Az egyik címe *Geometriáé primae elementa* (A geometria alapelemei). A szerzőt tulajdonképpen a megismert matematikai formalizmus érdekessége ragadta meg, és ezzel élve kiépített egy trigonometriát, amely az V. posztulátum tagadására támaszkodott. Trigonometriai rendszerének valódi értelmét azonban nem látta

meg. A realizálhatóságot valamennyire megsejtette, amikor megmutatta, hogy az általa nyert trigonometriai képleteket meg lehet kapni a gömbi trigonometriai képletekből, ha azokban a gömb sugara helyett mechanikusan $r\sqrt{(-1)}$-et helyettesít. Ennek magyarázatát adni azonban nem tudta. Gauss amikor értesült Taurinus könyvecskéjéről - amelyben a szerző még azt is megjegyezte, hogy kíváncsi lenne Gauss véleményére -, megharagudott, és levelezését TAURINUSszal beszüntette. Taurinust Gauss pártfogásának elvesztése annyira megzavarta, hogy egyik idegrohamában minden matematikai tárgyú írását elégette, és matematikai kutatásait ő sem folytatta.

Már az eddig elmondottakból is kivehető, hogy a nemeuklideszi geometria gondolatával Gauss is foglalkozott. Levelezéseiből és hátrahagyott jegyzeteiből is kiolvasható, hogy a párhuzamosságot úgy definiálta, mint Bolyai János, és a nemeuklideszi geometria sok tételéhez eljutott. Ezeket azonban rendszerbe sohasem foglalta, ezekből semmit sem közölt, mert nem kockáztatta - saját bevallása szerint - a hihetetlenségig szokatlan tételekkel matematikai megbízhatóságának esetleges lejáratását, illetve nem vállalta a harcot a meg nem értés és nem utolsósorban az ő idejében uralkodó kanti filozófia abszolút tér felfogása ellen. Így aztán ő is csak a nemeuklideszi geometria úttörői közt foglalhat helyet, mint Saccheri, Lambert, Legendre, Schweikart és Taurinus.

Az V. posztulátum körüli, kétezer éves problémakör teljes megoldása hivatalosan (622. oldal) is a magyar Bolyai János és az orosz Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij érdeme. Ők nemcsak meglátták, hogy az V. posztulátum tagadásával új, ellentmondásmentes geometriai rendszer építhető fel, hanem ezt a rendszert fel is építették, és tisztában voltak az általuk alkotott geometria valóságtartamával is, azaz tudták, hogy tisztán matematikai eszközökkel el sem dönthető, hogy a valóságos, tehát a fizikai teret melyik geometriával lehet hűen leírni, az euklideszivel vagy a nemeuklideszivel, és hogy e kettő közötti választást csak fizikai mérések tehetik lehetővé. Bolyai János még ennél is továbblépett, úgy definiálta a párhuzamosságot, hogy az mind az euklideszi, mind a nemeuklideszi geometriának megfeleljen, és az erre alapozott geometriának speciális eseteként jelentkezett az euklideszi, illetve a Lobacsevszkij-féle geometria.

Bolyai János (1802-1860) Kolozsvárott született. Anyja Árkosi Benkő Zsuzsanna volt. Apját, Bolyai Farkast 1804-ben választotta tanárává a marosvásárhelyi református kollégium. Itt töltötte diákéveit János, aki apja hatása alatt már 4 éves korában kezdte elsajátítani az alapvető geometriai fogalmakat. 17 évesen lett a marosvásárhelyi református kollégium tanulója, de akkor már ismerte Eukleidész 6 könyvét, Euler algebráját, és tisztában volt számos fizikai törvénnyel is. Korában a német és a latin nyelv ismerete magától értetődött. Hamar tudomást szerzett apja érdeklődésének fő tárgyáról, a „paralellák tanáról”. Az osztályelsőként megszerzett érettségi után a két BOLYAInak kedves terve volt, hogy János az ifjúkori barát, Gauss vezetése alatt tanulja meg kora matematikáját. Gauss azonban - valószínűleg az apa ügyetlen érdeklődő levele miatt - nem vállalta ezt a feladatot. Így János a bécsi hadmérnöki akadémiára iratkozott be. Itt felvételi vizsgája olyan jól sikerült, hogy akadémiái tanulmányait rögtön a negyedik évfolyamon kezdhette meg. Akadémista korában, 1820-ban kezdett foglalkozni komolyan az V. posztulátummal. Mint az elődök, először ő is indirekt úton bizonyítani próbálta az V. posztulátumot.

12 éves korától kezdve eleget hallotta apjától, hogy aki ezt a problémát megoldja, akkora gyémántot érdemel, mint a Föld, és akinek ez sikerül, „annak halandók örök emléket állítsatok!” Most apja mégis megijedt attól, hogy fia is hiába áldozza életét azon célok elérésére, amelyeket ó' maga elérni nem tudott. Fiának így írt: „A paralellákat azon az úton ne próbáld; tudom én azt az utat is mindvégig - külön meg mértem azt a feneketlen éjszakát én is, az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne - az Istenre kérlek! haggy békét a paralelláknak.” Az intelem nem használt. János előtt 1823-ban - amikor alhadnagyként szolgált a temesvári erődítési parancsnokságnál - megvilágosodott, hogy „azon az úton” valóban nem érdemes próbálkoznia, hogy az V. posztulátum nem bizonyítható sem direkt, sem indirekt módon. Az V. posztulátumot el lehet fogadni és ugyanolyan jogosan meg is lehet tagadni. A többi euklideszi axióma és posztulátum megtartásával, de az V. posztulátum tagadásával

ellentmondásmentes geometria építhető fel. Ekkor írta haza: „A feltételem már áll," ... „és mihelyt mód lesz, a paralellákról egy munkát adok ki" ... „olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam" ... „most többet nem szólhatok, csak annyit, hogy semmiből egy ujj, más világot teremtettem". 1825-ben korszakalkotó felfedezését leírta (*Raumlehre*), és átadta apjának, majd 1826-ban parancsnokának, JOHANN WOLTER VON ECKWEHRnek, aki tanára volt az akadémián. Az utóbbi kézirat sajnálatosan elveszett, az 1825-öst még keresik. Végül is a világhírnevet jelentő mű BOLYAI FARKAS *Tentamenjének* 1832-ben megjelent első kötetében függelékként, latin nyelven öltött végső formát.

Művének eredeti címe: *Scientia Spatii* (A tér tudománya). Mivel a *Tentamen* függelékeként jelent meg, és ez a függelék így kezdődött : *APPENDIX. Scientia spatii absolute veram exhibens: a vérita-te aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (A priori haud 'unquam deci-denda) independentem: adjecta ad casu faisitatis, quadratura circuli geometrica,* ezért a mű köztudatba átment címe *Appendix.* Az *Appendix* teljes címe magyarul: *Függelék. A tér abszolút igaz tudománya: a XI. euklideszi axióma (a priori, soha el nem dönthető) helyes, vagy téves voltától független tárgyalásban: annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével.* E mű különlenyomatát 1831 júniusában Bolyai Farkas elküldte GAUSSnak véleményezés végett. Gauss akkor már olyan tekintélyes matematikus volt, hogy egy nyilvános dicsérete megnyithatta volna Bolyai János számára a tudományos életben az érvényesülés útját. Gauss azonban - akkor már 23 évi hallgatás után - nem a Bolyaiak várakozásának megfelelő levélben válaszolt. Családi viszonyainak ismertetése után így folytatta: „Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nekem ilyet nem szabad dicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de mást nem tehetek, ha dicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, melyet fiad követett és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott elmélkedéseimmel. Valóban ez rendkívül meglepett. Szándékomban állt, hogy saját munkámból, melyből egyébként mostanig csak keveset tettem papirosra, életemben semmit sem hozzak nyilvánosságra" ... „Ellenben szándékomban állt, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább ne .pusztuljon el velem együtt. Nagyon meglepett

tehát, hogy most már a fáradságtól megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött.”

A BOLYAIAKnak, de különösen JÁNOSnak igen zokon esett, hogy „Gauss a helyett, hogy az Appendix és a Tentamen nagy becsét egyenesen, határozottan és nyíltan elismerte volna”, .. .arra törekedve, „hogy a jó ügynek illő fogadtatást szerezzen, inkább mindezek elől kitérve, csak jámbor kívánságokkal és a kellő műveltség hiánya fölötti panaszokkal érte be. Bizony nem ebben áll az élet, munkálkodás és az érdem.” Bolyai János idézett szavainak igazat kell adnunk. Gauss következetes volt, a nemeuklideszi geometriáról most sem adott nyilvános véleményt. Csoda-e, hogy Bolyai János, aki teljes egészében látta nagy felfedezésének értékét, a különben is számos betegségtől sújtott állapotában mogorvává, embergyűlölővé vált, amikor egy magánlevélben csak udvarias vállveregetést kapott.

Az időközben betegségektől megrokkant Bolyai JÁNOSt 1833-ban, amikor három évre alkotói szabadságot kért, kapitányi ranggal félrokkantként nyugdíjazták. Nyugdíjazása után 15 évet anyai örökségén, a domáldi birtokon élt. 1834-ben élettársa lett Kibédi Orbán Rozália. Feleségül nem vehette, mert nem tudták előteremteni a katonatisztek nősüléséhez szükséges kauciót. Az 1848-1849-es szabadságharc alatt ez a rendelkezés érvényét vesztette, és ekkor Bolyai házasságát törvényesíttette. Két gyermeke született, Dénes és Amália. Bolyai János ügyetlenül gazdálkodott, állandó anyagi gondok gyötörték. Még ilyen körülmények között is volt ereje a további kutatásokhoz és egy értékes mű megírására. 1837-ben a lipcsei Jablonowski Társaság pályázatára kültе be a *Responsio* (Felelet) című munkáját. Részben Bolyai ügyetlensége volt az oka annak, hogy művét figyelemre sem méltatták. Dolgozatában kifejtette, hogy a társaság által meghirdetett téma, hogy ti. a geometriai képzetes mennyiségek megszerkeszthetők-e, nem fontos, hanem a komplex számoknak a geometriában való alkalmazása a lényeges. Ez utóbbi kérdést kiválóan ki is dolgozta. Korát megelőzve adta a komplex számok elméletét, de az alkalmazás példáit főleg a Bolyai-geometriából vette, amelyet a bírálók akkor még nem ismerhettek. Az újabb mellőzés lelkileg még inkább tönkretette. 1846-ban Marosvásárhelyre költözött. 1852-ben feleségétől elvált,

ekkor apjával, aki e házasságot ellenezte, kibékült. 1857-ben betegsége súlyosbodott, állandóan feküdt. Amikor 1860-ban tüdőgyulladást kapott, akkor már csak hű szolgálólánya volt mellette. 1860. január 27-én befejezte életét ez a lángeszű, tragikus sorsú férfi, akit a világon eddig élt tíz legnagyobb matematikus közt tartanak számon.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1792-1856) kiváló orosz matematikus volt. Nyizsnyij Novgorodban (Gorkij) született hivatalnokcsaládból. Az érettségit a kazanyi gimnáziumban tette le, és 1811-ben befejezte egyetemi tanulmányait. Egyetemi évei alatt nagy hatással volt rá Johann Martin Christian Bartels (1769-1836), Gauss tanára, ifjúkori pártfogója és barátja, aki 1808-tól 1820-ig volt matematikaprofesszora a kazanyi egyetemnek. Lobacsevszkij egyetemi pályafutása simán ívelt felfelé. Tanársegédből (1812) adjunktus (1814), majd rendkívüli tanár (1816) és csakhamar rendes tanár (1817) lett. Többször betöltötte a dékáni tisztet, és 1827-től 1846-ig az egyetem rektora volt. Rektorsága alatt emelkedett fel a kazanyi egyetem a külföld által is elismert, jó hírű intézetté.

Szinte kísérteties egybeesések tanúi lehetünk, ha párhuzamot vonunk BOLYAInak és LOBACSEVSZKIJnek a nemeuklideszi geometria felfedezésére vonatkozó története között. Lobacsevszkij professzorságának első éveiben (1816-tól) kezdett foglalkozni a párhuzamossági posztulátummal, Bolyai pedig 1820-tól kezdve. Először mindketten bizonyítani akarták az V. posztulátumot. Ennek hiábavalóságát Bolyai 1823-ban látta meg, és ekkor már kibontakoztak előtte az új geometria körvonalai. Erről tanúskodik apjához írt levele. Lobacsevszkij ugyancsak 1823-ban állapította meg egyetemi előadásain, hogy az V. posztulátum szigorú bizonyítása lehetetlen. Bolyai 1825-ben adta át apjának az új geometriát kifejtő, *Raumlehre* (Tértan) című, német nyelvű kéziratát. Sajnos ezt az öreg Bolyai nem sietett elküldeni Gausshoz, mint ahogyan azt annak idején a saját vélt megoldásával tette. Ez a kézirat, ha még megvan, akkor valószínűleg a méltóképpen még ma sem feldolgozott Bolyai-hagyatékban rejtőzik. Ennek egy másolatát nyújtotta át Bolyai 1826-ban Johann Wolter von ECKWEHRnek,

volt akadémiai tanárának, akkori parancsnokának. Ez a másolat elveszett. Lobacsevszkij ugyancsak 1826-ban nyújtotta be a kazanyi egyetemnek a *Szokrascsennoje izlozsenyie nacsal geometrii* (A geometria alapjainak vázlatos ismertetése) című tanulmányát. Ennek a kéziratnak a kísérőlevele előkerült, de maga a tanulmány elveszett. Tartalmáról véleményt csak abból a részletből alkothatunk, amely az *O nacsalah geometrii* (A geometria alapjairól) című munka első részében jelent meg. Ez a *Kazanyszkij Vesznyik* (Kazanyi Híradó) 1829— 1830-as évfolyamában olvasható, amint ezt a Borogyin-Bugaj-féle *Biograficseszkij Szlovar* (Életrajzi szótár) állítja. Az *Appendix* különlenyomatát Bolyai Farkas 1831 júniusában küldte meg Gauss-nak. Lobacsevszkij *Voobrazsaemaja geometria* (Elképzelt geometria) című tanulmányát 1835-ben közölte a kazanyi egyetem *Naucsnije Zapiszki* (Tudományos Közlemények) folyóirata. Ugyanitt jelent meg 1835-1838-ban a *Novije nacsala geometrii sz polnoj teorijej parallelnih linyij* (A geometria új alapjai a párhuzamosok teljes elméletével) című értekezés, amely megadja az új geometria rendszeres és teljes felépítését. Az idézett szovjet lexikon ezen adatai szerint Bolyai János a nemeuklideszi geometria rendszeres és teljes kifejtésében megelőzte Lobacsevszkijt. Ugyanezt erősítik meg B. G. Kuznyecov adatai a *Lobacsevszkij élete* című munkájának 117. oldalán (Szikra Kiadó, 1950).

Tudom, hogy jelen esetben - mint majdnem mindig - a prioritási vita teljesen értelmetlen, de jó tudnunk a tényeket, amikor még napjainkban is több, Bolyai János érdemeit kisebbítő nyomdatermék lát napvilágot. A tárgyilagos megállapítás az, hogy egymástól és másoktól is teljesen függetlenül a két lángész önállóan jött rá e 2000 éve gyűrűző probléma megfejtésére, és ezért egyformán osztozhatnak a felfedezés dicsőségében is. Ezt szentesítette hivatalosan is 1894-ben a Párizsban megtartott *A Matematikai Tudományok Nemzetközi Bibliográfiai Kongresszusa,* amikor alapos vizsgálat után úgy határozott, hogy az új geometria neve Bolyai-Lobacsevszkij-geometria legyen. A felfedezés és a kidolgozás elsősége az 1823-as dátummal BOLYAIé, de a közlés elsősége az 1829-1830-as dátummal LOBACSEVSZKIjé.

GAUSS 1841-BEN VETTE KÉZBE LOBACSEVSZKIJNEK AZ 1840-BEN BERLINBEN MEGJELENT *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (A párhuzamosok elméletére vonatkozó

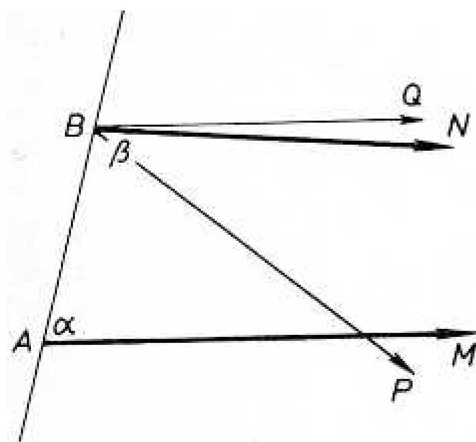
geometriai vizsgálatok) című könyvét, és ekkor GAUSSnak nem jutott eszébe, hogy 10 évvel előbb már olvasott hasonló tárgyú könyvet. A közvetlen elismeréstől LOBACSEVSZKIJjel szemben is tartózkodott, de a hiperbolikus geometria felfedezését nem említve, más érdemekre hivatkozva megválasztatta az orosz matematikust a Göttingeni Tudományos Társaság levelező tagjának. Így Lqbacsevszkij nevét egy csapásra megismerte a tudományos világ. BOLYAInak ennyi sem jutott, pedig ez további munkái számára a publikálási lehetőséget jelenthette volna. Nyomorúságos nyugdíjából új mű kiadatási költségeit nem tudta volna fedezni. Ezért maradt ő egykönyvű író, nem pedig azért, mert kutatómunkáját abbahagyta. Gauss ifjúkori barátjának fiát nem segítette, pedig ha valaki, akkor ő felismerte az *Appendix* értékét. Erről tanúskodik GERLINGhez intézett levele, amelyben azt írta az *Appendix* elolvasása után, hogy „Ezt a fiatal geométert, Bolyait elsőrangú lángésznek tartom". Gauss azonban azt is felismerte, hogy Bolyai után tarthatatlanok KANTnak a térre vonatkozó nézetei, de a nagy tekintélyű filozófussal való szembenállás kellemetlenségeit nem vállalta.

LOBACSEVSZKIJ MÁS TERÜLETEN IS SIKERES MATEMATIKUS VOLT. KÜLÖNÖSEN ÉRTÉKES EREDMÉNYEKET ÉRT EL AZ ANALÍZISBEN, AZ ALGEBRÁBAN, A TRIGONOMETRIKUS SOROK ÉS A GAMMA-FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉBEN, VALAMINT A MAGASABB FOKÚ EGYENLETEK GYÖKEINEK KÖZELÍTŐ MEGHATÁROZÁSÁBAN.

A SCIENTIA SPATII

Kíséreljük meg az *Appendixnek,* eredeti címén a *Scientia Spatiinek, A tér tudományá*nak rövid áttekintését. A részletes ismertetésre külön könyvre lenne szükség, de talán a rendelkezésre álló néhány oldal is elég ahhoz, hogy legalább megsejthessük a Bolyai-geometria alapelveit, eredményeit, jelentőségét és hatásait. A megértésben az a nehéz, hogy el kell szakadnunk minden szemléletes tartalomtól, amely a párhuzamosság euklideszi értelmezésével függ össze, amelynek a szemléletében nevelkedtünk, és szigorúan tartanunk kell magunkat a párhuzamosság Bolyai-féle meghatározásához. A másik nehézség az, hogy az egyenes, a félegyenes és a sík szavakat Bolyai sokkal tágabb értelemben használja, mint Eukleidész. A *Scientia Spatii* tartalmából

tulajdonképpen ezeket az újszerű, bevezető gondolatokat szeretném bemutatni.



315. ábra

1. Az első paragrafus a párhuzamosságot definiálja *(315. ábra)*. Bolyai a párhuzamosságot a félegyenesekre mondta ki a következőképpen:

Az *AM* || *BN,* ha

a) *AM és BN* az *AB* egyenes ugyanazon oldalán van,

b) *AM*-nek és *BN*-nek közös pontja nincs, és ha

c) a β szögtartomány minden *BP* félegyenese metszi az *AM* félegyenest.

Ha a *BA* félegyenest kezdjük forgatni pozitív irányban a *B* pont körül, akkor legyen a *BN* az első olyan félegyenes, amely már nem metszi *AM-et.* Amikor ez bekövetkezik, akkor $\alpha + \beta \leq 2R$.

Ilyen félegyenes csak egy van, hiszen a *BN* elválasztja az AM-*et* metsző félegyeneseket az *AM-et* nem metsző *BQ* félegyenesektől.

2. Ha az *AB* egyenest az *AM* félegyenesre merőlegesen rajzoljuk, és így képzeljük el a B-ből kiinduló A*M-mel* párhuzamos *BN* félegyenest *(316. ábra),* akkor kézenfekvő, hogy az *AM*-mel

ellenkező irányú *AM'* félegyeneshez szintén tartozik egy vele párhuzamos *BN'* félegyenes, amikor $\alpha' + \beta' \leq 2R$.

Ha az egyenlőtlenségben csak a kisebb jelet engedjük meg, akkor a *BN* és a *BN'* félegyenesek nem eshetnek egy egyenesbe, ha viszont csak az egyenlőség jele érvényes, akkor az említett két félegyenes egy egyenesbe esik, és ekkor éppen az euklideszi geometria párhuzamosságfogalmához jutunk.

Az $\alpha + \beta < 2R$ esetre építette fel Lobacsevszkij az ún. hiperbolikus geometriát. Ő kezdetben csak ezzel az esettel foglalkozott, míg Bolyai általában nem választotta szét a két esetet.

3. Könnyű belátni, hogy *A* és *B* nem kitüntetett pontok *(317. ábra).* Ha ugyanis *AM* || *BN,* akkor az *AM* egyenesén levő *C,* illetve *C'* pontra nézve is igaz, hogy *BN* || *CM,* illetve *BN* || C'M’ mert mindkét esetben teljesül a párhuzamosság definíciójának mind a három kikötése.

Ugyancsak belátható, hogy ha *AM* || *BN,* akkor a *BN* egyenesen levő bármely D illetve D' pontra is teljesül az *AM* || *DN (318. ábra),* illetve az *AM* || *D'N (319. ábra)* állítás. A *D* pontra nézve ugyanis igaz, hogy a β' szögtartományban bármely *DP* félegyenes metszi *AM-et,* mert *BP* metszi, és az *ABE* háromszögbe belépő *DP* valahol ki is kell hogy jöjjön a háromszögből, de ezt az *AB* oldalon nem teheti meg. Így *AM-e*t metszenie kell. A párhuzamosság másik két feltételének teljesülését szintén könnyű belátni.

A *D'P* félegyenes, amely a δ szögtartományban van, kell, hogy metssze *AM-et,* mert a vele párhuzamos *BE* metszi, és az *ABE* háromszögbe belépő D'P félegyenes csak az *AE* oldalon léphet ki a háromszögből, hiszen *BE-vel* párhuzamos (Bolyai szerinti párhuzamosság), tehát azzal közös pontja nincs. A másik két feltétel teljesülése a szögek vizsgálatával szintén belátható.

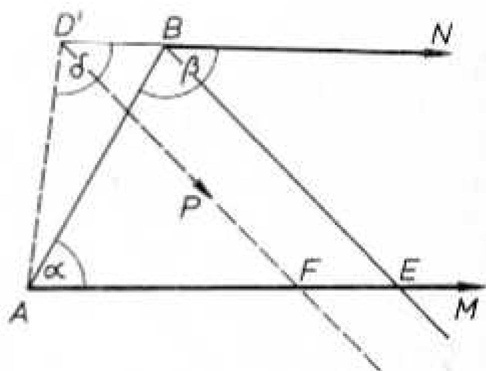
BOLYAI már a 2. pontban megemlíti, hogy a párhuzamosság ilyen módon való definiálása esetén léteznek olyan félegyenesek, amelyek nem metszik az *AM* félegyenest, de nem is párhuzamosak vele *(320. ábra).* Ezek, a *BN* fölötti *BU* félegyenesek, amelyeket ultraparalel félegyeneseknek szokás nevezni.

Ugyancsak a bevezető részben bizonyította be Bolyai azt is, hogy ha a *BP* félegyenest *(321. ábra)* a *B* pont körül forgatjuk úgy, hogy a *P* metszéspont az A*M* félegyenesen A-tól minden határon túl távolodjék, akkor az ε szög szigorúan monoton fogy, és tetszőleges kicsinnyé fogyhat, azaz $\lim_{(p \to \infty)} \varepsilon \to 0$.

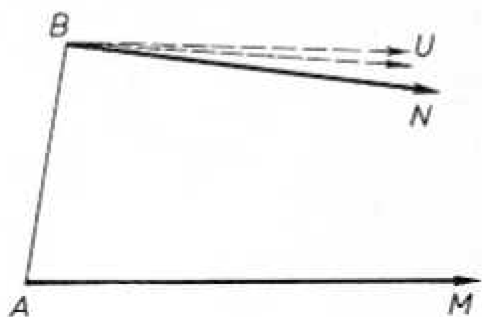
316. ábra

317. ábra

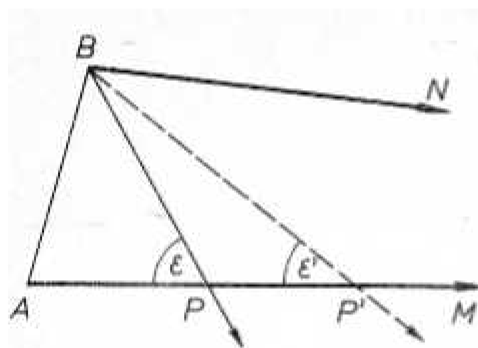
318. ábra

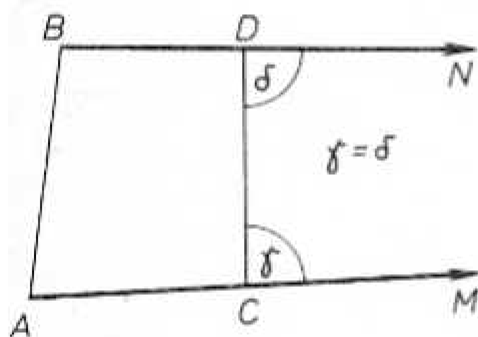


319. ábra

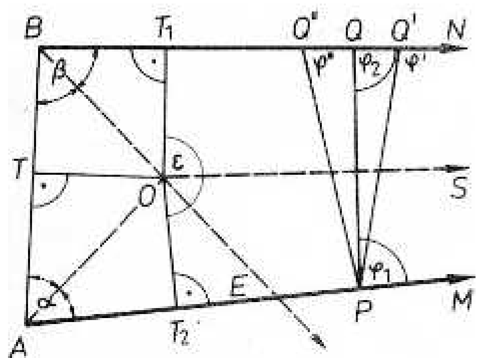


320. ábra

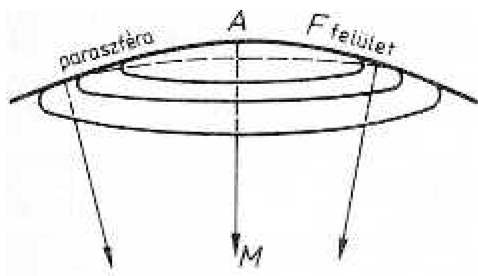




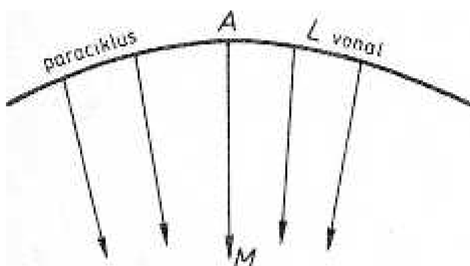
321. ábra



322. ábra



323. ábra



324. ábra

4. Az 5. paragrafusban Bolyai új fogalmat vezet be. Ha a *322. ábra* szerinti *AM* || *BN* és *CD*-re nézve igaz. hogy a *y* szög akkora, mint a δ szög, akkor a *C* és a *D* pontokat izogonális (egyenlő szögű) pontoknak nevezzük.

A következőkben megmutatja Bolyai, hogy az izogonális pontok e definíciója kölcsönös és egyértelmű egymáshoz rendelést jelent. Ha ugyanis *AM* || *BN* és a *P* pont az *AM* félegyenesre illeszkedik *(323. ábra),* akkor egy és csak egy olyan *Q* pont létezik amely P-nek izogonális pontja. A bizonyítás:

A β szögfelezője metszi *AM-et* az *E* pontban. Az a szögfelezője metszi *BE-t* az *O* pontban. O-ból állítsunk merőlegest *BN*-re, *AB*-re és *AM*-re! Ekkor: $OT_1 = OT = OT_2$, tehát $OT_1 = OT_2$.

Az ε szögfelezője *OS,* ezért az *OS* egyenese a *BN* és az *AM* egyenesek szimmetriatengelye. Tükrözzük erre *AM-e*t! *P* tükörképe a *BN*-re illeszkedő *Q* pont. A tükrözés miatt $\varphi_1 = \varphi_2$. Lássuk be, hogy csak egy ilyen *Q* pont van, mert a Q-tól különböző *Q'* vagy *Q"* pontokra nézve nem teljesülhet a definícióban kikötött szögegyenlőség. A

bemutatott szerkesztés tehát bizonyítja, hogy létezik a P-hez izogonális *Q* pont, és csak egy ilyen van.

A további néhány pontban megmutatja Bolyai, hogy az általa definiált párhuzamosság szimmetrikus tulajdonság, azaz, ha *AM* || *BN,* akkor *BN* || A*M.* Ugyanígy, ha *BN* || *PQ* és *AM* || *PQ,* akkor *BN* || *AM,* vagyis a párhuzamosság tranzitív vonatkozás.

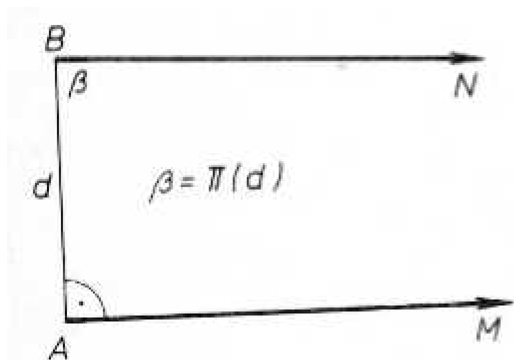
Eddig az első 10 paragrafusból emeltem ki azokat a bizonyításokat és definíciókat, amelyek a továbbiakhoz szükségesek. Ez a rész Bolyainál is önálló szerkezeti egység, amely nagyon szigorúan tisztázza a párhuzamosság fogalmát. A következő összetartozó rész felöleli a 11-24. paragrafusokat. Ebben Bolyai két új fogalmat ismertetett: a paraciklus és a paraszféra fogalmát. Kifejti ezenkívül a paraszférafelület geometriáját.

Képzeljük el a térben az *AM* félegyenessel párhuzamos összes félegyenest *(324. ábra),* és mindegyiken keressük meg az *A-v*al izogonális pontot. Az így nyert izogonális pontok összességét, amely a térben egy felület, paraszférának nevezzük. Az *AM* félegyenes a paraszféra tengelye. Ha ugyanezt csak a síkban gondoljuk el, akkor az A-val izogonális pontok halmazát paraciklusnak hívjuk. Ha a paraszféra *AM* tengelyén egy síkot fektetünk át, akkor ez a paraszféra felületből egy paraciklust metsz ki. Ha pedig a paraciklust megforgatjuk az *AM* félegyenes mint tengely körül, akkor az leír egy paraszférafelületet. Bolyai a paraszférát *F* felületnek, a paraciklust pedig *L* vonalnak nevezte.

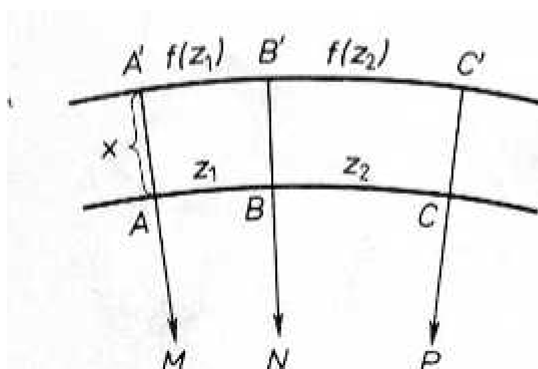
A 12-15. paragrafusok tételei arra a kérdésre felelnek, hogy a tér szerkezete homogén-e? Ezekben Bolyai bebizonyítja, hogy ha létezik két olyan párhuzamos egyenes, amelyekre nézve a *315. ábrán* $\alpha + \beta = 2R$, akkor a tér minden párhuzamos egyenespárja ilyen.

Tehát ha a térben két egyenes Eukleidész szerint párhuzamos, akkor a tér minden egyenespárja Eukleidész szerint párhuzamos, azaz a tér euklideszi szerkezetű. Ha viszont létezik két olyan párhuzamos egyenes, amelyre nézve $\alpha + \beta < 2R$, akkor ebből következik, hogy minden párhuzamos egyenespár ilyen tulajdonságú. Nem lehet tehát, hogy a matematikai (nem a valóságos!) tér egyik részében euklideszi, a másik részében pedig nemeuklideszi legyen. Ilyen értelemben tehát a matematikai tér homogén, egynemű. Ezen

a ponton Bolyai élesen elkülöníti a nemeuklideszi és az euklideszi geometriai rendszert, és vegyük észre azt is, hogy a geometriai és a fizikai tér fogalmát is. Bolyai az euklideszi rendszert 27-rendszernek, a nemeuklideszit pedig S-rendszernek nevezte. E kettőt egymástól csak a párhuzamosság definíciója különíti el. Azok a geometriai tételek, amelyek függetlenek a párhuzamossági posztulátumtól, mind a két rendszerben igazak: ezek abszolút tételek. Bolyai amellett, hogy kiépítette az S-rendszer geometriáját: a hiperbolikus geometriát, kereste az abszolút geometriai tételek rendszerét is, megalkotta az abszolút geometriát.



325. ábra



326. ábra

A 16-24. paragrafusokban Bolyai a paraszférán érvényes tételeket tárgyalja. Ezekből már világosan kitűnik, hogy az euklideszi geometriában a paraszféra sík, a hiperbolikus geometriában pedig

görbe felület. A paraciklus ennek megfelelően az euklideszi geometriában az egyenesnek felel meg, a hiperbolikus geometriában pedig görbe vonal. A paraszféra egyenese tehát a paraciklus.

Ezután Bolyai kimutatta, hogy - amint a szemlélet is sejteti - a paraszférát a tengelyére merőleges sík körben metszi. Bizonyította azt is, hogy a paraszféra, illetve a paraciklus uniformis felület, illetve vonal, azaz mind a kettő önmagában eltolható. Egy sík a paraszférához képest négyféle helyzetű lehet: vagy nem metszi, vagy érinti, vagy körben metszi, vagy paraciklusban metszi.

A 19. paragrafusban ismét fontos új fogalommal találkozunk *(325. ábra).* Az *AM* félegyenes *A* pontjában emelt merőlegesre mérjük fel a *d* távolságot, és ennek *B* végpontjából rajzoljuk meg a *BN* || *AM* félegyenest. A *d* távolsághoz tartozó β szöget párhuzamossági, vagy paralelszögnek nevezzük. Ennek nagysága függ a *d* távolságtól. Ha viszont megadjuk a β szöget, akkor tartozik hozzá egy *d* távolság, amelyet paraleltávolságnak vagy párhuzamossági távolságnak hívunk.

Ellenőrizhető, hogy a paraszférában a maradék-axiómarendszernek minden, a síkra vonatkozó axiómája teljesül, csak az egyenes szó itt paraciklust, a sík szó pedig paraszférát jelent. Az is belátható, hogy ilyen feltételek mellett az euklideszi párhuzamossági axióma is teljesül. A paraszféra felületen tehát az euklideszi geometria törvényei érvényesek.

Talán érdemes részletesen foglalkozni még a 23. és a 24. paragrafussal, mert itt lép színre a Bolyai-Lobacsevszkij-geometriára jellemző konstans.

A *326. ábrán* megrajzoltuk az *ABC* paraciklusívhez a vele párhuzamos *A'B'C'* paraciklusívet. Belátható, hogy

$$\frac{\widehat{A'B'}}{AB} = \frac{\widehat{B'C'}}{BC} = \lambda > 0.$$

Képezzünk most függvényt a következőképpen: Rendeljük az *AB*-hez az *A'B'*-*t*: *AB*->*A'B'* továbbá vezessük be a következő jelöléseket:

$AB = z_1$, $BC = z_2$. Ekkor

$z_1 \longrightarrow A'B' = f(z_1)$ és $z_2 \longrightarrow B'C' = f(z_2)$.

A bevezető aránypár szerint:

$f(z_1) = \lambda z_1$

és

$f(z_2) = \lambda z_2$,

általában

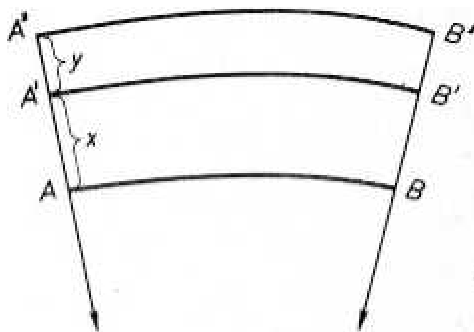
$f(z) = \lambda z$.

Bizonyára

$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$,

vagy

$f(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$ és $f(z) > 0$.



327. ábra

Bizonyítható, hogy fordítva is igaz: Ha egy függvény olyan tulajdonságú, hogy $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ és $f(z) > 0$, akkor kell, hogy $f(z) = \lambda z$ legyen, ahol a mi esetünkben λ csak a két paraciklus x távolságától függ, azaz $\lambda = \varphi(x)$.

Tüntessünk most fel három, egymással párhuzamos, egymásnak a

327. ábra szerint megfelelő paraciklusívet. Az előbbiek szerint:

$$\frac{\widehat{A''B''}}{\widehat{AB}}=\varphi(x+y),$$

$$\frac{\widehat{A''B''}}{\widehat{A'B'}}=\varphi(y),$$

$$\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}=\varphi(x).$$

Ezekből:

$$\frac{\widehat{A''B''}}{\widehat{AB}}=\frac{\widehat{A''B''}}{\widehat{A'B'}}\cdot\frac{\widehat{A'B'}}{\widehat{AB}}=\varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

Mivel

$$\frac{\widehat{A''B''}}{\widehat{AB}}=\varphi(x+y),\quad \text{azért}\quad \varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y),$$

amiből

$\ln \varphi(x+y)=\ln \varphi(x)+\ln \varphi(y)$, és $\ln \varphi(z)>0$, vagyis most

$f(z)=\ln \varphi(z)$.

Az előbbi pont szerint

$f(z)=\lambda z$,

tehát

$\ln \varphi(z) = \lambda z$,

illetve

$\varphi(z) = e^{\lambda z}$,

vagy

$$\varphi(z) = e^{\frac{z}{k}}, \text{ ahol } \frac{1}{k} = \lambda.$$

A φ függvény tehát exponenciális függvény. Ha k—> ∞, akkor $\varphi(z) = 1$. Az euklideszi geometriában a paraciklusok egyenesek, a paraciklusívek távolságok. Itt tehát A'B'/AB = 1,ami akkor következik be, amikor k végtelen naggyá lesz. Ha pedig k véges pozitív szám, akkor két megfelelő paraciklusív hányadosa $e^{z/k}$. A k állandó különböző értékeinek mindegyikéhez tartozik egy hiperbolikus geometria.

A 22-33. paragrafus időt kívánó, számításigényes rész. Olyan trigonometriai tételeket tárgyal, amelyek függetlenek a párhuzamossági posztulátumtól, tehát abszolút tételek. E rész végén Bolyai leszögezi, hogy eldöntetlen maradt, hogy a kétféle geometriából a valóságban melyik érvényes, hogy melyik törvényeivel lehet hűen leírni a fizikai tér törvényeit. Ha a hiperbolikus geometria érvényes, akkor méréssel meg lehet határozni a geometriára jellemző k értéket. Ezt Lobacsevszkij is próbálta csillagászati mérésekkel, de sikertelenül. E sikertelenséget ma nagyon jól meg tudjuk érteni, mert a relativitáselmélet szerint, ha a hiperbolikus geometria írná le a valódi tér viszonyait, akkor k igen nagy érték lenne, tehát e geometria törvényei nagyon megközelítenék az euklideszi geometria törvényeit. Kiderült, hogy amennyiben a világűr terének görbületi sugara nagyobb, mint 60 fényév, akkor a mai eszközeink pontossága mellett lehetetlen eldönteni, hogy melyik geometria érvényes. A relativitáselmélet szerint pedig ez a görbületi sugár $1{,}8 \cdot 10^9$ fényév, tehát jóval nagyobb 60 fényévnél.

A mű hátralevő része a hiperbolikus síkon végrehajtható szerkesztési feladatokkal foglalkozik. Amint láttuk, a Bolyai-

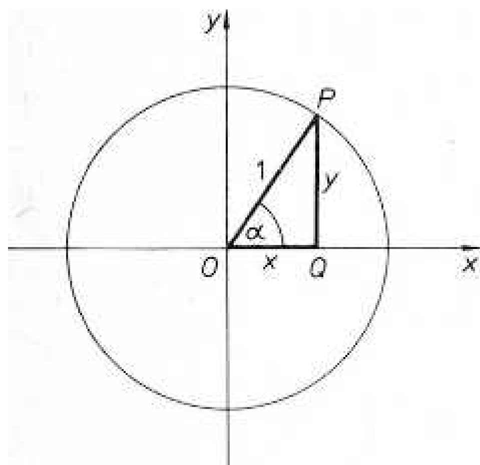
Lobacsevszkij-féle geometria számításaiba belejátszik az *e* alapú exponenciális függvény, sőt az ebből származtatható hiperbolikus függvények e geometriában nagy szerepet kapnak. Ezért szokás ezt a geometriát hiperbolikus geometriának nevezni.

A BOLYAI-LOBACSEVSZKIJ-GEOMETRIA HATÁSA

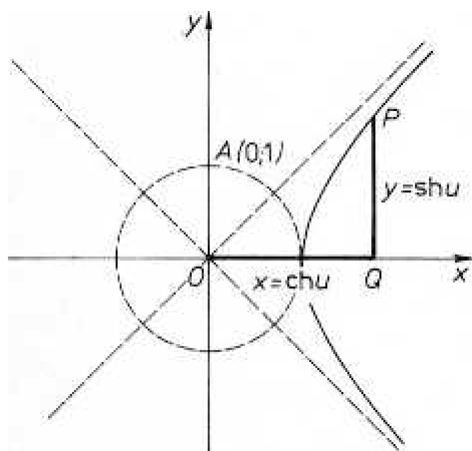
Lobacsevszkij Gausstól legalább közvetve elismerést kapott, de hazájában csak gáncsot. Bolyai JÁNOSt életében itthon még csak észre sem vették. Természetesnek kell találnunk, hogy a matematikusok is, akik az euklideszi geometriai szemlélettől megszabadulni még sokáig nem tudtak, kezdetben ellenszenvvel fogadták az új geometriát. Magát a felfedezést azonban nem lehetett sokáig véka alá rejteni. A Bolyaiak neve, ha nem is Gauss segítségével, de még is vele kapcsolatban került a világ színe elé. A Gauss-hagyaték rendezése közben 1856-ban sűrűn felbukkant a Bolyai név. Négy évvel később Heinrich Richard Baltzer (1818-1887) giesseni professzor már a két BOLYAInak és LOBACSEVSZKIJnek is több eredményét közölte, köztük a párhuzamosság új definícióját is. Az 1867-ben kiadott *Die Elemente der Mathematik* (A matematika elemei) című könyve részletesen tárgyalta a Bolyai-Lobacsevszkij-geometriát. 1867-ben az *Appendix* megjelent francia nyelven. Guillaume Julius Hoüel (1823-1886) bordeaux-i egyetemi tanár fordította le. Ugyancsak ő közölte Lobacsevszkij *Geometriai kutatásainak* francia fordítását. 1868-ban Guiseppe Battaglini (1826-1894) Rómában az *Appendixet és* Lobacsevszkij *Elképzelt geometriáját* is olaszra fordította, óriási lökést adott az új geometria elismerésének Eugenio Beltrami, aki felfedezte a pszeudoszférát, amelyen a Bolyai-geometria axiómái érvényesek. Erről már az analitikus geometria történetének keretében megemlékeztünk a 590-591. oldalakon. Az *Appendix* már megjelent franciául, olaszul, németül, angolul és japánul, amikor még nem volt magyar nyelvű kiadása. Végre 1897-ben Rados Ignácz és Suták József professzorok munkájaként megjelent két magyar fordítás is. Nem mulaszthatjuk el a BOLYAIAKkal kapcsolatban, hogy ne említsük meg Paul Gustav Stackel német matematikus és matematikatörténész nevét. Ez a berlini születésű heidelbergi professzor differenciálgeometriával, differenciálegyenletekkel, számelmélettel, függvényelmélettel és elméleti mechanikával foglalkozott. Nagy lelkesedéssel igen sokat tett a nemeuklideszi

geometria és ezzel kapcsolatban Bolyai János érdemeinek a megismertetéséért.

Bolyai János és Lobacsevszkij matematikai nagysága akkor bontakozik ki teljesen, ha áttekintjük azt a fejlődést, amelyet a matematikában elindítottak. Az új felfedezésnek először a létjogosultságáért kellett megküzdenie. Az egyik nehézség az volt, hogy sem Bolyai, sem Lobacsevszkij nem tudta bizonyítani rendszerének ellentmondásmentességét. Bolyai úgy gondolta, hogy geometriájának ellentmondástalanságát vissza lehet vezetni az euklideszi geometria ellentmondásnélküliségére. Látta ugyanis, hogy a hiperbolikus geometria (S-rendszer) terében a paraszférán érvényes az euklideszi geometria. Ennek a hiperbolikus térbe ágyazott felületnek euklideszi geometriája a hiperbolikus tér törvényeiből következik, tehát ha a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes, akkor az euklideszi geometria is az. Megfordítva: Ha találnánk az euklideszi térben egy olyan felületet, amelyen a hiperbolikus geometria érvényes, akkor ebből következnék, hogy a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes, ha az euklideszi geometria az. A gondolat megvalósításához azonban Bolyai olyan bonyolult számításokba keveredett, amelyek folytatását nem vállalta. Lobacsevszkij is úgy vélte, hogy a hiperbolikus geometria akkor kellőképpen megalapozott, ha létezik olyan tér, amelyben ez a geometria érvényes.



328. ábra



329. ábra

Elképzelt geometriájában igazolta, hogy a hiperbolikus geometria párhuzamosságfogalma következik abból, hogy e geometriában érvényes a hiperbolikus trigonometria, és ez fordítva is igaz. Ezért volt nagy jelentőségű BELTRAMInak az a felfedezése, hogy a pszeudoszférán az euklideszi sík trigonometriája helyett a hiperbolikus trigonometriát kell használni, hiszen ez azt jelentette, hogy ezen a felületen valóra válik a hiperbolikus geometria, azaz a pszeudoszféra belső geometriája izomorf a hiperbolikus geometriával. Beltrami pszeudoszférája azonban a Bolyai-

Lobacsevszkij-sík csak egy részének és nem a teljes hiperbolikus síknak a leképezése. Ez tehát még mindig hiányosság volt. David Hilbert 1901-ben azt is bebizonyította, hogy az euklideszi térben nincs olyan állandó negatív görbületű felület, amely ábrázolhatná a teljes hiperbolikus síkot.

Közbevetőleg szabad legyen ismertetnem legalább a fogalmát a jelen történetünkben oly nagy szerepet játszó hiperbolikus függvényeknek. Idézzük fel emlékezetünkben a trigonometrikus függvényeknek az egységsugarú körhöz fűződő definícióját. E szerint a *328. ábrán* látható helyzetű a szög szinusza az a irányszögű *OP* sugár és a kör *P* metszéspontjának az ordinátája. Az a szög koszinusza pedig ugyanennek a *P* pontnak az abszcisszája. Tehát.

$y = \sin \alpha$,

$x = \cos \alpha$,

amiből nyerhetjük az egységsugarú kör egyenletét:

$x^2 + y^2 = 1$.

Most a szinusz és a koszinusz szögfüggvényt az egységsugarú kör valamely pontjának koordinátáiként értelmeztük.

Definiáljuk ezután az *u* paraméter segítségével a következő görbét. Legyen e görbe egy tetszőleges pontjának két koordinátája:

$$x = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

ahol *e* a természetes logaritmusok alapja. A görbe Descartes-koordinátás egyenletét megkapjuk, ha e paraméteres egyenletrendszerből az *u* paramétert kiküszöböljük. A koordináták négyzetének a különbsége:

$x^2 — y^2 = 1$.

Ez pedig az egységtengelyű egyenoldalú hiperbola egyenlete *(329. ábra).* Szűkítsük le ennek értelmezési tartományát az ($1 \geq x < +\infty$) intervallumra, és nevezzük ezen hiperbolaág abszcisszáját

koszinusz hiperbolikusz u-nak (jele: ch *u)* és ordinátáját szinusz hiperbolikusz u-nak (jele: sh u).

Így e hiperbolikus függvények négyzetes összefüggése:

$ch^2 u — sh^2 u = 1$,

ami megfelel a trigonometrikus függvények esetében a $cos^2 x + sin^2 x = l$ összefüggésnek.

A hiperbolikus geometriát éppen azért nevezik így, mert abban a trigonometrikus függvények szerepét a hiperbolikus függvények veszik át. A kétféle függvény között kapcsolatot létesítenek a

cos u = ch iu és a i*sin u = sh iu

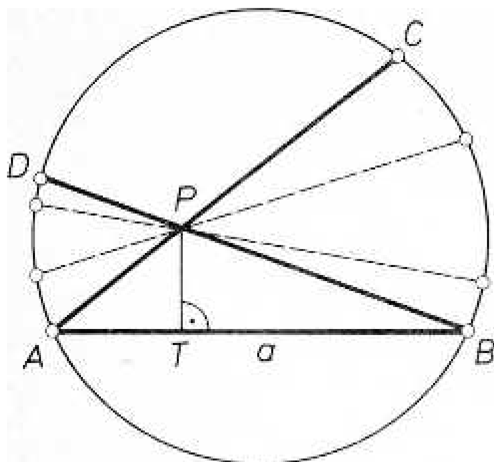
összefüggések, ahol i = √(— l) (697. oldal).

A hiperbolikus geometria egyik tökéletes modelljét alkotta meg Felix Christian Klein (1849-1925) német matematikus. Düsseldorfban született. A bonni egyetemen Plücker tanítványa, később asszisztense lett. Ő adta ki mesterének utolsó munkáját, a Neue Geometrie des Raumes (A tér új geometriája) című könyvét 1868-ban. 22 éves volt, amikor Párizsban megismerkedett Sophus Lie (1842-1899) kiváló, akkor még szintén fiatal, norvég matematikussal. Köztük személyes és szakmai barátság szövődött. Együtt ismerték meg a kitűnő francia matematikusnak, Camille JoRDANnak (1838-1921) 1870-ben megjelent Traité des substitutions et des équations algébríques (Értekezés a szubsztitúciókról és az algebrai egyenletekről) című könyvét. Ebből igen nagy hatással volt rájuk az akkor kibontakozó csoportelmélet. Úgy határoztak, hogy Lie a folytonos és Klein a diszkrét csoportok elméletét vonja be kutatásai körébe. 1872-ben Klein az erlangeni egyetemen kapott tanszéket. Itt dolgozott 1875-ig, aztán a müncheni technikai főiskola és a lipcsei egyetem után 1886-tól végleg megmaradt a göttingeni egyetemen, amely Gauss, Dirichlet és Riemann munkálkodásának eredményeként még akkor is a matematika egyik európai fellegvára volt. Klein kutatásai kiterjedtek a csoportelmélet, az algebrai egyenletek, az elliptikus függvények, az automorf függvények és a nemeuklideszi geometriák

területére.

A hiperbolikus geometria modelljének megteremtésében felhasználta CAYLEYnek már ismertetett zseniális távolságdefinícióját (558. oldal). Megfeleltetést hozott létre egy kúpszelet, például egy ellipszis (kör) belső pontjai és a végtelen kiterjedésű hiperbolikus sík pontjai között. A Cayley-féle távolsággal számolva az ellipszis belsejének geometriája ugyanazon ívelemből származtatható, mint a hiperbolikus geometria. Láttuk egyszersmind Gauss gondolatmenetét (586. oldal), amellyel kimutatta, hogy egy tér íveleme egyedül is megszabja a tér geometriáját. A Klein-féle leképezésben a Bolyai-sík pontjai például egy kör belső pontjaiba mennek át.

Az egyeneseknek a végpontjaitól megfosztott húrok felelnek meg, a párhuzamos egyeneseknek pedig a közös végpontú húrok (végpont nélkül). Így például a *330. ábra* szerint az *a* egyenesen kívüli *P* pontból az a-val párhuzamosan két egyenes húzható: *AC* és *BD*. Ezeknek nincs közös pontjuk a-val. A szaggatott vonalú egyenesek az ultra-paralel egyenesek stb. Az euklideszi sík egy körében a Cayley-mértéken felépült geometria tehát izomorf a hiperbolikus sík geometriájával, de belátható izomorfiája az euklideszi síkkal is (például inverzióval), tehát az euklideszi és a hiperbolikus sík is izomorf. Ebből következik, hogy a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes, hiszen a vele izomorf euklideszi geometria az. E gondolatmenet minden további nélkül kiterjeszthető a háromdimenziós térre is, ahol a kör szerepét a gömb veszi át.



330. ábra

A hiperbolikus geometriák modelljeinek - mert nem csupán a Klein-Cayley-modell létezik - csak egyik hasznuk volt, hogy meggyőzték a matematikusokat a modellezett geometria szigorú
logikai megalapozottságáról, ugyanakkor ezek a modellek feltárták az új geometria és a matematika más területei közötti kapcsolatokat is. Elősegítették tehát az alkalmazást, és mindinkább meghatározták a hiperbolikus geometria helyét a többi geometria között.
Éppen Klein látott meg egy osztályozási szempontot. Észrevette ugyanis, hogy a geometriai transzformációk is csoportot alkotnak. Egy halmaz csoport, ha elemeire definiálva van egy asszociatív művelet; erre a műveletre a halmaz zárt; van egy olyan eleme, amelyet a művelet változatlanul hagy; és e műveletre nézve minden elemnek létezik inverze. A geometriai transzformációk ezeket a követelményeket kielégítik. A köztük fennálló műveletnek tekinthető a transzformációk egymás utáni alkalmazása, amit általában szorzásnak szokás nevezni. Így a transzformációk csoportjában létezik identitás, például két eltolás szorzata (egymásutánja), amely ismét eltolás, és minden transzformációnak van inverze. Valamely geometriát meghatároznak az abban tárgyalt elemi alakzatok és az ezekre megengedett transzformációcsoport. Ezeket meg kell adni. Egy ilyen módon definiált geometria kutatja elemi alakzatainak azokat a tulajdonságait, amelyek a benne megengedett transzformációkkal szemben invariánsak. A sík euklideszi geometriája a síkalakzatok olyan tulajdonságait vizsgálja, amelyek változatlanok az eltolással és a pont körüli elforgatással szemben. Ez megfelel annak az euklideszi követelménynek, hogy a síkalakzatok a síkban való mozgatáskor nem változnak, merevek. Ezek a transzformációk meghatározhatók analitikusan is az ún. transzformációs formulákkal. Az euklideszi geometriában, ha egy $P(x; y)$ pont transzformáltja a $P'(x'; y')$ pont, akkor a transzformációs formulák:

$$x' = ax + byc$$

$$y' = dx + ey + f,$$

ahol az együtthatók valós számok, és $ae—bd = 1$.

KLEIN EZEKBŐL AZ ANALITIKUS FORMÁKBÓL KÖVETKEZTETETT.

LÁSSUNK ERRE EGY PÉLDÁT! AZ ELŐBBI ESETBEN AZ $ae—bd=1$ kikötés nyilván speciális esete az általánosabb $ae—bd\neq 0$ feltételnek. Ha csak ennyit kívánunk meg, akkor ez a transzformációs csoport a szögeket és a távolságokat nem feltétlenül hagyja változatlanul, tehát nem egybevágósági transzformációcsoport. Az azonban igaz, hogy ekkor valamely kúpszelet képe ugyanolyan típusú kúpszelet. Ezt a transzformációcsoportot vizsgálta Möbius, és ő nevezte el affin transzformációnak, mert minden véges (finite) pontot szintén véges pontba visz át. A két transzformáció analitikus formája alapján tehát az euklideszi geometria az affin geometriának egy speciális esete.

Az affin geometria azonban maga is különleges fajtája az

$$x'=\frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \quad \text{és} \quad y'=\frac{Ax+By+C}{dx+ey+f}$$

formákkal megadott projektív geometriának, a $d=e=0$, $f=1$ esetre. A projektív transzformációkról már csak annyi mondható el, hogy kúpszeletet kúpszeletbe visznek át, és megtartják az alakzatok metszési viszonyait. Az affin geometria tehát a projektív geometria egyik esete. A különböző geometriák - mint látjuk - transzformációcsoportjukban különböznek. Ilyen osztályozási szempont szerint a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria is a projektív geometria egyik fajtája.

A most példákkal vázolt Klein-féle osztályozási elv lehetővé tette új geometriák születését. Minden olyan alapalakzatra építhető új geometria, amelyekre valamely transzformációcsoport alkalmazható. Klein ezeket a csoportelmélet használhatóságát hangsúlyozó gondolatait is 1872-ben fejtette ki, egyetemi székfoglaló előadásában, Erlangenben. Az előadás később nyomtatásban is megjelent *A legújabb geometriai vizsgálatok összehasonlító áttekintése* címen, de a matematikusok *Erlangeni program* néven idézik. Klein *Erlangeni programja* az első olyan jelentős geometriai alkotás, amelyre nem mondhatjuk, hogy akár csíráiban is már az ógörögöknél létezett. Hatásai a geometriában mind a mai napig nyomon követhetők.

Klein tehát szempontokat adott új geometriák alkotásához. Ugyanennek a célnak az elérésére más módot fedezett fel a XIX. század egyik kimagasló matematikusa:

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), aki a Hannover melletti Breselenz, szászországi falucskában született. Apja protestáns pap volt. Gyenge tüdejű, vézna fiát igyekezett igen jó körülmények között neveltetni. Középiskolai tanulmányait a hannoveri és lüneburgi gimnáziumban végezte. Már ekkor megismerte Euler és Legendre munkáit. Érettségi után Göttingenben teológiát tanult, de hallgatta Gauss előadásait is. Az 1847-1849-es években a berlini egyetemen olyan tanárai voltak, mint Dirichlet, Jacobi és Steiner. 1849-ben visszatért Göttingenbe. Ott Wilhelm Eduard Weber hatása alatt felébredt érdeklődése a fizika iránt. 1851-ben nyújtotta be doktori értekezését a komplex változós függvények elméletéről. 1854-ben magántanár lett a göttingeni egyetemen. Ekkor olvasta fel értekezését *Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* (A geometria alapjait képező hipotézisekről) címmel. Ebben a nagyszerű előadásban fejtette ki egy nagyon általános geometriának az alapelveit (Riemann-geometria). Az előadás anyagát Riemann halála után, 1868-ban publikálta Dedekind. Riemann 1857-ben a göttingeni egyetem rendkívüli és 1859-ben rendes tanára lett. Egyik mesterének és későbbi barátjának, DIRICHLET-nek a tanszékét vette át.

Érdeklődési területe igen széles volt. Ez a félénk, kisebbségi érzésekkel küzdő tudós minden munkájával jelentőset, maradandót alkotott, és számos területen irányt szabott a XIX. és XX. századi matematika fejlődésének.

A doktori értekezésében és az 1857-ben kiadott *Az Abel-függvények elméletében* lefektette az alapjait a függvényelmélet egy geometriai irányának. Feltárta az alkalmazási lehetőségeket is főleg az elméleti fizikában. Ugyanakkor számos topológiai felfedezéssel mutatott rá a topológia fontosságára a komplex változós függvények elméletében. A konform leképezések elméletébe - amelyet összekapcsolt a térképészettel - bevezette a Riemann-felületek fogalmát. Elsőként kapcsolta össze a konform leképezés és a komplex változójú függvény fogalmát. Mindezeket az új gondolatokat alkalmazta az

Abel-függvények vizsgálatára, és meglátta a függvények egy új osztályozási szempontját.

Az 1859-ben megjelent *Az olyan törzsszámok számáról, amelyek nem nagyobbak egy adott számnál* című tanulmánya. Ez az első olyan mű, amely a komplex számok oldaláról közelítette meg a törzsszámok eloszlásának kérdését.

Jelen témánk szempontjából most legfontosabb a már idézett magántanári értekezése a geometria újfajta megalapozásáról. A teret nagyon általánosan tetszőleges dimenziójú topológiai halmazként értelmezte. Egy geometriát meghatároz az abban szereplő elemek halmaza; ezen elemek helyének (koordinátáinak) ismerete; és az az eljárás, amellyel meg lehet mérni két végtelen közeli elem távolságát. Ez az utóbbi feltétel elárulja, hogy Riemann visszatért a geometria meghatározásánál a Gauss-féle ívelemhez, illetve azt általánosította.

Hogy gondolatait jobban megközelíthessük, térjünk vissza mi is a Gauss-féle térelmélethez. Amint ezt megállapította GAUSS: a felületen bevezetett

$x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ és $z = z(u;v)$

Gauss-féle görbe vonalú koordinátákkal a háromdimenziós ívelem négyzete:

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$,

amiből felépíthető a tér geometriája (588. oldal).

Az ívelem képletét átalakíthatjuk úgy, hogy abban az u és v paraméterek szerepeljenek. Ehhez kell tudnunk kissé differenciálni. A

$$\frac{dx}{du}=\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}\text{-ból:}\quad dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

a

$$\frac{dy}{du}=\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}\text{-ból:}\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial v}{\partial v}dv$$

és a

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}\text{-ból:}\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Ezeket használva az ívelem a szokásos jelölésekkel:

$(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2,$

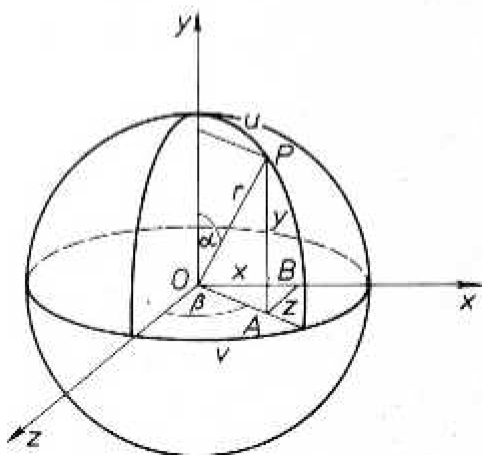
ahol

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Az *E, F és G* mennyiségeket nevezik Gauss-féle együtthatóknak.



331. ábra

Nemcsak a példa kedvéért alkalmazzuk ezt az eredményt a gömbfelületre, hanem azért is, mert a gömbfelület geometriája, a szférikus geometria egy kis betekintést enged a nemeuklideszi geometriák világába. Vezessünk be polárkoordinátákat! A *331. ábrán* szemlélhető *r* sugarú gömb *P* pontjának polárkoordinátái az *r,* az α szög (poláris szög) és a β szög (az azimut szöge). Ekkor

x = sin α * sin β

y = *r* * cos α

z = r * sin α - cos β.

Ez megfelel a Gauss-féle *x(u;* v), *y(u;* v), *z(u;* v) görbe vonalú koordinátáknak, csakhogy most *u* = *r*α és *v* = *rβ.* Így a Gauss-együtthatók:

$$E = r^2 \cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta + r^2 \sin^2\alpha + r^2 \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta = r^2,$$

$$F = r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta + 0 -$$

$$- r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = 0,$$

$$G = r^2 \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + 0 + r^2 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta = r^2 \sin^2\alpha.$$

A gömbfelület íveleme tehát: $(ds)^2 = r^2(d\alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha(d\beta)^2$. Gömbünk felszínének minden pontjában a Gauss-féle görbület $k = 1/r^2$, továbbá rajzunk szerint $r\alpha = u$ és $r\beta = v$, amikor is $d\alpha = du/r$ és $d\beta = dv/r$. Ekkor

$$(ds)^2 = (du)^2 + \sin^2\left(\frac{u}{r}\right) \cdot (dv)^2.$$

A szférikus geometria többféle szempontból is figyelemre méltó. Egyrészt igen szemléletesen bemutatható rajta a Gauss-koordináták kezelése, másrészt igen közeli példa a nemeuklideszi geometriára továbbá még a hiperbolikus geometria íveleme is megkapható belőle. Már Lambert is arra gondolt, hogy az általa fel nem ismert hiperbolikus geometria tételei valószínűleg a képzetes sugarú gömb felszínén érvényesek. Nála ugyanis a háromszög szögösszege kisebb volt 180°-nál, és tudta, hogy a gömbháromszög szögösszege pedig nagyobb 180°-nál. Amint ezt BELTRAMInál láttuk, az állandó negatív görbületű felület otthont ad a Bolyai-Lobacsevszkij-geometriának. Ha tehát a gömbi geometria ívelemének képletében $1/r^2$ helyett $-1/r^2$ -et írunk, azaz állandó pozitív görbület helyett

állandó negatív görbületet szerepeltetünk, akkor az ívelem képlete :

$$(ds)^2 = (du)^2 + \sin^2\left(\frac{iu}{r}\right)(dv)^2.$$

A 633. oldal szerint azonban

$$\sin\left(\frac{iu}{r}\right) = i\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{u}{r}\right),$$

tehát

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}u)^2 - \operatorname{sh}^2\left(\frac{u}{r}\right)(\mathrm{d}v)^2.$$

Ez valóban a hiperbolikus geometria ívelemének a képlete, amely mutatja azt is, hogy a trigonometrikus függvény szerepét miként vette át a megfelelő hiperbolikus függvény.

A gömbfelszín geometriáját jól ismerte Lambert, és még jobban Cayley. Itt az egyenesek szerepét a főkörök veszik át. Ebben a geometriában párhuzamos egyenesek nincsenek, tehát a párhuzamossági posztulátumról nem beszélhetünk, azaz Lambert valójában az első nemeuklideszi geometriát fedezte fel. A gömbfelületen az sem igaz, hogy két ponton keresztül mindig csak egy egyenes halad át, sőt az sem, hogy két egyenesnek csak egy közös pontja lehet. Azért, hogy ezek az axiómák megmaradjanak, Riemann egyetlen pontnak tekintette a gömb valamely átellenes pontpárját. Így viszont olyan geometriához jutott, amelyben az egyenesek véges hosszúságúak. Szokás ezt a geometriát elliptikus geometriának nevezni, hogy az elnevezésből is kidomborodjék a hiperbolikus geometriával való szembenállás és egyben az a megegyezés, hogy mindkettő nemeuklideszi geometria. A szférikus geometriát sokszor Riemann-geometriának is nevezik. Ez helytelen, mert egyrészt jogosabb lenne Cayley- vagy Lambert-féle geometriának hívni, másfelől pedig az igazi Riemann-geometria a szférikus geometriánál sokkal általánosabb.

Riemann a Gauss-féle ívelemre alapozott geometriában azt hangsúlyozta, hogy az ívelem, illetve a távolságmeghatározás egy másodfokú algebrai formával történik. Sok olyan másodfokú alak van azonban, amely a távolságfogalom iránti követelményeknek megfelel. Riemann tehát Gauss távolságmeghatározását, metrikáját általánosította úgy, hogy például egy

HÁROMDIMENZIÓS TÉRRE:

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + g_{12}\,dx\,dy + g_{13}\,dx\,dz + g_{21}\,dy\,dx + g_{22}(dy)^2 + g_{23}\,dy\,dz + g_{31}\,dz\,dx + g_{32}\,dz\,dy + g_{33}(dz)^2$$

legyen, ahol még azt sem kötötte ki, hogy a g_{ik} együtthatók állandók legyenek. Csak annyit szabott meg, hogy ezek az együtthatók az x, y és z olyan folytonos függvényei legyenek, amelyek kétszer differenciálhatok. Rögtön látszik, hogy ha $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ és $g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0$ akkor a definíció átmegy a $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ távolságképletbe, ami pedig az euklideszi geometria alapja. Ez a specializálás azt is elárulja, hogy Riemann az egymáshoz végtelen közeli pontokra nézve feltételezte a tér euklideszi voltát, de ezt a térnek csak infinitezimálisan kicsiny részére kötötte ki. A változók száma tetszés szerint növelhető, azaz a meghatározás tetszőleges dimenziójú térre alkalmazható. Teljes általánosságban tehát az n-dimenziós tér esetén a tér íveleme:

$$(ds)^2 = \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} g_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$

ahol g_{ik} az x_i, x_k változók folytonos, kétszer differenciálható függvénye. Általában tehát a Riemann-terek nem állandó görbületű terek, hiszen a g_{ik} együtthatók a hely függvényeként pontról pontra változhatnak.

A Riemann-terek analitikai apparátusát, a tenzoranalízist a XX. század első részében Tullio Levi-Civita és Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) olasz matematikusok fejlesztették ki. A Gauss-féle görbe vonalú koordináták és a Riemann-terek elmélete bőséges alkalmazásra találtak a fizikai terek elméletében és nem utolsósorban Einstein relativitáselméletében.

Most áttekintettük annak a hatalmas fejlődésnek néhány fontos állomását, amely az absztrakt geometriai terek elméletére vonatkozik, és amely fejlődés akkor indult meg, amikor felvetődött a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria megvalósulásának a kérdése. Már Bolyai és Lobacsevszkij is élesen különválasztotta a fizikai tér és az absztrakt matematikai tér fogalmát. A legáltalánosabb térfogalom megfogalmazója - mint már említettem - a francia Maurice René Fréchet mellett a magyar Riesz Frigyes volt.

Más irányú fejlődést jelentett a Bolyai-Lobacsevszkij-geometria hatása alatt megindult axiómarendszer-vizsgálat. Arra a kérdésre keresték a feleletet, hogy milyen feltételeknek kell megfelelnie egy „tökéletes" axiómarendszernek. Azt már régen látták a matematikusok, hogy Eukleidész axiómarendszere hiányos, és nem is szabatos. A kritika valóban jogos volt, de ennek ellenére mintegy kétezer éven át nem tudtak helyette lényegesen jobbat megfogalmazni. Valószínűleg azért, mert nem ez volt a matematika központi kérdése. Csupán egy-egy szakterületen bővítették esetenként az euklideszi axiómarendszert, vagy igazítottak annak egyik-másik axiómáján. A nemeuklideszi geometriák felfedezése azonban az axiómarendszer átfogó vizsgálatát központi kérdéssé tette. Ez érthető, hiszen kiderült, hogy egy sérthetetlennek hitt axióma tagadásával is lehet ellentmondásmentes geometriát felépíteni. A kérdés tehát az, hogy mikor tökéletes egy axiómarendszer?

Az axiómarendszerek általános vizsgálatában kiemelkedően három nevet kell említenünk: Pasch, Peano és Hilbert nevét.

Moritz Pasch (1843-1930), breslaui születésű német matematikus, giesseni professzor az elsők között foglalkozott az axiómarendszerek, pontosabban az euklideszi axiómarendszer vizsgálatával. Szakított azzal a hagyománnyal, amely minden geometriai fogalmat definiálni akar. Valamely fogalmat mindig más, egyszerűbb fogalommal vagy fogalmakkal határozunk meg, és a közben felbukkanókat még egyszerűbbekkel stb. Nyilván a fogalmak e láncolatának egyszer meg kell szakadnia. El kell jutnunk egy olyan egyszerű fogalomhoz, amelynél egyszerűbbet már nem találhatunk. Az ilyen legegyszerűbb fogalmak tartalma tehát nem definiálható, de közérthetőségük miatt erre nincs is szükség. Pasch a

geometria nem definiálható, legegyszerűbb fogalmaként kezelte a pontot, az egyenest és a síkot. Észrevette azt is, hogy EUKLEIDÉSZnek az a posztulátuma, amely szerint két ponton át egyenes húzható, helyesen így hangzik: két különálló pont egyetlen egyenest határoz meg, és egy egyenest valóban mindig meg is határoz, vagyis két különálló pont pontosan egy egyenest határoz meg. Ő egészítette ki Eukleidész axiómarendszerét a rendezés axiómacsoportjával. 1882-ben ismertette a róla elnevezett Pasch-féle axiómát. E szerint, ha a *P, Q* és *R* pontok nem esnek egyazon egyenesre, és ha a *g* egyenes átmegy a *PQ* szakasz egy belső pontján, akkor átmegy az *R* ponton is, vagy pedig egy olyan *S* ponton, amely vagy a *PR,* vagy az *QR* szakasz belső pontja. Pasch igyekezett a geometria axiómarendszerét logikai elvekre alapozva kifejleszteni, és ebben haladta túl Eukledészt, aki főleg szemlélet alapján fogalmazta meg követelményeit, és így sok rejtett, de lényeges megállapítást elmulasztott. Az axiómarendszer általános vizsgálatában fontos eredményeket ért el

Giuseppe Peano (1858-1932) olasz matematikus, a torinói egyetem analízisprofesszora. Leibniz elveit követve igyekezett megteremteni a matematika formális-logikai alapjait. Az ő és tanítványainak (például Mario Pieri, 1860-1913) igyekezete eredményezte, hogy kialakult a legfontosabb matematikai fogalmak egy szimbólumrendszere, amelyből több jel életképesnek bizonyult, mint például az E = eleme, U = uniója (logikai összeadás), = metszete (logikai szorzás) és a C= része jelek. Peano a matematikai eljárásokat - mintegy a matematika technikáját - szimbólumokra igyekezett visszavezetni a matematika egész területén az aritmetikától a geometriáig. Ezt a törekvését kortársai, köztük a XX. századi legnagyobb matematikusok is (például Poincaré) nevetségesnek tartották, de szimbólumrendszerével a matematikai logika és a geometria logikai analízisének területén mégis megteremtett egy jól bevált matematikai gyorsírást, és a geometria fejlődését olyan irányba terelte, amely a geometriai objektumokat megfosztja konkrét geometriai tartalmuktól, és csak azokat a formákat vizsgálja, amelyek a köztük fennálló logikai kapcsolatokat fejezik ki. Ebben az izomorfizmus elvére alapozott axiomatikus geometriában nem szükséges, hogy a pont, az egyenes és a sík szavak geometriai tartalommal rendelkezzenek. Peano és követői tehát a geometriában meghonosították a természet tárgyai között

uralkodó törvényeknek az euklideszi elsődleges absztrakciónál magasabb fokú absztrakcióját.

Peano nevét viselik a természetes számokra vonatkozó, az aritmetika axiomatikus alapjait képező Peano-féle axiómák. Három olyan fogalmat választott ki, amelyeket nem definiált (primitív fogalmak): a nulla, a nem negatív egész szám és az „azt követő” fogalmakat. Így a szimbólumokkal is leírható - és ez PEANÓnál lényeges szempont - Peano-féle öt axióma a következő: 1. A nulla szám. 2. Ha *a* szám, akkor az azt követő is szám. 3. A nulla nem követi egyik számot sem. 4. Ha két szám ugyanazt a számot követi, akkor azok egyenlők. 5. Ha az *S* halmaz tartalmazza a nullát és az *S* minden számának a következőjét, akkor minden szám az S-ben van.

A Peano-axiómák 1889-ben jelentek meg PEANÓnak az *Arithmetica principia nova methodo exposita* (Az aritmetika új módon kifejtett alapelvei) című művében. Említésre méltó, hogy Peano felfedezett egy olyan görbét, amely egy adott négyzetet teljesen kitölt. Ezt majd a topológia fejezetében szeretném ismertetni.

A legszigorúbb és a mai követelményeknek is megfelelő axiómarendszer megfogalmazása

David Hilbert (1862-1943) kiváló német matematikus érdeme. Königsberg mellett, Welauban született. Egyetemi éveit Königsbergben töltötte. Ugyanitt lett a matematika professzora, majd a göttingeni egyetemen tanított. A matematikának csaknem minden területét jelentős eredményekkel gazdagította. Ezt mutatja Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903-) szovjet akadémikus ismertetése is, aki Hilbert életében nyolc alkotó korszakot különböztetett meg. Az 1885-1893-as évek az invariáns elméletnek, az 1893— 1898 -as esztendők az algebrai számelméletnek, az 1898-1902-es korszak a geometria alapjainak, az 1900-1906-os idők a variációszámításnak és a differenciálegyenleteknek, az 1900-tól 1910-ig terjedő időszak az integrálegyenletek elméletének, az 1908-1909-e.s intervallum a Waring-probléma megoldásának, az 1910-1912-es korszak az

elméleti fizikának és az 1922-1939-es utolsó időszak a matematika logikai alapjainak a jegyében teltek el.

Hilbert 1900-ban a párizsi nemzetközi matematikai kongresszuson a matematika egész területéről 23 fontos megoldatlan problémát sorolt elő, amelyek megválaszolása nagyban elősegítené a matematika további fejlődését. Ezekből ízelítőül megemlítek néhányat.

Az első feladat: Tisztázandó a valós számok kontinuumának a szerkezete. Ezen belül kérdés, hogy van-e transzfinit szám a megszámlálható halmazok és a kontinuumszámosság között? A számok kontinuuma tekinthető-e jól rendezett halmaznak? A második kérdés úgy is feltehető, hogy az összes valós szám elrendezhető-e egy másik halmazban olyképpen, hogy annak minden részhalmazában legyen első elem? E kérdés az Ernst Zermelo (1871— 1953) német matematikus által 1904-ben megfogalmazott kiválasztási axiómához kapcsolódik. Ez azt állítja, hogy ha adott valamely egymást kölcsönösen kizáró (diszjunkt) nem üres halmazok halmaza, akkor létezik legalább egy halmaz, amely tartalmaz egy és csak egy olyan elemet, amely mindegyik nem üres halmazzal közös. Az analízisben szükséges kiválasztási axiómáról 1940-ben Kurt Gödel (1906-1978) osztrák matematikus kimutatta, hogy más axiómáknak nem mond ellent. 1963-ban viszont Paul Cohen (1934-) igazolta, hogy a kiválasztási axióma a halmazelmélet egy bizonyos rendszerén belül független a többi axiómától, eszerint a rendszeren belül nem is bizonyítható. Úgy tűnik tehát, hogy a Hilbert-féle első kérdésre nem is lehet kielégítő választ adni.

Hilbert második kérdése, hogy az aritmetikai axiómák ellentmondásmentesek-e. A kérdést, ha nem is válaszolták meg, de igen alaposan megvizsgálták Bertrand Russell (1872-1970) és Alfred North Whitehead (1861-1947) angol matematikusok. Az erről szóló tanulmányukat tartalmazza az 1910-1913-ban megjelent *Principia Mathematica* (A matematika alapelvei) című háromkötetes közös könyvük. A Leibniz szellemében megírt és a Peano axiómáira támaszkodó mű megállapítja, hogy a matematika minden tétele

néhány alapvető logikai elvre épült. Ebben kifejezésre jut Russell azon véleménye, hogy a matematika és a logika elválaszthatatlanul kapcsolódnak.

1931-ben meglepő választ nyert Hilbert második kérdése. Ismét az Ausztriából az Egyesült Államokba vándorolt Kurt Gödel segített a probléma tisztázásában. Amire ezzel kapcsolatban rájött, az kiábrándító. Bebizonyította ugyanis, hogy minden olyan mereven megszabott axiómarendszeren belül, mint például a Peano-féle, léteznek olyan állítások, amelyek nem eldönthetőek, azaz amelyeknek bizonyítása is, cáfolása is reménytelen. E Gödel-tétel szerint nem bizonyítható az aritmetikai axiómarendszer ellentmondás-mentessége. Ez az aritmetika, de a matematikának minden, az aritmetikára alapozott területe számára válságot jelent. Azt hinné az ember, hogy a Gödel-tétel ismeretében a matematikusok kedve elment az aritmetikai kutatásoktól. Ennek azonban pont az ellenkezője igaz. Bár az aritmetikán belül nem látszik remény a Gödel-tétel feloldására, de a XX. század közepén született egy olyan logikai irányzat, amely nem foglalkozik a szimbólumokkal és az aritmetikai műveletekkel, hanem csak azok értelmével. Talán ez az aritmetikán kívüli, ún. metamatematika hozza majd a megoldást.

E két felhozott példából is látható, hogy a Hilbert által felvetett problémák között vannak olyanok, amelyek valóban a matematika eleven húsába vágnak, és nagyon erősen közrejátszanak a matematikai kutatási irányok megszabásában. Vannak e problémasorozatban tisztán technikai jellegűek is. Ezekre jellemzésként említhetjük a hetediket. Ez így szól: Igaz-e, hogy α^{β} transzcendes szám, ha α nullával és eggyel nem egyenlő algebrai szám és β irracionális algebrai szám? A kérdésre Alekszandr Joszipovics Gelfond (1906-1968) szovjet matematikus felelt 1934-ben. Bebizonyította, hogy Hilbert hetedik kérdésére igenlően lehet felelni.

A Hilbert-kérdéseknek mintegy fele még megválaszolatlan, talán csupán azért, mert fontosságukat nem igazolta az idő.

Utoljára hagytuk HILBERTnek a geometriában új korszakot nyitó vagy még inkább a Bolyai és Lobacsevszkij által nyitott új korszakot lezáró művének, a *Grundlagen der Geometrie*nek (A geometria

alapjai) az ismertetését. Eukleidész *Sztoikheiája* óta nem jelent meg az axiómákra épült geometriának ennyire átgondolt, rendszeres és átfogó tárgyalása, mint Hilbert említett, 1899-ben kiadott könyve, amely már figyelembe vette a XIX. század minden geometriai vívmányát, ő Eukleidész axiómái és posztulátumai helyett 21 követelményt állított fel. Magyarázatra, definiálásra nem szoruló alapfogalmai: a pont, az egyenes és a sík. Néhány reláció (rajta van, közte van, benne van, egybevágó stb.) szintén nem
szorul meghatározásra. Axióma és posztulátum között nem tett különbséget. 21 axiómája így csoportosítható: az illeszkedés 8 axiómája, a rendezés 4 axiómája, az egybevágóság 5 axiómája, a folytonosság 3 axiómája és a párhuzamosság axiómája. Hilbert a geometria axiómarendszerére három kívánalmat fogalmazott meg: legyen az axiómarendszer ellentmondásmentes, legyen teljes és legyenek az axiómák egymástól függetlenek.

Az ellentmondás-mentesség belátható az axiómarendszer modellezésével, mint ahogy ezt a Bolyai-geometria és a Klein-Cayley-modell esetében láttuk. Valamely axióma független a többitől, ha annak tagadásához hozzácsatolva a változatlan többit, ellentmondásmentes új axiómarendszert kapunk. Teljes az axiómarendszer, ha minden, a tárgykörhöz tartozó tételnek logikai alapja benne megtalálható.

Hilbert nagyon fontosnak tartotta nemcsak a geometriának, hanem az egész matematikának az axiomatikus megalapozását. Ennek megvalósítására csak Gödel és Tarski 1930 körüli munkássága után kerülhetett sor.

HILBERTnek az egész matematikára kiható eredményes és ösztönző munkásságát a tudományos világ megbecsülte, és méltán kísérte kitüntetések sorozatával. 1900-ban megkapta a Steiner-díjat. 1904-ben kitüntették a nemzetközi Lobacsevszkij-díjjal, és 1910-ben a Magyar Tudományos Akadémia neki ítélte a világ legkiválóbb matematikusai számára alapított 10 000 aranykoronás Bolyai-díjat.

Gödel vizsgálatai mutatják, hogy nincs egyszer s mindenkorra meghatározott merev axiómarendszer. Ha a matematika egy területén új problémák vetődnek fel, megeshet, hogy valamely axiómát módosítani, finomítani

KELL, VAGY A RENDSZERT ÚJ AXIÓMÁVAL KELL BŐVÍTENI. AZ AXIÓMARENDSZEREK IS VÁLTOZHATNAK A TUDOMÁNY FEJLŐDÉSÉVEL.

A XIX. és a XX. századi geometria fejlődése, az axiómarendszerek elméletének kibontakozása, a matematika egyes ágainak axiomatikus megalapozása, a matematikai absztrakt terek fejlődése és az elméleti fizika számos területéhez szükséges matematikai apparátus megteremtése, mindezek az egész matematikára és a fizikára kiható csodálatos folyamatok akkor kezdődtek meg, amikor Bolyai és Lobacsevszkij megalkották az első nemeuklideszi geometriát.

A TOPOLÓGIA FEJLŐDÉSE

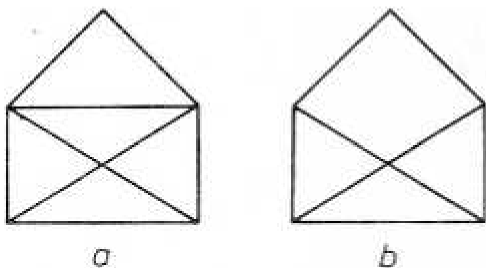
A topológia a matematikának mintegy százéves ága. Rohamos fejlődését szemlélteti az a megállapítás, hogy kezdetben inkább geometria és kis részben algebra, ma pedig inkább algebra, mint geometria. Nemcsak ez a jellemzés, hanem mai meghatározása is kifejezi, hogy kialakulásában közrejátszott a geometrián kívül a matematika más ága is, és ezáltal - amint ez lenni szokott - erős kapcsolatok létesültek a topológia és a matematika számos más területe között. A topológia a terek olyan tulajdonságainak a tudománya, amelyek változatlanok a homeomorf transzformációkkal szemben. Két fogalom szorul itt magyarázatra: a tér és a homeomorf transzformáció. A topologikus tér a topologikus pontok halmaza, de a topologikus pont ma már igen általános jelentésű. Érthetünk rajta bármilyen objektumot. Rögtön megjegyezzük, hogy a topologikus tér fogalma nem született volna meg a halmazelmélet nélkül, de a homeomorf transzformáció meghatározása sem. Első megközelítésben, szemléletes tartalommal azt mondhatjuk, hogy ez olyan transzformáció, amelynél a szomszédos részek, elemek továbbra is szomszédosak maradnak. Ennek felel meg az a mozgás, amelyet rugalmas deformációnak nevezünk. Ha például egy rugalmas gumihártyára rárajzoljuk a vonalak valamilyen rendszerét, és ezt a lápot megnyújtjuk, akkor e vonalcsoport bizonyos tulajdonságai nem változnak: megmarad a metszéspontok száma, a vonalak által bezárt síkidomok száma stb. Természetesen a matematikus az intuitív „szomszédos” fogalommal sem elégedhet meg. Helyettesítsük a valamely elemmel szomszédos

elemek halmazát a középiskolában megismert környezet fogalmával. Ekkor biztosan eszünkbe jut a függvények egyik tulajdonsága, a folytonosság, hiszen éppen e tulajdonság definiálására használtuk a környezet fogalmát. Most egy ehhez nagyon hasonló meghatározás következik. Az A halmazt képezzük a B halmazba! Feleljen meg ekkor az A halmaz a_0 elemének a B halmaz b_0 eleme. Lehessen meghatározni továbbá az a_0 minden környezetéhez a b_0-nak egy környezetét úgy, hogy az a_0 környezetébe tartozó minden a elem b megfelelője a b_0 környezetében legyen. Az ilyen leképezést nevezzük az a_0 pontban (elemben) folytonosnak. Ha az elmondottak az A halmaz minden elemére igazak, akkor a leképezést vagy transzformációt folytonosnak mondjuk. Ha ehhez még azt is megköveteljük, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű legyen, akkor az ilyen kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos transzformációt nevezzük homeomorfnak vagy topologikusnak. Ennek a transzformációnak az invariánsaival foglalkozik a topológia.

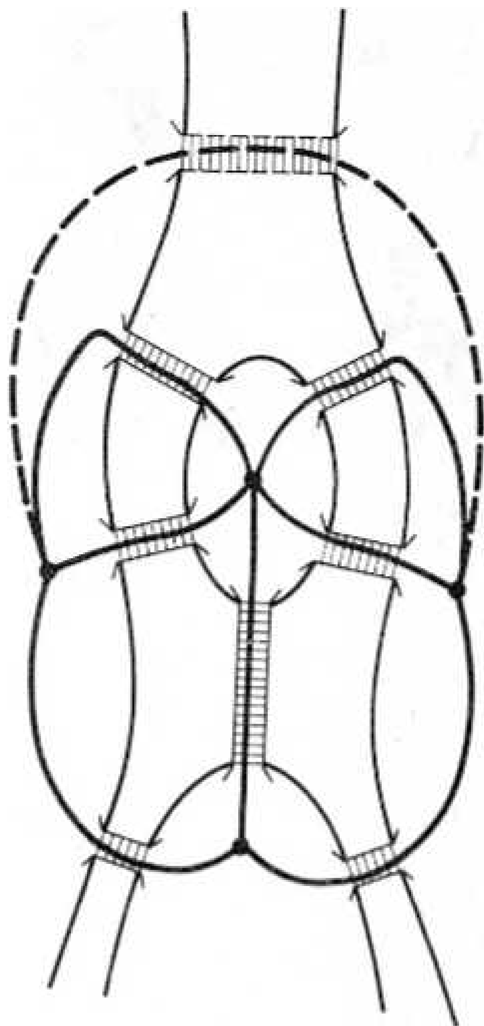
Azért, hogy a történeti részeket ne kelljen magyarázatokkal megszakítani, előrebocsátok néhány fogalmat. A gyermekek játékaiból ismerősek az olyan ábrák, amelyek a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatók úgy, hogy ugyanazon a vonalszakaszon csak egyszer menjünk végig. Ilyen rajzot mutat a *332. ábra a)* része. A *b)* fele azonban, bár egyszerűbbnek látszik, mégsem rajzolható meg az előbbi módon. Az így megrajzolható vonalak alakzatát unikurzálisnak nevezzük. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan topológiai invariáns. A matematikatörténetből ismert hasonló feladat a königsbergi hidak problémája. Euler idejében a Königsberg városán átfolyó Pregel folyó szigeteket alkotott, amelyeket a *333. ábra* szerinti hét híd kötött össze. Kérdés, van-e olyan sétaút, amely minden hídon átvezet, de mindegyiken csak egyszer? A kérdés egyértelmű azzal, hogy be lehet-e járni az ábrába folytonos vonallal berajzolt utat a megszabott módon? Euler kimutatta, hogy minden olyan véges vonaldarabokból álló alakzat akkor és csak akkor unikurzális, ha vagy nem tartalmaz páratlan fokszámú pontokat, vagy pontosan csak kettőt. Egy pont fokszámán értjük a benne összefutó vonalszakaszok (gráfok) számát. A königsbergi sétaúton minden csomópont harmadfokú, Euler feltételének nem felel meg, tehát a königsbergi hidak feladata megoldhatatlan. Az idők folyamán a kérdés mégis megoldódott, mert a Pregel folyón épült,

szaggatott vonallal jelölt, nyolcadik híd ezt lehetővé tette. Talán nem kell mondanom, hogy a nyolcadik híd nem a megoldhatóság kedvéért épült.

A topológia másik fontos őseredménye szintén Euler nevéhez kapcsolódik. Ez az ún. Euler-féle poliédertörvény, amelyet először Descartes fedezett fel 1619 telén, amikor a bajor hadseregben szolgált. Ez a Descartes-Euler-törvény az egyszerű poliéderekre érvényes, és algebrai alakja: $c+l—e= 2$, amelyben *c, l* és *e* jelentik rendre a poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek a számát. Egyszerűnek nevezzük a poliédert, ha egyszeresen összefüggő sokszöglapok határolják és felülete is egyszeresen összefüggő. A tétel általánosítható. Legegyszerűbb, ha egy gumihártyából készült kockafelszínre gondolunk. Ha ezt a kockát deformáljuk, akkor a keletkezett testre is igaz Euler tétele, igaz még akkor is, ha például gömbbé fújjuk fel. Ekkor azonban a gömbfelszínre rajzolt olyan sokszöghálózatot kapunk, amelyen a lapok szerepét a gömbi négyszögek, az élekét e négyszögeket határoló ívek és a csúcsokét az ívek találkozási pontjai veszik át. A tétel természetesen érvényes a kocka síkba kiterített hálózatára is. Amint a kocka a gömbbel homeomorf alakzat, ugyanúgy a kocka lapjának megfelelő hálózatelem a körrel homeomorf. Ha tehát a gömbfelületet vagy valamely azzal homeomorf felületet egy vonalhálózat a körrel homeomorf felületidomokra bontja, akkor, ha a hálózat éleinek a száma *e,* a csúcsok száma *c* és a felületidomok száma *l*, akkor igaz, hogy $c+l— e=2$. *Az* elmondottakból kitűnik, hogy a $(c+l— e)$ szám a gömbbel homeomorf felületeknél mindig 2, vagyis a $(c+l— e)$ topológiai invariáns, amely topológiailag jellemzi a felületeknek ezt az osztályát. Ezért nevezik e számot Euler-féle karakterisztikának.



332. ábra



333. ábra

Vannak olyan testek, amelyeknél az Euler-karakterisztika nem 2. Ilyen testekre bukkant az Euler-tétel első általánosítója:

Louis Poinsot (1777-1859) francia mérnök-matematikus. Párizsban született, az itteni Politechnikai Főiskolán végzett, és végül ugyanezen intézetben az analízis és a mechanika professzora lett. Főleg a geometriai módszereknek a mechanikában való alkalmazásaival foglalkozott. Írt azonban tisztán geometriai

műveket is. Ezek közül való a csillagtestekkel foglalkozó munkája. Az ebben leírt négy szabályos csillagtestet nevezik Poinsot-testeknek. Közülük kettőt már Kepler is tanulmányozott. Csillagtestjeire Poinsot az 1810-ben megjelent *Sur les polygones et les polyedres* (A sokszögekről és a poliéderekről) című írásában megállapította, hogy $2c+l=e+6$. Mivel ez esetben $c=12$, $e=30$ és $l=12$, azért ezek Euler-karakterisztikája; $c+l—e=$ $—6$.

Poinsot a csillagtestekre vonatkozó megállapításainál a *„géométrie de situation”.* elnevezést használta. Ennek latin alakját a *„geometriasitus”-t* (magyarul: a helyzet geometriája) Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) francia matematikus vezette be, bár már LEIBNIZnél is megtalálhatjuk. A geometriának azt a részét hívták így, amely az alakzatoknak a mérettől és alaktól független tulajdonságait kutatja. A geometria situs CARNOT-nál és STAUDTnál még a szintetikus geometriát jelentette. Euler azonban már a königsbergi hidak problémájával kapcsolatban használta e kifejezést.

Ugyanilyen értelemben található a geometria situs Gauss munkafüzetében néhány olyan rajz alatt, amely vonalalakzatok „csomóira” vonatkozó törvényekre utal. Ugyane füzetben 1833-ban az elektrodinamikával kapcsolatosan megjegyezte, hogy a „Leibniz által megsejtett geometria situs” területén az utolsó ötven év alatt szinte semmi sem történt, és csupáncsak Euler és Vandermonde foglalkozott néhány ide tartozó feladattal. A munkafüzet tanúsága szerint Gauss is oldott meg topológiai feladatokat. Ezeket azonban nem közölte, csupán néhány barátjának írt levelében említette. Az 1840-es bejegyzései között felvetette egy felület (Schicht=réteg) széthasításának a problémáját, amelyet később Riemann tisztázott.

A Descartes-Euler-tétel egyféle általánosítását jelentette Cauchy (1789-1857) francia matematikusnak az a felfedezése, amelyet 1813-ban közölt a *Recherches sur les polyédres* (Tanulmány a poliéderekről) című írásában. Ebben bebizonyította, hogy a körlap belsejével homeomorf sokszöghálózat Euler-karakterisztikája 1, azaz $c+l— e=1$. Ezt az összefüggést felhasználta Euler tételének bizonyítására.

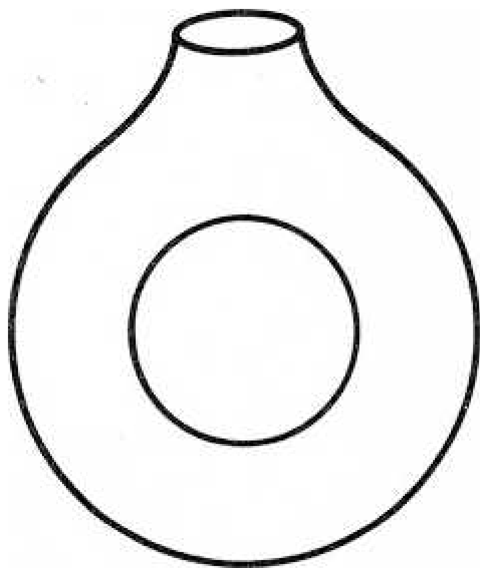
A poliédertétel általánosítói között említem Simon L’Huillier

(1750-1840) svájci matematikust. (ő vezette be a lim $\Delta y/\Delta x$ szimbólumot.) L'Huillier igazolta, hogy egy, a gömbbel homeomorf felületen, ha *p* számú nyílás van, akkor az Euler-karakterisztikája

$c+l—e=2—p.$

Képzeljünk el ugyanis egy gömbfelületet, amelyen *p* számú kerek lyukat vágunk, és ezen a felületen egy sokszöghálózatot. Ekkor, az élek közé számítva a nyílások körvonalait is, az Euler-karakterisztika $c+l—e$. Ha most a kivágott körlapokat visszaragasztjuk, akkor ezzel minden változatlan marad, csak a lapok száma nőtt p-vel. A helyreállítás után azonban a gömbfelület karakterisztikáját kapjuk, azaz

$c+(l+p)—e=2,$



334. ábra

ahonnan a lyukas felületre vonatkozó $c+l—e=2—p.$

A tóruszfelület egy tetszőleges felbontásával szemléletesen meggyőződhetünk arról, hogy a tórusz Euler-karakterisztikája 0. Ha most a tóruszon egy kör alakú (vagy azzal homeomorf) nyílást vágunk, akkor a lyukas tórusz karakterisztikája (— 1), mert csak

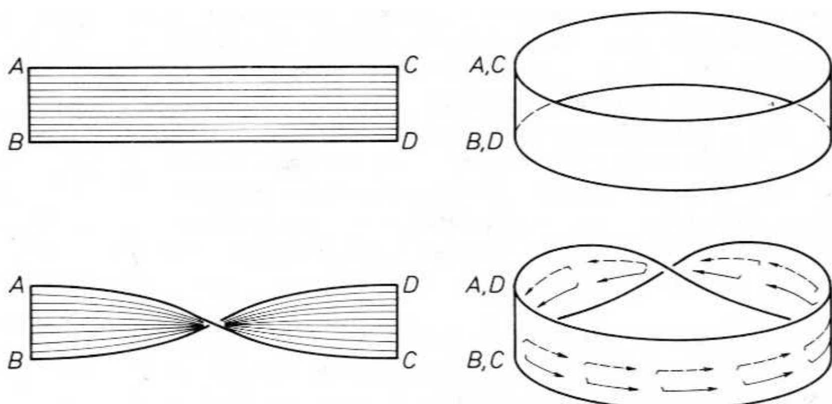
az élek száma szaporodott 1-gyel. Ezen nem változtat, ha a lyukas tóruszfelületet a *334. ábra* szerint deformáljuk. Ezt vagy az ezzel homeomorf alakzatot fogantyúnak (kampónak, akasztónak) szokás nevezni. Ha tehát egy *2—p* karakterisztikájú lyukas gömb nyílásait ilyen fogantyúkkal foltozzuk meg, akkor a *p* fogantyúval ellátott gömb karakterisztikája 2—2*p,* mert minden fogantyúnak a nyíláshoz ragasztásakor a karakterisztika l-gyel csökken. Belátható ugyanis, hogy két felület összeragasztásakor a karakterisztikák összegződnek. A topológia szót

Johann Benedict Listing (1808-1882) német matematikus és fizikus, göttingeni professzor készítette a toposz = hely és a logosz = tan görög szavakból. Alapvető topológiai könyve a *Vorstudiert zur Topologie* (Előtanulmányok a topológiához), amely 1847-ben jelent meg Göttingenben. Listing Gauss tanítványa volt, és valószínűleg mesterétől örökölte topológiai érdeklődését. Ő fogalmazta meg először a homeomorf, illetve topologikus transzformáció lényegét. Topologikus vizsgálatait először „vonalkomplexekre", vonalalakzatokra végezte. Az 1862-ben megjelent *Der Census raumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von der Polyedern* (A térbeli komplexek osztályozása, vagy az Euler-féle poliédertörvény általánosítása) című könyvében már a „térbeli komplexek" mindenféle térbeli alakzatot jelentenek, beleértve a felületeket és a testeket is. Listing volt, aki Euler tételét általánosította a gömbfelületre, illetve az azzal homeomorf felületekre. Könyvében leírta a Möbius-szalagnak nevezett egyoldalú felületet, a névadóval egy időben, de tőle függetlenül. Listing óta számítjuk a topológiát önálló matematikai területnek.

A topológia kibontakozásában és önállóvá válásában LISTINGgel egyenlő érdemeket mutatott fel Möbius is. 1861-ben a párizsi Akadémia pályázatára több művet küldött be, de a rossz franciasággal megírt és szokatlanul új gondolatokat tárgyaló tanulmányokat a zsűri nem értette. E visszautasított pályaművek között volt az is, amely a poliéderek elméletének fejlesztését tartalmazta. Ennek anyaga 1863-ban jelent meg Lipcsében *Theorie der elementaren Verwandschaft* (Az elemi rokonság elmélete) címen, majd 1865-ben *Über die Bestimmung der lnhaltes eines Polyeders* (Egy poliéder térfogatának meghatározásáról) címen. Az első címben

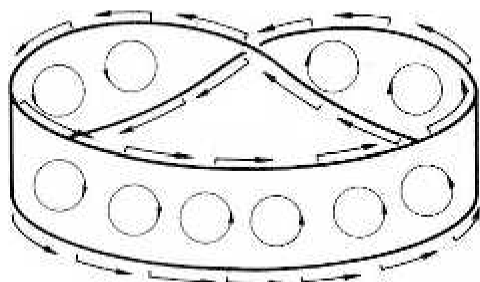
szereplő rokonság szó Möbiusnál transzformációt jelent. Az elemi rokonságot így határozta meg: „Két alakzat akkor áll elemi rokonságban, ha az egyiknek minden végtelen kicsiny eleme megfelel a másik végtelen kicsiny elemének, és az egyik alakzat egymással határos elemeinek a másik alakzat egymással határos elemei felelnek meg."

335. ábra



Úgy vélem, ráismertünk a homeomorf transzformáció egyféle megfogalmazására. A homeomorf felületeket az azokat határoló görbék száma szerint osztályozta. Az így osztályozott felületekre igazolta vagy Euler, vagy L'Huillier törvényét. Leírta a róla elnevezett egyoldalú felületet. Ilyen Möbius-szalagot úgy kaphatunk, ha a *335. ábrán* vázolt *ABDC* papírszalag két végét nem úgy ragasztjuk össze, hogy az *A* és C, illetve a *B* és *D* pontok illeszkedjenek, hanem úgy, hogy az *A*-hoz a *D-t*, és a B-hez a *C-t* ragasztjuk. Az első esetben az eredmény egy hengerpalást, a második esetben pedig a Möbius-szalag. Ne feledjük, hogy a papírszalagnak vastagsága is van, tehát a valóságban test. A papírból készített Möbius-szalagon, ha ceruzánk hegyét elindítjuk, a szalag széleivel párhuzamosan, akkor kétszeri körüljárás után visszajutunk az elindulási pontra anélkül, hogy ceruzánkat fel kellett volna emelnünk. Az össze nem ragasztott szalag „elülső" és „hátsó" felülete egyetlen felületté olvadt össze: egyoldalú felület jött létre. Ha azonban eltekintünk a szalag vastagságától és egy irányított körvonalat mozgatunk a szélekkel párhuzamosan, akkor egyetlen fordulat után visszajutunk a kiindulási körbe, de annak

irányítása az ellenkezőjére fordult, ahogy azt a *336. ábra* szemlélteti. Ezt a jelenséget vette észre Möbius, amikor az ilyen felületet nem irányíthatónak (nem orientálhatónak) nevezte. Ezzel szemben a kétoldalú felületeket irányíthatóknak (orientálhatóknak) hívta.



336. ábra

A Möbius-szalag érdekes tulajdonsága, hogy széle csomómentes zárt görbe, tehát homeomorf a körrel, és ezért a szalag széle megfelelő kerületű körvonalhoz illeszthető, például egy felületen vágott kör alakú nyílás a megfelelő Möbius-szalaggal „beragasztható”. Ekkor azonban meg kell engednünk, hogy a szalag áthatoljon saját magán. Mivel a Möbius-szalag Euler-karakterisztikája 0, azért a vele beragasztott lyukas felület karakterisztikája nem változik.

A topológiának nagy lendületet adott Riemann *Theorie der Abelschen Funktionen* (Az Abel-függvények elmélete) című könyve, amely 1857-ben jelent meg. Ebben Riemann leírta, hogy a teljes differenciálok integrálásánál fellépő függvényekre vonatkozó vizsgálatai a topológia körébe tartozó összefüggésekhez vezettek. Az algebrai egyenletekkel megadott komplex változós $F(x; y) = 0$ függvényeket szemléletessé tette a „többrétegű felületekkel”. Ezeket nevezzük Riemann-féle felületeknek. Legyen ugyanis a z komplex változónak egy n-értékű függvénye f(z), ahol $n \geq 1$, és a z helyen a függvényértékek vagy -ágak: $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$. Ezek változnak, ha a Gauss-féle komplex számsíkon a z-nek megfelelő pont befut egy görbét. Riemann a z változó ábrázolására nem egy, hanem *n* különböző komplex síkot képzelt el az *n* különböző függvényértéknek, elágazásnak megfelelően. Legyenek ezek az α_1, α_2, ... α_n. Ha ezen α síkok valamelyikén, például az α_i-n z változik,

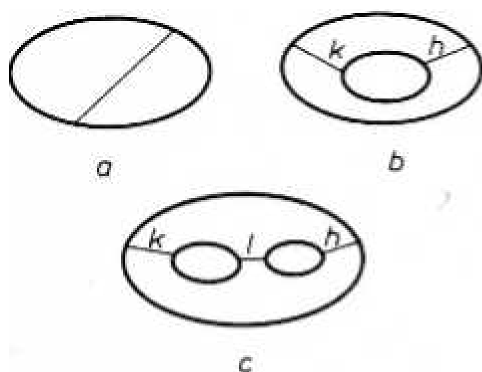
akkor ennek az ágnak megfelelően f(z) felveszi az $f_i(z)$ értéket.

Helyezzük most egymásra a z változását ábrázoló n darab síkot. Ekkor n pont, mondjuk a z_1, z_2, ..z_n egymás fölött van az α_1 α_2, ..., α_n síkon. E pontoknak megfelelő függvényértékek:

$f_1(z_i)$, $f_2(z_i)$, ... $f_n(z_i)$ (i = 1,2, 3 ... n).

Valamely z_0 elágazási pontban az $f_1(z_0)$, $f_2(z_0)$, .. ., $f_n(z_0)$ függvényértékek közül legalább kettő egyenlő. Amikor változása közben z elérkezik egy ilyen z_0 elágazási pontba, akkor ágat, réteget vált. A z-t ábrázoló rétegek ezeken a pontokon, mintegy hidakkal, össze vannak kapcsolva. Amikor például egy elágazási pontnál $f_k(z)$ átmegy az $f_i(z)$ értékbe, akkor a z pont átmegy az α_k komplex síkról az α_1-re. A Riemann-féle többrétegű felület tehát lehetővé teszi, hogy az n-értékű függvény vizsgálatát helyettesíteni lehessen az egyértékű függvény vizsgálatával.

Könyvében Riemann kimutatta, hogy egy p-fajú Riemann-felületre, amelynek n rétegét k számú elágazási pont kapcsolja össze, teljesül a k—2n = 2p—2 összefüggés. Megállapította azt is, hogy ez topológiai törvény. Művében más topológiai törvények is helyet kaptak a függvénytan keretein belül. Az analízisnek és a topológiának az így született kapcsolata komoly lendületet adott a topológia fejlődésének. RIEMANNig a topológia sokféle, különálló, érdekes geometriai tételek gyűjteménye volt, de alkalmazhatósága a matematika más területein általában nem látszott egyértelműnek. Riemann tulajdonképpen a topológia és a fizika kapcsolatát is megteremtette azzal, hogy a többrétegű felület megalkotásánál fizikai kép vezette. A Riemann-felület egyes rétegeit összekapcsolt, homogén áramvezetőknek tekintette, amelyek rendszerében a bekapcsolt áram elektromos erőteret hoz létre, és ennek potenciálja az egyes lemezeken egyértékű és folytonos. Így a Gauss nevéhez fűződő potenciálelmélet nemcsak a komplex változójú függvények tanában segített eredményhez, hanem összekapcsolt három tudományágat: a fizika, az analízis és a topológia területét.



337. ábra

Riemann az általa ismert topológiai törvényeket általánosította n-dimenziós térre. Ugyanezt megtette Riemann barátja, Enrico Betti (1823-1892), a pisai felsőfokú normáliskola tanára is. Róla nevezte el Poincaré a Betti-számokat, amelyek a többdimenziós tér topológiájában a felületeket jellemzik „az egyszeresen, illetve többszörösen összefüggő” fogalommal kapcsolatban.

Egyszeresen összefüggő a 337. ábra a) részén látható, egyetlen zárt görbével határolt síkidom, mert egyetlen tetszőleges húrja két különálló felületre bontja. Az ábra b) részén kétszeresen összefüggő felületet látunk, ennek van olyan h húrja, amely nem osztja ketté. Ehhez azonban található még olyan k húr, amely az előbbivel együtt két egyszeresen összefüggő felületre bontja e két zárt görbével határolt, gyűrűszerű felületet. Az ábra *c)* része háromszorosan összefüggő síkidomot mutat, amelynél található *h* és *k* húrpár úgy, hogy csak egy harmadik *l* húrral együtt osztják a felületet két egyszeresen összefüggő felületre. Az egyszeresen összefüggő síkfelületnél a felület egyetlen pontja sem található a határoló egyetlen zárt görbén kívül. A többszörösen összefüggő síkfelületeknél ez nincs így.

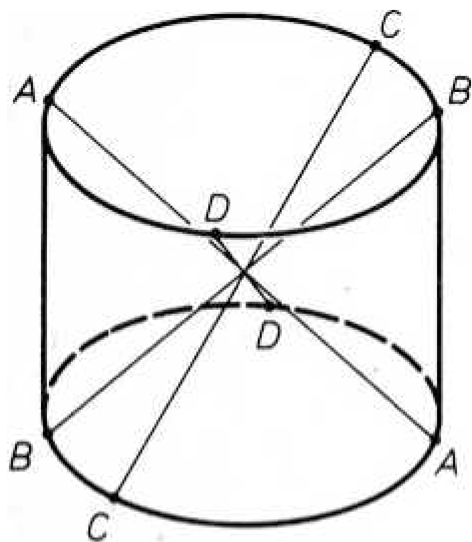
A topológia feladatai között egy még eddig elő nem fordulóra mutatva említem meg Camille Jordan kiváló francia matematikus háromkötetes, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (Analízis a Politechnikai Főiskola számára) című könyvének azt a részét, amelyben a szerző egy nagyon kézenfekvőnek tetsző tételt bizonyít.

A tétel így szól: Az egyszerű zárt síkgörbe a síkot két részre bontja. Az egyik rész pontjai a görbén belül, a másik rész pontjai a görbén kívül vannak. Ezek közös határa a görbe. A belső rész olyan, hogy mindig lehet benne rajzolni véges sugarú kört. A tétel bizonyítása főleg azért nehéz, mert szerepelnek benne matematikailag nehezen megfogható fogalmak, mint például a kívüli és belüli jelzők. A topológia egyik feladata az is, hogy az ilyen általános fogalmakra találjon meghatározást, majd törvényt. Jordan a következőből indult ki: Válasszunk az ε tetszőlegesen kicsinnyé tehető számnak valamekkora kezdeti értéket. Lehet rajzolni két olyan sok szöglapot, amelyek egyikén rajta van a zárt síkgörbe, a másikát pedig a görbe által határolt síkrész tartalmazza úgy, hogy mindkét sokszögkerület bármely pontja a görbéhez közelebb van a kiválasztott ε-nál. Képzeljük el a folyton kisebbnek választott ε-okhoz tartozó sokszögpárokat, és tekintsük a csökkenő ε-okhoz tartozó azt a sokszögsorozatot, amelyet a görbe határolta lap tartalmaz. A görbén belüli pontok azok, amelyek egy bizonyos ε-tól kezdve, azaz a sorozat egy bizonyos elemétől kezdve, minden sokszöglapon rajta vannak. Hasonlóan határozhatók meg a görbén kívüli pontok a görbét tartalmazó sokszögsorozattal. A görbe pontjai pedig a belső sokszögsorozaton kívül és a külső sokszögsorozaton belül vannak. Az igazsághoz tartozik, hogy Jordan hosszú és bonyolult bizonyításában később hibát fedeztek fel, amelyet nem is volt könnyű kijavítani.

JORDAN NEVÉT VISELI A TOPOLÓGIA ÚN. ALAPTÉTELE. EZ VOLTAKÉPPEN A ZÁRT FELÜLETEKNEK TOPOLÓGIAI SZEMPONTBÓL VALÓ OSZTÁLYOZÁSA. HA G_f-fel jelöljük az *f* számú fogantyúval ellátott gömböket, és F_m-mel azokat a gömböket, amelyekből *m* számú körlemezt vágunk ki, továbbá az így keletkezett lyukakat beragasztjuk Möbius-szalagokkal, akkor a Möbius-Jordan-tétel azt mondja ki, hogy a

$G_0, G_1, G_2, \ldots, G_f, \ldots, F_1\ F_2, \ldots, F_m, \ldots$

sorozat tartalmaz minden topológiailag különböző zárt felületet, és nem fordul elő, hogy köztük két homeomorf felület adódjék. A többi zárt felület a sorozat valamelyik elemével homeomorf.

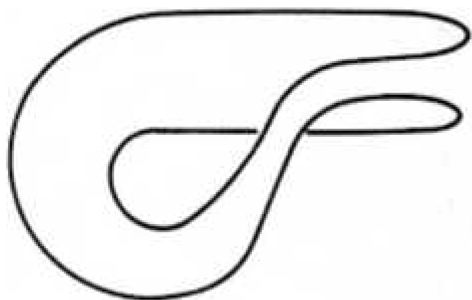


338. ábra

A topológia megalapozásának kiszélesítését szolgálta Felix Klein számos tétele. Az *Erlangeni Programban* ilyen szempontból fontos az a kérdésfelvetés, hogy a különböző geometriai transzformációk milyen tulajdonságokat hagynak változatlanul. 1874-ben a *Bemerkungen über Zusammenhang der Flachen* (Megjegyzések a felületek összefüggéséről) című munkájában szellemes gondolatsorral bizonyította be, hogy a körrel beragasztott Möbius-szalag homeomorf a projektív síkkal. A Möbius-szalag ugyanis megkapható úgy, hogy azonosítjuk a hengerpalást határoló körvonalainak azokat a pontjait, amelyek a palást szimmetriacentrumára nézve szimmetrikusak *(338. ábra)*. Hasonló módon nyerhetünk projektív síkot akképpen, hogy egy gömb átmérőinek végpontjait egyesítjük. Ez viszont homeomorf azzal, hogy azonosítjuk egy hengerfelület két alapkörének azokat a pontjait, amelyek a henger szimmetriacentrumára nézve egymás tükörképei. Ekkor a henger oldalfelületéből Möbius-szalag, az alap- és fedőkör egyesítéséből pedig a Möbius-szalaghoz ragasztott körlap lesz. Ebből már a tétel közvetlenül következik.

A zárt felületek topológiai osztályozására Klein 1882-ben bevezette a normálfelületek fogalmát. Ezek az etalon szerepét játsszák. Egymástól a Riemann-féle, p-vel jelölt számban különböznek.

Maximálisan ennyi metszet készíthető egy zárt felületen anélkül, hogy darabokra esnének szét. Klein két alap-normálfelületet választott. Az egyik a gömb (ellipszoid), amelynél $p = 0$, a másik a tórusz, amelynél $p = 1$. A $p > 1$ Riemann-számú felületek részére normálfelület a *p* fogantyúval ellátott gömb.



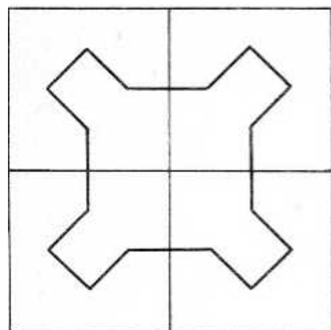
339. ábra

Ebben az 1882-ben kiadott *Ober Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Az algebrai függvények Riemann-féle elmélete és azok integrálja) című, ilyen tárgyú előadásait összefoglaló könyvben szerepel a Klein-palack leírása is. Klein-palack készíthető egy csökkenő átmérőjű csőből úgy, hogy a vastagabb rész oldalából kivágunk egy körlapot, és azon átvezetjük a cső vékonyabb részét, majd az egymás mellé került csővégeket összeforrasztjuk. Ilyen módon a cső belső felületét csatlakoztattuk a külsőhöz, és azért egyoldalú felület keletkezett. A Klein-palacknál értelmetlen külső és belső felületről beszélni *(339. ábra)*.

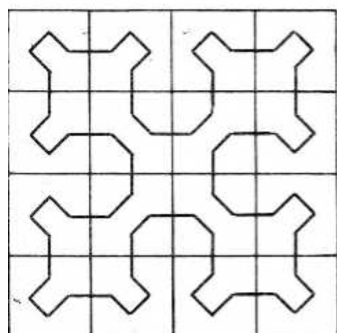
KLEINhez kapcsolható egyik tanítványának Walther von Dyck (1856-1934) müncheni tanárnak a topológiai munkássága. Az *On the Analysis situs of threedimensional spaces* (A háromdimenziós tér topológiájáról) című, 1884-ben megjelent könyvében és hasonló tárgyú közleményeiben nemcsak a háromdimenziós tér topológiáját fejtette ki, hanem például bebizonyította, hogy az n-dimenziós gömb Euler-karakterisztikája 2, ha *n* páros, és 0, ha *n* páratlan szám. Kimutatta még azt is, hogy az n-dimenziós projektív tér Euler-karakterisztikája 1, ha *n* páros, és 0, ha *n* páratlan.

Valószínűleg Möbius vetette fel 1840-ben azt a kérdést, hogy

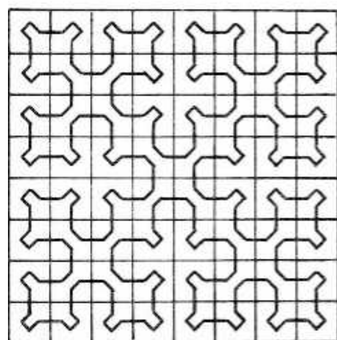
kiszínezhető-e négy színnel minden térkép úgy, hogy a szomszédos országok ne legyenek egyszínűek? Ez a híressé vált kérdés sokáig válasz nélkül maradt, pedig még olyan nagyság is foglalkozott vele, mint Cayley. 1879-ben azonban úgy látszott, hogy Alfred Kempe (1849-1922) angol matematikus bebizonyította az igenlő feleletet. 1890-ben azonban Heawood hibára talált Kempe bizonyításában. Helyesbített gondolatmenettel kimutatta, hogy öt szín felhasználásával a kívánt kiszínezés megoldható. 1976-ban Keneth Appel és Wolfgang Haken amerikai matematikusok a négyszín-sejtést bebizonyították számítógép felhasználásával. Egyes nézetek szerint a matematikai bizonyításnál a számítógép használata kifogásolható.



a



b



c

340. ábra

A hagyományos, ún. kombinatorikus topológia körébe tartozik egy igen meglepő tétel. A meglepetést az okozza, hogy a tétel megingatja a vonal vastagságnélküliségének eukleideszi definícióját. Giuseppe Peano olasz matematikus igazolta, hogy létezik olyan folytonos vonal, amely teljesen kitölt egy adott négyzetet, azaz áthalad a négyzet minden pontján. Eszerint az ilyen vonalnak területet kell tulajdonítanunk. Waclav Sierpinski (1882-1969), a varsói születésű kitűnő lengyel matematikus mutatott is egy módszert az ilyen görbe szerkesztésére. A *340. ábra* által szemléltetett eljárást a végtelenségig folytatva igazolható, hogy az így nyert görbesorozat határgörbéje a négyzet minden pontján átmegy, azaz kitölti a négyzetet. Peano általánosította tételét három- és többdimenziós „négyzetre” is, tehát például a háromdimenziós térben létezik olyan folytonos görbe, amely teljesen kitölt egy kockát. Éppen ezen tételek hatása alatt indítványozta

Henri Poincaré (1854-1912) kiváló francia matematikus, fizikus, csillagász és filozófus, hogy felül kell vizsgálni a dimenzió hagyományos fogalmát. Szülővárosában, a lotharingiai Nancyben végezte középiskoláit, és 1873-ban a Politechnikai Főiskolán folytatta tanulmányait. A matematikai doktorátust a párizsi egyetemen szerezte meg, azután 1879-1881-ben Cannes-ban adott elő analízist. A következő és egyben utolsó állomáshelye a párizsi egyetem volt. Itt tartott analízis-, valószínűségszámítás-, fizika- és csillagászati előadásokat. A párizsi Akadémia mellett még 35 akadémiának volt tagja.

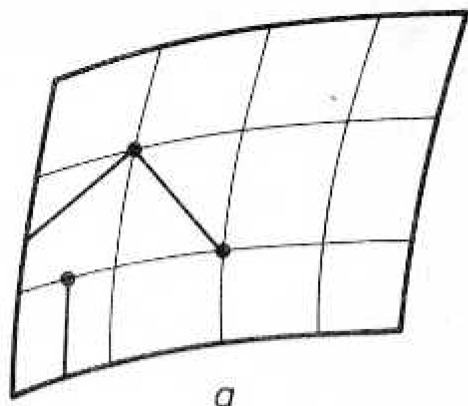
Összegyűjtött munkáit a párizsi Akadémia 10 kötetben adta ki 1916 és 1954 között. Ez felöleli szinte az egész matematika területét, és alig van olyan ága a matematikának, ahol kutatási eredményeiben vagy módszerekben ne alkotott volna lényeges újat. Kiemelkedően sikeres kutatója volt a valószínűségszámításnak, az automorf függvényeknek, a differenciálegyenleteknek, a matematikai fizikának, a nemeuklideszi geometriának, az égi mechanikának és a topológiának.

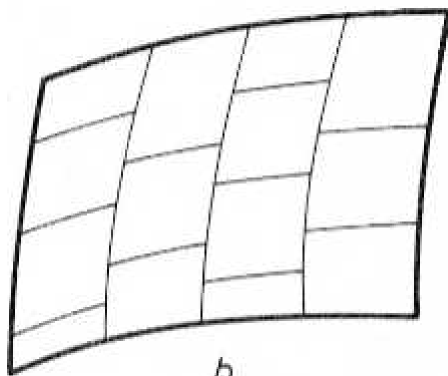
Az ún. kombinatorikus topológiának ő írta a máig is legkitűnőbb, új felfedezésekkel gazdagított összefoglalását *Analysis situs*

címen 1895-ben. 1899 és 1902 között írt még számos topológiai tárgyú közleményt. E tudományág továbbfejlesztésében főleg Riemann és Betti műveire támaszkodott. Ilyen szempontból fontos még Jordan *De contours tracés sur les surfaces* (A felületek egymásra illeszkedő kontúrjairól) című tanulmánya is. Az ebben közölt, a folytonos deformációval egymásra fektethető felületekre vonatkozó elméletét általánosította Poincaré többdimenziós térre. A Hausdorff és Brouwer által megalkotott topologikus tér fogalmát Poincaré átvitte a kombinatorikus topológiába is. Jelentős topológiai tétele, hogy a többrétegű Riemann-felületek rétegeinek száma mindig páros. E tételt POINCARÉtól függetlenül 1888-ban Vito Volterra (1860-1940), az Anconában született, Pisában, Torinóban és Rómában professzorkodó itáliai matematikus is bizonyította. Így a felfedezés neve: Poincaré-Volterra-tétel.

Térjünk vissza végül a dimenzió fogalmára, amelynek kapcsán Poincaré neve felmerült. Megállapította, hogy az egydimenziós alakzatot két különálló alakzattá változtathatunk egy nem szélső pontjának, tehát egy 0 dimenziós részének elhagyásával. Ugyanígy a kétdimenziós sík két félsíkra esik szét, ha elhagyjuk egy egyenesét, illetve a kétdimenziós felület két felületté bomlik, ha elhagyjuk egy zárt görbéjét, tehát egydimenziós részét. Általában az n-dimenziós alakzat bármelyik két pontja elválasztható, ha elhagyjuk az alakzat e két pontja között húzódó, alkalmasan választott (n— 1) dimenziós részét, de ezt a célt nem érhetjük el egyetlen, (*n*— l)-nél kisebb dimenziójú alakzat elhagyásával sem.

A dimenzió fogalma a topológiában azért fontos, mert két különböző dimenziójú alakzat nem lehet homeomorf, azaz a dimenziószám topológiai invariáns. Poincaré dimenzió meghatározását fejlesztette tovább Pavel Szamuilovics Uriszon (1898-1924) az odesszai születésű moszkvai professzor. Szerinte: Egy alakzat a *P* pontjában akkor n-dimenziós, ha: 1. a *P* pont bármilyen kis környezetében létezik olyan *(n*— 1) dimenziós részalakzat, amely a *P* pontot elválasztja az eredeti alakzatnak a *P* környezetén kívüli minden pontjától. 2. A *P* pont elég kis környezetében (n— l)-nél kisebb dimenziójú alakzat az elválasztást nem hozhatja létre. E két feltételhez még hozzátartozik a 0 dimenziós alakzat definíciója. Eszerint a 0 dimenziós alakzatban nincs egynél több pontból álló összefüggő alakzat.





341. ábra

Más úton járt a dimenziószám meghatározásánál a két francia matematikus: Henri Louis Lebesgue (1875-1941) és Félix Édouard Émile Borel (1871-1956). Lássuk tételüket először kétdimenziós alakzaton, a *341. ábrát* figyelve. Osszuk fel görbékkel a felületet tetszőleges kis felületrészekre. Lesznek a kétdimenziós felületnek olyan pontjai, amelyek három vagy annál több részfelülethez, „fedőhöz”, „cseréphez” tartoznak, amint ez az ábra *a)* felén látható. Található azonban az ábra *b)* részének tanúsága szerint olyan felosztás, amelynél a felület egyetlen pontja sem tartozik háromnál több részfelülethez. E szemlélet alapján belátott állítást általánosítsuk, és akkor eljutunk a Lebesgue-Borel-féle dimenziódefinícióhoz: n-dimenziós az az alakzat, amelyet ha felosztunk zárt részalakzatokra (fedőkre), akkor lesznek az

alakzatnak olyan pontjai, amelyek legalább *(n+1)* számú fedőhöz tartoznak, de mindig lehet olyan fedőrendszert találni, amelynél egyetlen pont sem tartozik (n+l)-nél több fedőhöz. Érdekes, hogy az Uriszon- és a Lebesgue-Borel-féle definíció nem mindig egyenértékű.

A topológia fejlődésének további nagy lendületet és új irányt adott Georg Cantor (1845-1918) halmazelmélete. Az a felfogás, hogy a geometriai alakzat pontok halmaza, arra indították

Luitzen Egbert Jan Brouwer (1881-1966) holland matematikust, hogy összekapcsolja a halmazelméletet és a topológiát. Brouwer a holland Overskben született, és 1912-től 1951-ig az amszterdami egyetem professzora volt. Az 1911—1913-as években számos írása jelent meg a topológia köréből. Működése hatalmas lökést adott a halmazelméleti topológia kibontakozásához. Nevét őrzi az algebrában a Brouwer-csoportok, a funkcionálanalízisben a Brouwer -elv és a topológiában a Brouwer-halmaz. A halmazelméletben jelentkező nehézségek leküzdésére az elsők között kezdeményezte a matematika alapelveinek a felülvizsgálását, különösen a harmadik kizárásának elvével szemben a matematikai intuicionizmus szellemében. Ő fogalmazta meg határozottan, hogy a topológia a kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos transzformáció invariánsainak az elmélete. Közben azonban

Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) német matematikus 1913-ban, amikor Göttingenben az absztrakt Riemann-felületről tartott előadást, kifejtette, hogy az absztrakt felületek mintájára a pontok kétdimenziós halmaza helyett kialakítható egy általános absztrakt kétdimenziós sokaság. A sokaság elemeit is nevezhetjük pontoknak, de pontok sokaságán, pontok halmazán érthetjük bármilyen objektumok sokaságát, ahol az objektumok nem feltétlenül a geometria pontjai, hanem bármilyen kézzelfogható vagy absztrakt fogalmak. Ilyen értelemben egy halmaz pontjai esetén nem a pontok mibenléte az érdekes, hanem csupáncsak a köztük fennálló relációk. Ilyen elgondolás alapján megfogalmazott a topológia számára egy alkalmas folytonosságdefiníciót is. Weyl Elmshomban (Schleswig-Holstein) született, Göttingenben Hilbert tanítványa volt, ugyanott tanított 1908 és 1913 között, majd 1913-tól 1930-ig a Zürichi Műegyetem

professzora lett. 1933-ban Amerikába emigrált, ahol a Princeton Egyetemen kapott katedrát.

A halmazelméleti topológiában a folytonosság fogalmát az elemek szomszédsága vette át. Ennek első axiomatikus megfogalmazója Felix Hausdorff (1868-1942) német matematikus, a lipcsei, majd a bonni egyetem professzora volt. A matematika számos területén ért el kiváló eredményeket. Most az 1914-ben megjelent *Grundzüge der Mengenlehre* (A halmazelmélet alapelemei) című könyvét idézzük. A halmaz elemeinek a mivoltával nem, hanem csak az azok közti kapcsolatokkal törődött. Hausdorff topológiai terének (az *x* elemek *H* halmazának) axiómái a pontok (az elemek) „szomszédságát" határozzák meg:

1. Minden *x* ponthoz tartozik legalább egy *S(x)* szomszédság *(H* részhalmazként), és minden *S(x)* szomszédság tartalmazza x-et.

2. Ha *S(x)* és *K(x)* ugyanannak az x pontnak két szomszédsága, akkor létezik az *x* pontnak olyan *U(x)* szomszédsága, amely az előbbi kettőnek részhalmaza.

3. Ha az *y* pont eleme az *x* pont *S(x)* szomszédságának, akkor létezik y-nak olyan *U(y)* szomszédsága, amely S(x)-nek részhalmaza.

4. Ha a különböző *x* és *y* pont szomszédsága *S(x),* illetve *U(y),* akkor S(x)-nek és U(y)-nak nincs közös pontja.

A XX. században a topológia és főleg a topológiai gondolkodásmód átitatta csaknem az egész matematikát. Abban, hogy ez így van, komoly szerep jutott az amerikai matematikusoknak is. Igazságtalan volna, ha ezt nem méltatnánk legalább néhány kiemelkedő név felsorolásával.

James Waddell Alexander (1888-1971), a Princeton Egyetem professzora bizonyította be a poliéderek dualitásának törvényét, amelyre a szovjet tudósok felépítették a topológiai dualitás általános elméletét. Írt a felületek folytonos transzformációjának fixpontjairól, a csomók elméletéről stb.

George David Birkhoff (1884-1944) a Harvard és a cambridge-i

egyetem professzora volt. Munkái tárgyalják a fixpontok elméletét, a topológiai és halmazelméleti módszerek alkalmazásait stb.

Solomon Lefschetz (1884-1972) a Princeton Egyetem tanára lefektette a topológiai folytonos transzformációk algebrai elméletének alapjait.

Oswald Veblen (1880-1960) az amerikai topológiai iskola vezetője volt a Princeton Egyetemen.

Az amerikai topológiai iskolával párhuzamosan igen sikeresen működött az 1920-1930-as években és működik ma is a lengyel és a szovjet topológiai iskola. Megemlítjük végül a szovjet matematikusok közül azokat, akik leginkább előrevitték a topológia fejlődését.

Lev Szemjonovics Pontrjagin (1908—) általánosította az imént említett Alexander dualitástörvényét, és ezzel a topológiában új kutatási területet tárt fel. Továbbépítette a kommutatív topológiai csoportok elméletét. Eredményes vizsgálatokat végzett a topologikus algebrában, és írt egy nagyszerű összefoglalást a folytonos csoportokról.

Pavel Szergejevics Alekszandrov (1896-) moszkvai professzor tanítványa volt Pontrjagin. Alekszandrov a megalapítója a szovjet topológiai iskolának. A topológiai dualitásnak számos törvényét ő fedezte fel. Megteremtette a bikompakt terek elméletét. Számos topológiai törvényt neveztek el róla.

Pavel Szamuilovics Uriszon a moszkvai egyetem professzora volt. Fontos szerepet játszott a dimenzió fogalmának tisztázásában, a topológia számos törvényének felfedezője.

Andrej Nyikolajevics Kolmogorov a moszkvai egyetem professzora, akadémikus. Jelentős eredményeket ért el a függvényelméletben, a valószínűségszámításban, a logikában, a funkcionálanalízisben és a topológiában. Ő indította el az ún. V-homológia elméletét. Neve a

MATEMATIKA CSAKNEM MINDEN TERÜLETÉN FELBUKKAN.

A mába nyúló felsorolást még sokáig folytathatnám. Említhetném a magyar Császár Ákos (1924-) és Hajnal András (1931—) topológiai munkásságát is. A jelenkor nagyjaival azonban főleg a jelenkor nagyjai foglalkoznak, és alkotásaik csak néhány évtized múlva válnak történelemmé. E fejezet vázlatosan ismertetett problémái tanúsítják, hogy a topológia lényegesen más gondolkozásmódot kíván, mint a matematika más területei. Ebből a szempontból leginkább a szintetikus geometriához lehetne hasonlítani. Ez a sajátos gondolkozásmód sajátos tárgyából ered. Az aritmetikai mennyiségi problémák más úton közelíthetők meg, mint a topológia minőségre, minőségi kapcsolatokra vonatkozó kérdései. Annál inkább érdekes, hogy a topológia, a topológiai gondolkozás a XIX. század végén, a XX. század elején váratlanul gyorsan beszivárgott a matematika többi területére, a függvénytanba, az algebrába, és a halmazelmélettel karöltve matematikaszerte a halmazelméleti és a topológiai gondolkozás hozta meg a modernséget, az újfajta kérdéseket, a rohamos továbbfejlődést.

A DISZKRÉT GEOMETRIA

A geometriai fejezetek végén röviden megemlítjük a geometriának egy nagyon új ágát, a diszkrét geometriát. A püthagoreusok vetették fel először azt a kérdést, hogy milyen egybevágó szabályos sokszögekkel lehet a síkot hézagmentesen beborítani. Általában a síkot hézagtalanul befedő, egymásba nem hatoló sokszögeket, ha minden sokszög oldalához csak egyetlen másik sokszög oldala illeszkedik, mozaikoknak nevezzük. Milyen mozaikok léteznek? Milyen egybevágó sokszögekből készíthető mozaik? Hogyan lehet egybevágó síkidomokkal a síkot a legsűrűbben befedni? Ezekkel és hasonló kérdésekkel foglalkozik a diszkrét geometria. Újabb kori fellendülése MINKOWSKInak a kristályosztályokra (kristályrendszerekre) vonatkozó vizsgálataival kezdődött. Hazánkban e geometriaágnak világszerte ismert művelője Fejes Tóth László (1915—).

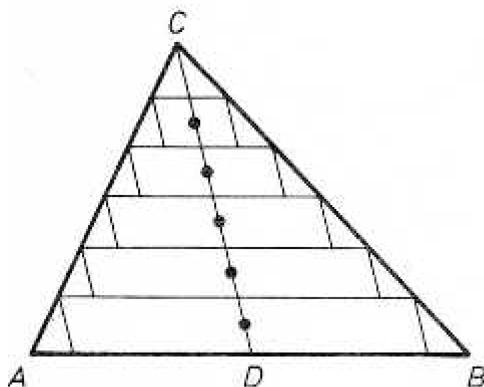
A MATEMATIKAI ANALÍZIS TÖRTÉNETE

A matematikai analízist, a differenciál- és integrálszámítást, különösen kezdetben, a végtelen kicsiny mennyiségekkel, az infinitezimálisokkal való számolás jellemezte. Ezért szokás infinitezimális számításnak is nevezni. Azok a feladatok, amelyeknél felmerült az infinitezimálisokkal való számolás szüksége, nagyjából két csoportba oszthatók. Az egyikbe tartoznak az érintőkkel kapcsolatos számítások és a változások sebességének a meghatározása. Ezekkel foglalkozik a differenciálszámítás. A másik csoportba sorolhatók a terület-, térfogat-, súlypont- és nyomatékszámítások, amelyek általánosságban az integrálszámítással oldhatók meg.

Amint azt Arkhimédésznél is láttuk (178. oldal), az integrálszámítással megoldható feladatoknak már az ókorban komoly hagyományai voltak. Szigorúan véve ezek nem számítások, hanem bizonyítások: A matematikában megkövetelt szabatosságnak meg nem felelő módszerekkel megsejtett eredmények igazolásai. A szó szoros értelmében vett számítást a határérték fogalmának tisztázása tette lehetővé, amikor világossá lett, hogy az infinitezimálisok valójában határértékek. Ennek a felfedezésnek a hiányában Arkhimédész rendszerint mechanikai jellegű, olyan eljárással indult, amelynek a mélyén ott rejtőzött a geometriában elfogadhatatlan atomos felfogás, amely szerint valamely geometriai alakzat elemi, tovább nem osztható alakzatok összessége. A bizonyításhoz pedig tökéletes biztossággal használta Eudoxosz kimerítési eljárását (134. oldal).

A görög ókorban azonban a kimerítés módszere szigorúan véve nem kezdeti alakja sem a differenciál-, sem az integrálszámításnak. Az első inkább bizonyítási eljárás, az utóbbi kettő pedig, név szerint is, számolási eljárás. Az infinitezimális számításnak sokkal inkább forrásai azok az ügyeskedések, amelyekkel a kimerítési

eljárás bizonyítási része előtt meg lehetett sejteni a bizonyítandó eredményt. Kepler neve éppen azért került be az analízis történetébe, mert szerette volna általánosítani Arkhimédész eredményt megjósoló módszereit. Kutatta, hogyan lehetne elfogadható számítással eljutni a megoldáshoz, feleslegessé téve a nehézkes kimerítési eljárást. Csillagászként is érdekelte például a területszámítás problémája. Ezt tükrözi a bolygómozgás általa feltalált második törvénye is, amely szerint a bolygó rádiuszvektora egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Az ellipszisszeletek területének kiszámításához az akkori módszerek nem voltak elegendők. Kepler eljutott odáig, hogy egységes eljárást talált - bár hézagos és olykor hibás gondolatmenettel - a forgástestek térfogatának a kiszámítására. Módszerének lényege, hogy a testet végtelen sok szeletre, tehát végtelen kicsi térfogatokra bontotta, azután a szeletekből szükség szerint valamilyen, a térfogatot nem változtató átalakítással olyan testet rakott össze, amelynek térfogatát már ki tudta számítani. Módszerére láttunk néhány példát az 523—525. oldalakon.



342. ábra

Kepler ilyen irányú útkeresését azonban megelőzte Simon Stevin. Az 1586-ban megjelent *Statikájában* (Weeghconst) a háromszög súlypontját a következőképpen határozta meg. Írjunk a *342. ábra* általános háromszögébe egyenlő magasságú paralelogrammákat. Ezek egyik oldalpárja az *AB-vel*, a másik oldalpár pedig a *CD* súlyvonallal párhuzamos. Egyenletes tömegeloszlás esetén mindegyik paralelogramma súlypontja a

tükrözési centrumában van, azaz a *DC* szakaszon. Mindegyik paralelogramma tömegét egyesítsük a súlypontjában. Az így nyert tömegpontok közös súlypontja szintén a *CD* szakaszra illeszkedik. Stevin indoklása szerint minél jobban növeljük a beírt paralelogrammák számát, annál kevesebb lesz a különbség a háromszög és a paralelogrammák összessége között. Tehát a háromszög súlypontja a *CD* súlyvonalon van. A „tehát" szóban sűrűsödik STEVINnek az a megállapítása, amelyet ma így mondhatnánk: A beírt paralelogrammák összegének határértéke a háromszög. Persze ezt Stevin sohasem mondta így, de mégis, ez a „tehát"-tal áthidalt hiányos következtetési folyamat határozottan a határérték fogalmának kialakulása felé mutat. Az ókori és a Stevin-féle módszer különbsége nyilvánvaló. Stevin a kétoldali közelítést leszűkítette egyoldali közelítésre, és ezt nem bizonyításra, hanem számításra használta fel. Ugyanígy járt el a görbe vonalú síkidomok és testek (forgásparaboloid súlypontja) esetében is.

A térfogatszámításban már KEPLERnél is fellelhető - mintegy nyelvbotlásként - az „indivisible", az oszthatatlan szó. Így nevezte olykor azokat a végtelen kicsiny térfogatú szeleteket, amelyekre a kiszámítandó térfogatú testet gondolatban felbontotta. Nála az oszthatatlanok ugyanolyan dimenziójú infinitezimálisok, mint az az alakzat, amelynek a részei. Ennél még merészebb elképzelést kockáztatott meg

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) olasz matematikus, Galilei tanítványa. 1635-ben jelent meg sokévi munkájának eredményeként a *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Az új módon kifejtett oszthatatlan folytonos mennyiségek geometriája). Ezt követte 12 évvel később az *Exercitationes geometricae sex* (Hat geometriai gyakorlat). E két mű tette nevét halhatatlanná. A maga korában mindkettő komoly vetélytársa volt Kepler *Doliometriá*jának (Hordószámítás). Ezekben dolgozta ki Kepler és Galilei elképzelései nyomán az oszthatatlanok elméletét. Valójában visszament ARKHIMÉDÉSZnek ahhoz az alapötletéhez, hogy egy síkidomot párhuzamos húrjai vagy egy testet párhuzamos síkmetszetei összességének tekintett. Ez valójában a geometriában tarthatatlan atomos felfogás. A síkidom atomjai, oszthatatlanjai a húrok, a testé pedig a síkmetszetek. KEPLERnél egy alakzat oszthatatlanjai az alakzattal azonos

dimenziójú infinitezimálisok voltak, CAVALIERInél pedig a felbontott alakzaténál egy-gyel alacsonyabb dimenziójú „végtelen kicsinyek”. Erre a gondolatra építette fel Cavalieri a terület- és a térfogatszámításban gyümölcsöző számolási eljárását, amely később a határozott integrál fogalmához vezetett. Érdemes Cavalieri néhány gondolatmenetét végigkísérni azért, hogy észrevegyük annak eredményes voltát és egyben hiányosságait is.

Az első példánk az alapelvet mutatja. A *343. ábrán* az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvények görbéi hasonlóak, tehát az *[a, b]* intervallumon az $y_1 : y_2 = c$ arány állandó. Nyilván az y_1-ek összességének, a Σy_1-nek, és az y_2-k összességének, a Σy_2-nek az aránya is ugyanakkora: $\Sigma y_1 : \Sigma y_2 = c$. Cavalieri szemléletében az y_1-ek összessége (nem a mérőszámok összessége!) az *ABCD* síkidomot alkotja, az y_2-k összessége pedig az *ABEF* síkidomot jelenti. A Cavalieri-elv szerint tehát:

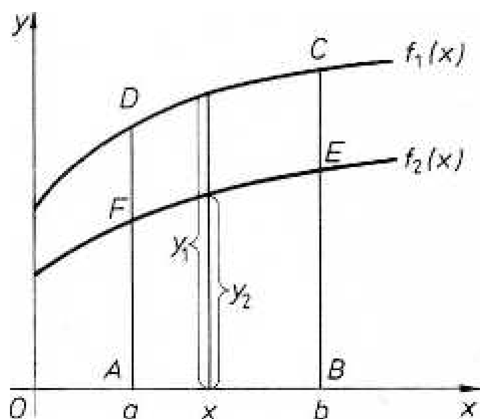
$$t_{ABCD} : t_{ABEF} = \Sigma y_1 : \Sigma y_2 = c.$$

Ez az állítás elődje a

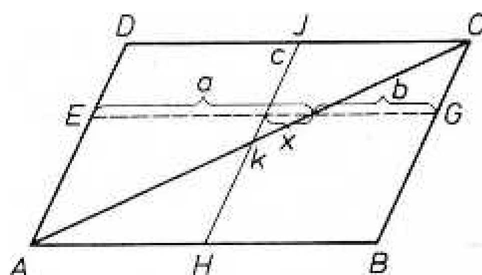
$$t_{ABCD} : t_{ABEF} = \int_a^b f_1(x)\,dx : \int_a^b f_2(x)\,dx$$

egyenlőségnek. Amint látjuk, e megállapítás csak azokra az esetekre érvényes, amelyekben az *[a, b]* intervallumon minden x-re nézve az $y_1 : y_2$ arány egyenlő.

CAVALIERI BIZONYOS ESETEKBEN AZ *y* oszthatatlanok hatványainak az arányát is kiszámította. Egy ilyen számítást követhetünk a *344. ábra* alapján, amelynek segítségével Cavalieri az oszthatatlanok köbének az arányát számította ki. Az *ABCD* paralelogrammát az *AC* átló két egybevágó háromszögre bontja. Határozzuk meg, hogy mi az arány az *ACD* háromszög *AB-vel* párhuzamos oszthatatlanjainak köbösszege és a paralelogramma *AB-vel* párhuzamos oszthatatlanjainak a köbösszege között!



343. ábra



344. ábra

Vezessük be az ábrán kis betűkkel írt jelöléseket. Ezeket használva a feladat a $\Sigma c^3 : \Sigma a^3$ arány meghatározása, ahol a Σ jel most a Cavalieri-féle összesítést jelenti.

Segédtételként határozzuk meg a Σc^2 és a $\Sigma(a^2+b^2)$ arányát! Ehhez rajzoljuk meg a *HJ* középvonalat, és vezessük be az *AHJC* hurkolt négyszög x oszthatatlanjait. Az ábra „pillanatfelvételén”:

$$a=\frac{c}{2}+x \quad \text{és} \quad b=\frac{c}{2}-x,$$

vagyis

$$a^2+b^2=2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2x^2,$$

tehát

$$\Sigma a^2+\Sigma b^2=2\Sigma\left(\frac{c}{2}\right)^2+2\Sigma x^2.$$

Az *ACD* és *ABC* háromszögek egybevágósága miatt $\Sigma a^2 = \Sigma b^2$. Vegyük még észre, hogy az *AHJC* hurkolt négyszög területe fele az *ACD* háromszög területének, tehát $\Sigma x : \Sigma a = 1/2$. Ebből *Cavalieri* arra következtetett, hogy $\Sigma x^2 : \Sigma a^2 = 1/4$, és ekkor:

$$2\Sigma a^2=\frac{2}{4}\Sigma c^2+\frac{2}{4}\Sigma a^2, \quad \text{amiből:} \quad 3\Sigma a^2=\Sigma c^2.$$

Az *ACD* háromszög oszthatatlanjainak négyzetösszege tehát háromszor kisebb az *ABCD* paralelogramma oszthatatlanjainak négyzetösszegénél. Térjünk vissza most az eredeti feladathoz!

Mivel

$c^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$

azért

$\Sigma c^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 3\Sigma ab^2 + \Sigma b^3.$

Vegyük tekintetbe, hogy az *ACD* és *ABC* háromszögek egybevágósága miatt

$\Sigma a^3 = \Sigma b^3,$ és ugyanezért $\Sigma a^2 b = \Sigma ab^2,$

tehát:

$\Sigma c^3 = 2\Sigma a^3 + 6\Sigma a^2 b. \quad (1)$

Másrészről:

$\Sigma c^3 = c\Sigma c^2 = c\Sigma(a+b)^2 = c\Sigma a^2 + c\Sigma b^2 + 2\Sigma ab = 2c\Sigma a^2 + 2c\Sigma ab.$
Segédtételünk értelmében:

$$\Sigma a^2 = \frac{1}{3}\,\Sigma c^2,$$

tehát:

$$\Sigma c^3 = \frac{2}{3}\,c\,\Sigma c^2 + 2c\,\Sigma ab = \frac{2}{3}\,\Sigma c^3 + 2c\,\Sigma ab =$$
$$= \frac{2}{3}\,\Sigma c^3 + 2(a+b)\,\Sigma ab = \frac{2}{3}\,\Sigma c^3 + 2\,\Sigma a^2 b + 2\,\Sigma ab^2 =$$
$$= \frac{2}{3}\,\Sigma c^3 + 4\,\Sigma a^2 b.$$

Innen:

$$\Sigma a^2 b = \frac{1}{12}\,\Sigma c^3.$$

Ennek alapján az (1) összefüggés így alakul:

$$\Sigma c^3 = 2\,\Sigma a^3 + 6\cdot\frac{1}{12}\,\Sigma c^3 \quad \text{vagy} \quad \Sigma a^3 = \frac{1}{4}\,\Sigma c^3.$$

A most látott módon Cavalieri végigvizsgálta az oszthatatlanok hatványösszegviszonyait egészen a 9 kitevőig, és azután kimondta az általános szabályt:

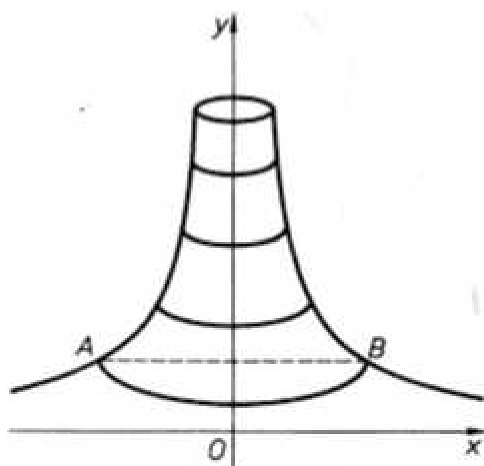
$$\Sigma a^n = \frac{1}{n+1}\,\Sigma c^n,$$

ami pedig elődje az

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

határozott integrálnak!

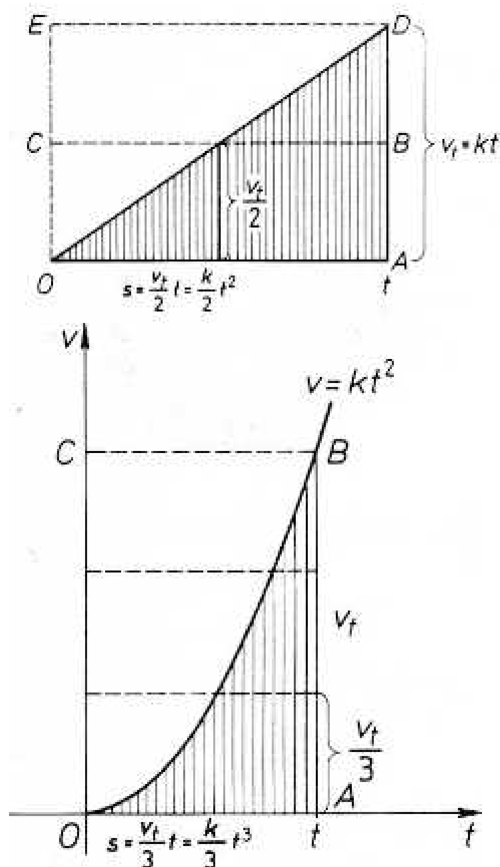
Eddigi példáinkban Cavalieri oszthatatlanjai mindig szakaszok, tehát egyenes vonalúak voltak. Ő azonban bevezette a görbe vonalú oszthatatlanokat is. Cavalieri oszthatatlanjainak lelkes híve volt barátja:



345. ábra

EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) ITÁLIAI MATEMATIKUS ÉS fizikus. CAVALIERI ELJÁRÁSÁNAK NEMCSAK ELŐNYEIT, HANEM HIÁNYOSSÁGAIT IS LÁTTA. ERRE MUTAT, HOGY A *De dimenzione parabolae* (A parabola kiterjedéséről) című munkájában Cavalieri módszerét sokszor kiegészítette Arkhimédész kimerítési eljárásával. Ebben a művében 21 parabolakvadratúrát mutatott be, részben az ókori, részben a Cavalieri-módszerrel. Az érthetőség és az alkalmazás ügyességében túlhaladta mesterét. Erről tanúskodik, hogy 1641-ben a Cavalieri-módszerrel meghatározta annak a végtelenbe nyúló forgástestnek a térfogatát, amelyet a *345. ábra* szemléltet. Ezt határolja a szimmetriatengelye körül megforgatott egyenoldalú hiperbola által leírt hiperboloid és az adott átmérőjű

(AB) körlap. Torricelli büszke volt erre az eredményére, nem tudta, hogy már megelőzte őt a XIV. századi Oresme, sőt valószínűleg Fermat és Giles Personne de Roberval (1602-1675) francia matematikus is, aki CAVALIERItől függetlenül szintén kidolgozta az oszthatatlanok módszerét, és azt nemcsak területek, térfogatok, hanem görbék ívhosszainak kiszámítására is alkalmazta.



347. ábra

Érdemes még megemlítenünk TORRICELLInek egy kinematikai gondolatmenetét, amelynek alapján a görbék egy osztályánál az érintő új definícióját tudta megadni. Az ókorból átvett meghatározás szerint az érintő olyan egyenes, amelynek a görbével egy közös pontja van, és a görbe ezen egyenes egyik oldalán fekszik. Torricelli - meglepő módon - a szabadesésből indult ki.

Már a XIV. században tudták, hogy a szabadesés egyenletesen gyorsuló mozgás. Láttuk, hogy Oresme grafikus úton kapta meg a Merton-szabályt (.... oldal), amely szerint a nulla kezdősebességű, egyenletesen gyorsuló pont útja *t* idő alatt ugyanakkora, mint a végsebesség felével egyenletesen mozgó pont útja *t* idő alatt. Az utat tehát a *346. ábra OABC* téglalapjának, illetve az *OAD* háromszögnek a területe ábrázolja, ami Cavalieri szerint az *OAB* háromszög oszthatatlanjainak az összessége. Ismeretes volt az is, hogy a szabadesés sebessége arányos az esés időtartamával. Ehhez Galilei még hozzátette, hogy a megtett út arányos az elindulás óta

elmúlt idő négyzetével, képletszerűen: $s=1/2gt^2$, vagyis az út—idő-

grafikon parabola. Ezt a megállapítást fejlesztette tovább Torricelli . Megkérdezte, hogy mekkora volna a megtett út, ha a sebesség nem az idővel, hanem az idő négyzetével lenne arányos ($v = kt^2$).

Ebben az esetben - gondolta - a megtett út nem az *OAD* háromszög oszthatatlanjainak az összessége, hanem ezen oszthatatlanok négyzetösszege volna. Ez pedig Cavalieri szerint az *OADE* téglalapbeli oszthatatlanok összességének (az *OADE* területének) a harmada, ami ugyanakkora, mint a sebesség-idő-grafikon *(347. ábra) OAB* „parabolikus háromszögének” a területe, illetve az *OABC* téglalap területének a harmada. A Merton-szabálynak megfelelően: A *t* idő alatt megtett út akkora, mint az az út, amelyet egyenletesen mozogva az a pont tenne meg *t* idő alatt, amelynek sebessége a $v_t=kt^2$ végsebesség harmada, és - tette hozzá Torricelli - most az út az idő köbével arányos, tehát az út-idő-grafikon harmadrendű

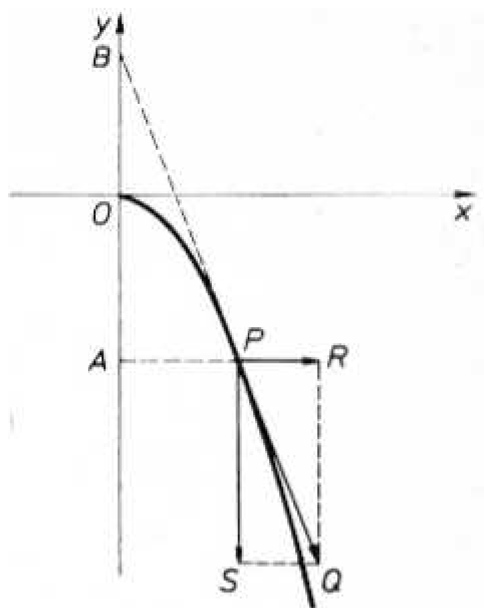
parabola $s= (k/3)t^3$. Hasonló módon: Ha a sebesség az idő köbével arányos, akkor az út az idő negyedik hatványával arányos.

Képlettel: ha $v=kt^3$, akkor $s= (k/4)t^4$. Általában, ha $v=kt^n$, akkor $s=(k/(n+1))t^{n+1}$ Gondoljunk ezután a vízszintesen elhajított test mozgására. Ennél a sebesség vízszintes komponense állandó, a függőleges összetevője pedig a szabadesés sebessége, vagyis az utóbbi az idővel arányos. A test útja másodrendű parabola. Ha a sebesség függőleges összetevője az idő négyzetével lenne arányos, akkor a test egy harmadrendű parabola mentén mozogna stb.

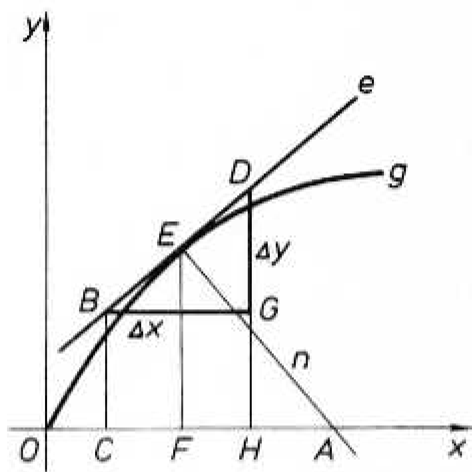
Képzeljünk most el, példa gyanánt, egy harmadrendű parabolán „eső” testet *(348. ábra)*. Szemeljünk ki ezen egy *P* pontot, és vegyük egységnyinek azt az időt, amely alatt a test ideért. Ekkor az érintő irányába eső *PQ* sebesség felbontható a vízszintes irányú, AP-vel egyenlő nagyságú *PR* és a függőleges irányú, *OA* háromszorosával egyenlő *PS* összetevőre. (Az egységnyi idő alatt megtett út, a fentiek szerint, számértékben a sebesség harmada.) Ennek alapján a *P* pontbeli érintő megszerkeszthető. Torricelli ezzel a szerkesztéssel, illetve az azt előíró $AO : AB = 1 : 3$ aránnyal definiálta a *P* ponthoz húzható érintőt. Általánosságban: Az n-ed rendű parabeláknál ez az arány $1 : n$. Igaz, hogy az érintő ilyen módon való definiálása csak az $y = ax^n$ egyenletű parabolákra vonatkozik, de nem tagadható az ókori meghatározással szembeni új módja, valamint az sem, hogy rámutat az érintőmeghatározás és a területszámítás közötti kapcsolatra. Torricelli most vázolt kinematikai gondolatmenete kétségkívül hatással volt Barrow angol matematikusra és annak tanítványára, NEWTONra is.

PASCAL AZ OSZTHATATLANOK ELMÉLETÉT FELHASZNÁLVA, A RÓLA ELNEVEZETT SZÁMHÁROMSZÖG SEGÍTSÉGÉVEL ÉS JÓ ADAG INTUÍCIÓVAL JUTOTT EL AZ $y = x^n$ parabola alatti terület kiszámításához. Gondolatmenete az 1654-ben megjelent *Potestatum numericarum summa* (A számhatványok összege) című művében olvasható. Öt évvel később, tehát 1659-ben jelent meg a *Traité des sinus du quart de cercle* (Értekezés a negyedkor szinuszáról), amelyben az oszthatatlanok módszerével meghatározta a szinuszgörbe alatti területet, a $[0, \pi]$ intervallum fölött. Ebben található az egyik ábrán a ma differenciálháromszögnek vagy karakterisztikus háromszögnek nevezett háromszög, amely különösen Leibniz kezében vált a differenciálszámítás egyik alapábrájává. A *349. ábra* feltünteti a *g* görbe *E* pontjához tartozó *e* érintőhöz és *n* normálisához tartozó *BGD* karakterisztikus háromszöget a *CH* intervallum fölött. Ennek a *DG* befogója az ordináták, és a *BG* oldala az abszcisszák különbsége. Megjegyzendő, hogy ez a háromszög nem PASCALnál jelent meg először. Használta már 1624-ben Snell, majd Torricelli és Roberval is. Pascal volt azonban az első, aki hangsúlyozta, hogy e háromszög két oldalának $BG : GD$ hányadosa mindig egyenlő az $EF : AF$ hányadossal, bármilyen kicsinynek választjuk is a *CH* intervallumot. Ebben a megállapításban benne rejlik egy hányados határértékének

a fogalma, ugyanakkor a számítási eljárás egésze összefüggést mutat a görbe érintője és a görbe alatti terület között. Hajlandók lennénk azt mondani, hogy Pascal 1659-ben kiengedte kezéből a differenciálhányados és az integrál fogalmának, valamint az azok közti összefüggésnek a felfedezését. Maga Leibniz is azt írta Johann BERNOULLInak 1703-ban, hogy Pascal mintha bekötött szemmel járt volna.



348. ábra



349. ábra

Ugyanezt mondhatjuk el Pascal barátjáról, FERMAT-ról is. Már láttuk, hogy az analitikus geometria felfedezésének a dicsősége is szinte jobban megilletné öt, mint Descartes-ot. Majdnem így van ez a differenciálszámítás esetében is. Fermat, aki szenvedélyesen szerette a görög és a latin klasszikusokat, PAPPOSZnál találkozott a következő feladattal: Ha egy a szakaszt két részre osztunk, és az így nyert x és $(a—x)$ szakaszokkal téglalapot készítünk, akkor ennek a $t=x(a—x)$ területe legnagyobb lesz, amikor $x=a—x$, vagyis amikor a szakaszt felezzük. Ettől a gondolattól ösztönözve Fermat valamilyen általános módszert igyekezett kiagyalni a maximum- és a minimumesetek megállapítására. A most vázolandó módszerét 1630 táján találta meg, de csak 1638-ban közölte egy Descartes-hoz intézett levelében. Így gondolkodott:

Mérjünk fel az adott a szakaszra valamekkora x távolságot! Az x és az $(a—x)$ szakaszokkal szerkesztett téglalap területe $T=x(a—x)$. Ha most az x távolság helyett valamilyen $(x+E)$ távolságot mérünk fel, akkor az így készített téglalap területe: $T'=(x+E)(a—x—E)$. A maximális terület esetén a T kifejezéséből éppen úgy meg kell kapnunk a maximális értéket, mint a T'-éből, azaz ekkor kell, hogy $T=T'$ legyen, vagyis $T'—T=$ 0. Részletesen :

$(x+E)(a—x—E)—x(a—x)=0,$

amiből:

$aE—2xE—E^2=0$, azaz $a—2x—E=0$.

Ugyanakkor számításba veendő, hogy a $T'=T$ esetén, Papposz szerint $x=x+E$, ami csak úgy lehet, ha E = 0. Ekkor pedig $a—2x=0$, tehát x = a/2.

A matematikatörténetben ez az első olyan gondolatmenet, amelyben egy változót megnövelünk egy kis értékkel, és azután a növekményt nullának nyilvánítjuk. FERMAT-nál hiányzott még az a „kis" mozzanat, amely felel arra, hogy az E-vel jelölt kis növekmény fokozatos zérussá válásakor mivé válik az *E-t* tartalmazó kifejezés, vagyis hiányzott a határérték fogalma. Ő inkább úgy gondolkodott, hogy a változó növelésével egy hamis egyenletet kapott, amely éppen a maximum esetén válik helyessé, és ennek a feltétele az, hogy $E=0$ legyen. Azt sem tudta megindokolni, hogy az $E=0$ esetben miért éppen a maximumhelyet kapja meg.

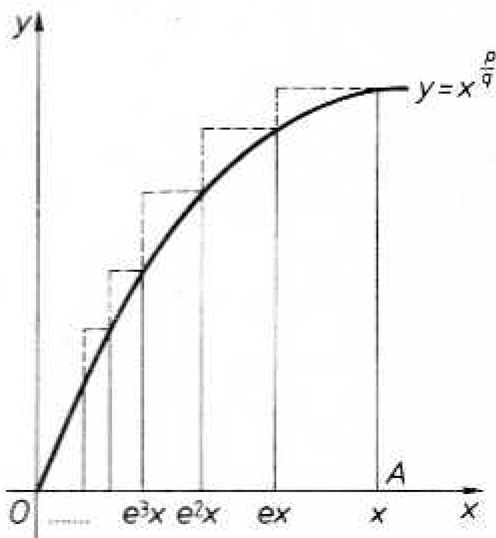
Kíséreljük végig Fermat gondolatmenetét mai általános jelölésekkel! Írjunk hát az $y=x(a—x)$ helyett y = f(x)-et, és az *E* helyett Δx-*et*, valamint az *y* változását jelöljük Δy-nal! Ekkor:

$$y=f(x)$$

$$\underline{y+\Delta y=f(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad | : \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



350. ábra

f(x) maximális lesz - mondja Fermat ha $\Delta x = 0$ esetén $\Delta y/\Delta x = 0$. FERMAT TEHÁT ELJUTOTT A DIFFERENCIAHÁNYADOSIG, ÉS VALÓBAN CSAK „PICI” HIÁNYZOTT AHHOZ, HOGY ELJUSSON A DIFFERENCIÁLHÁNYADOSHOZ. FERMAT AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS MEGKÖZELÍTÉSÉBEN IS LÉNYEGES HALADÁST ÉRT EL, AMI AZ $y=x^{p/q}$ görbe alatti terület kiszámításában jelentkezett. Az volt az egyik újítása, hogy visszatért az arkhimédészi hagyományokhoz, és a görbe alatti területet a *350. ábra* szerinti téglalapsorozatba burkolta. A másik újítása pedig abból állt, hogy az *OA* intervallumot nem egyenlő részekre osztotta, hanem az [O, x] közben az x-tengelyen kijelölte az *x, ex,* e^2x, e^3x, ... pontokat, ahol $0<e<1$. A két szomszédos osztópont közti szakaszokat választotta a burkoló téglalapok alapjának. Számítsuk ki FERMAT-val együtt az így keletkezett végtelen sok téglalap területösszegét! Az osztópontok abszcisszái:

x, ex, e^2x, ...

A téglalapok alapjai:

$x(1 - e)$, $ex(1-e)$, $e^2x(1 - e)$, ...

A téglalapok magasságai:

$$x^{\frac{p}{q}}, \quad e^{\frac{p}{q}} \cdot x^{\frac{p}{q}}, \quad e^{\frac{2p}{q}} \cdot x^{\frac{p}{q}}, \quad \dots$$

A téglalapok területei:

$$(1-e)x^{\frac{p+q}{q}}, \quad (1-e)e^{\frac{p+q}{q}} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}, \quad (1-e)e^{\frac{2p+2q}{q}} \cdot x^{\frac{p+q}{q}}, \quad \dots$$

A téglalapok területei végtelen mértani sorozatot alkotnak, tehát területeik összege:

$$\frac{(1-e)x^{\frac{p+q}{q}}}{1-e^{\frac{p+q}{q}}}.$$

Ahhoz, hogy a görbe alatti területet kapjuk, kell, hogy a téglalapok x-tengelyre illeszkedő alapjai „végtelen kicsinnyé” váljanak. Ezt Fermat úgy gondolta elérhetőnek, ha e helyébe 1-et ír.
Előbb azonban bevezette az $e=E^q$ helyettesítést, valamint a területösszeg számlálóját és nevezőjét szorzattá alakította. Így:

$$x^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{1-e}{1-e^{\frac{p+q}{q}}} = x^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{1-E^q}{1-E^{p+q}} =$$

$$= x^{\frac{p+q}{q}} \cdot \frac{(1-E)(1+E+E^2+E^3+\dots+E^{q-1})}{(1-E)(1+E+E^2+E^3+\dots+E^{p+q-1})}.$$

Most egyszerűsített (1—E)-vel, aztán e helyére 1-et írt, amikor is $E=1$, tehát a görbe alatti terület:

$$t=x^{\frac{p+q}{q}}\cdot\frac{q}{p+q}=\frac{q\cdot x^{\frac{p+q}{q}}}{p+q},$$

ami nyilvánvalóan azonos az

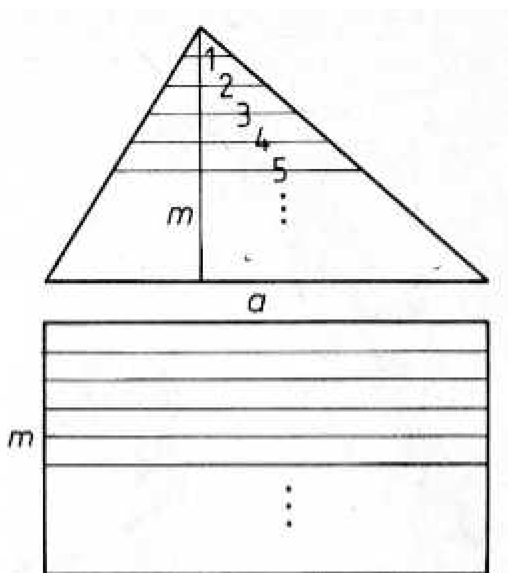
$$\int_0^x x^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrállal.

A figyelmes olvasó bizonyára észrevette azt a számos megmagyarázatlan manipulációt, amelyet Fermat az *e* szám „célszerű" megválasztásával kapcsolatban végzett, hiszen kezdetben az *e-t* úgy kellett megválasztani, hogy egynél kisebb pozitív konstans legyen, később pedig arra volt szükség, hogy nullává váljék. Milyen jogon történhetett ennek a főszereplővé lett e-nek egyazon feladaton belüli többféle értékválasztása? Erre bizony Fermat nem adott magyarázatot, de mentségéül szolgál - ha ugyan a más hibája mentség -, hogy hasonló hiányosságok LEIBNIZnél éppen úgy fellépnek, mint NEWTONnál.

Fermat is bekötött szemmel járt. A franciák e kiválósága, aki olyan feladatokat oldott meg, amelyben együtt szerepelt az érintőprobléma és a területszámítás, aki a PASCALéhoz nagyon hasonló differenciálháromszög segítségével ívhosszat számított ki, akinél minden együtt volt ahhoz, hogy őt tisztelhessük a differenciál- és integrálszámítás felfedezőjeként, mégsem érdemelte ki ezt a címet. Éspedig azért, mert nem vette észre az érintőfeladat és a területszámítás mélyebb kapcsolatát, és nem dolgozta ki integrálmódszerét általános számítási eljárássá. Nem tette meg az utolsó lépést, amellyel megteremthette volna a geometriai feladatoktól független differenciálhányados és integrál fogalmát. Ahhoz, hogy ezek a fogalmak megszülethessenek, szükség volt egy további absztrakcióra, amelyet nem ő és nem a hozzá nagyon közel járó Pascal tett meg, hanem egymástól függetlenül Newton és Leibniz. Ezt

AZONBAN MÉG MEGELŐZTE EGY NEM HOSSZÚ, DE FELTÉTLENÜL MEGEMLÍTENDŐ FEJLŐDÉSI SZAKASZ, AMELY - TÖBBEK KÖZÖTT - WALLIS, GREGORY ÉS BARROW NEVÉHEZ FŰZŐDIK.



351. ábra

WALLIS CAVALIERI NYOMDOKAIN HALADT, AMIKOR A FEJLŐDÉS IRÁNYÁBA FOGALMAZTA ÁT AZ OSZTHATATLANOK MÓDSZERÉT, AZ ELJÁRÁS ARITMETIZÁLÁSÁVAL. MŰVE, AZ *Arithmica infinitorum* (A végtelenek aritmikája) 1655-ben jelent meg. A *351. ábrán* látható egy azonos alapú (a) és magasságú (m) háromszög és paralelogramma. Ezekbe berajzoltunk Cavalieri oszthatatlanjaiból néhányat. Wallis az *a* alapot *n* egyenlő részre osztotta, és egy ilyen a/n részt távolságegységnek tekintett. Ezután az alappal párhuzamos húrok közül kiindulásul csak azokat tüntette fel, amelyek az - egységnek egész

számú többszörösei, vagyis amelyek mérőszámai a háromszögben rendre: 0, 1, 2, 3, ..., n, és a téglalapban *:n,n,n, ... ,n.* Ebben a megközelítésben az oszthatatlanok összegének aránya:

$$\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+n+\ldots+n}=\frac{n(n+1)}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

Ez a hányados minden pozitív egész értéknél 1/2 és ha n végtelen nagy lesz, akkor is. Ez tehát a háromszög és a téglalap területének az aránya.

Hasonló elképzeléssel az oszthatatlanok négyzetösszegének az aránya a háromszög és a téglalap esetén:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}\to\frac{1}{3}.$$

Az 1/3-ot Wallis úgy állapította meg, hogy megfigyelte e hányadost az $n=$ 1, 2, 3, ... értékeknél, és a kapott

$$\frac{1}{2},\frac{5}{12},\frac{14}{36},\frac{30}{80},\ldots$$

sorozat elemeit

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\frac{1}{3}+\frac{1}{12},\frac{1}{3}+\frac{1}{18},\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

, ... alakban írta fel.

Nem nehéz észrevenni, hogy az 1/3-tól való eltérés általánosságban 1/6n, ami az *n* növelésével bármilyen kicsinnyé tehető.

Az oszthatatlanok hatványkitevőit növelve, Wallis $k=9$-ig számította ki az arányokat, és azután általánosságban is kimondta, hogy:

$$\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}=\frac{1}{k+1},$$

ami pedig megfelel a későbbi

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$$

határozott integrálnak. Wallis gondolatmenetét áttekintve szinte úgy kell visszatartani magunkat, hogy ki ne ejtsük a határérték szót. A Cavalieri-módszerre épített Wallis-féle aritmetizációhoz már megint „csak” a határérték megfogalmazása és a határérték-számítás kidolgozása hiányzott, valamint a más függvényekre is érvényes általánosítás. Wallis idézett könyve hatással volt az analízis fiatal úttörőjére,

James Gregory (1638-1675) skót matematikusra és csillagászra is. Egyik nagyapja, Alexander Anderson (1582-1619) kiadta Viéte munkáit. Gregory kiváló matematikai felkészültségét tehát az otthoni légkör is biztosította. Egyik pártfogójáról, John COLLINSról (1625-1683), a Royal Society akkori könyvtárosáról szintén érdemes megemlékeznünk. Kiterjedt tudományos levelezésével olyan szerepet játszott az új felfedezések terjesztésében, mint annak idején a franciáknál Marin Mersenne. Gregory az 1664-68-as években Itáliában került közel az infinitezimális módszerhez, főleg Stefano degli Angeli (1623-1697) páduai professzor révén, aki Cavalieri tanítványa volt. Gregory még Páduában adta ki 1667-ben a *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (A kör és a hiperbola helyes kvadratúrája) című könyvét, amellyel az infinitezimális számítás jelentős fejlesztője lett.

Nem követte az oszthatatlanok módszerét, hanem ő is visszatért az antik forráshoz, ARKHIMÉDÉSZhez. Az ókori alapból kiindulva kísérelte meg a kétoldali közelítés aritmetizálását. Először a körnél és a hiperbolánál mutatta meg, hogy ha például a körbe és a kör köré szabályos háromszöget rajzolt, és ezek oldalszámát folytatólagosan megduplázta, akkor a belső területek és a burkoló területek is olyan végtelen sorozatot alkottak, amelyek *konvergálnak* egymáshoz, vagyis a két sorozat megfelelő elemei közötti különbség tetszőleges kicsinnyé tehető. Más szavakkal: mindkét sorozat egy közös határ felé közeledik, amely mintegy a két sorozat „utolsó” elemének tekinthető, és ez nem más, mint a kör keresett területe. A konvergens szót ilyen értelemben ő honosította meg a matematikában. Az érintő meghatározásában Fermat módszerét

követte, azzal a különbséggel, hogy míg Fermat *E* betűvel jelölte a változót növelő és később nullának tekintett kis mennyiséget, addig Wallis egy kis nullával (o). Ezt csak azért említem, mert ez utóbbi jelölést Newton is átvette.

Gregory az analízis későbbi eredményeiből már meglepően sokat ismert. Ezeket az 1668-ban megjelent két művében adta közre. Bennük összefoglalta korának hasonló tárgyú eredményeit is. Az egyik Páduában jelent meg *Geometriae pars universalis* (A geometria általános része) címmel, a másikat Londonban adta ki. Ennek címe: *Exercitationes geometricae* (Geometriai gyakorlatok). Gregory nem választotta el az algebrai, illetve az analitikai módszereket a geometriaiaktól. Ez nem szerencsés módon azt eredményezte, hogy műveit nehézkes stílusú geometriai nyelven fogalmazta meg. Ez az egyetlen oka annak, hogy számos felfedezése más nevét viseli.

Megoldott feladatai nyomán állítható, hogy ha nem is fejtette ki, de látta a kvadratúra és az érintőszámítás inverz voltát.
Teljesen önállóan általánosította a binomiális tételt törtkitevőkre is. Ekkor ugyan megvolt már Newton hasonló eredménye, de csak íróasztalának fiókjában. Valójában Gregory fedezte fel a Taylor-sort, és elsőként ismerte a tg x, sec *x,* arctg x és arcsec x Maclaurin-sorát is. Ezek közül csak az

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

sor viseli az ő nevét. Newton egyetemista korában Gregory Cambridge-ben tanított, így nincs kizárva, hogy tanította Newtont. Az angolok e világhíres nagyságára azonban igazán

Isaac Barrow (1630-1677) angol matematikus és teológus volt nagy hatással. Barrow két műve: az 1669-ben megjelent *Lectiones opticae* (Optikai előadások) és az egy évvel későbbi *Lectiones geometricae* (Geometriai előadások).

Ez utóbbi mű bizonyítja, hogy Barrow nemcsak tisztában volt az

érintő- és a kvadratúrafeladatok akkor ismert minden csínjával-bínjával, hanem világosan látta is a két problémakör összefüggését, amelyet ilyen tisztán Gregory vett észre. Barrow azonban ugyancsak nehézkes geometriai nyelvet használt, és ez megakadályozta, hogy módszere jól kezelhető analitikus algoritmussá fejlődjék. A *Lectiones geometricae* tizedik előadásából közöljük most egy gondolatmenetét modem formában, az $y=px^3$ harmadrendű parabola példáján:

Határozzuk meg az $y=px^3$ görbe $M(x, y)$ pontjához húzott érintőjét *(352. ábra)* . Ez az érintő az x-tengelyt a T pontban metszi. A PT szubtangens ismeretében az adott M ponthoz tartozó érintő már megrajzolható. A PT kiszámítása végett mérjünk fel a görbére egy olyan kicsiny MN ívet, hogy ez a kis ív „essék egybe” az érintővel. Az N pont koordinátái: $(x+e)$ és $(y+a)$. Rajzoljuk meg az NQ ordinátára merőleges $MR=e$ szakaszt is. Ekkor, ha az N pontot elég közel vettük fel az M ponthoz, akkor állíthatjuk, hogy a

TPM háromszög hasonló az MRN háromszöghöz. Így: $y/TP=a/e$.

Határozzuk meg az a/e hányadost! A rajzról leolvasható, hogy:

$y=px^3$

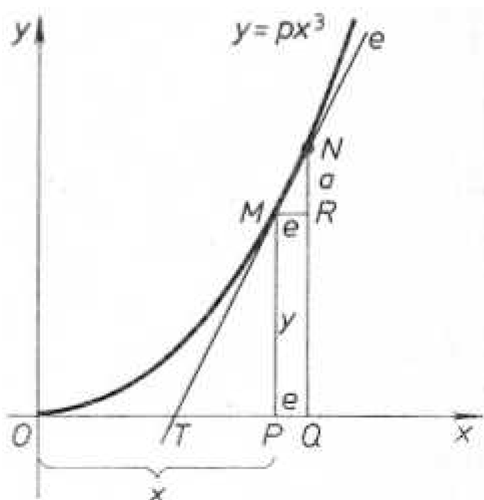
$y+a=p(x+e)^3$

A különbség:

$a=p(x+e)^3—px^3=3epx^2 +3e^2px+e^3p.$

Osztva e-vel:

$a/e = 3px^2+ 3epx+ e^2p.$



352. ábra

Hanyagoljuk el a jobb oldal azon tagjait, amelyekben a nagyon kicsi *e* szerepel. Ekkor:

$$\frac{y}{TP}=\frac{a}{e}=3px^2,$$

ahonnan

$$TP=\frac{y}{3px^2}.$$

A hányados kiszámítása közben az *e-t* tartalmazó tagok elhanyagolása csak azzal indokolható, hogy a *TPM* háromszög annál inkább hasonló az *MNR* háromszöghöz (karakterisztikus háromszög!), minél kisebb az *MN* és vele együtt az *e* távolság. Úgy vélem, hogy ennél pontosabb megokolást a határérték-fogalom nélkül adni nehéz lenne. Az a/e az *y* függvény diiferenciálhányadosa az M pontban, és még az is látszik, hogy e hányados az *M* pontbeli érintő iránytangense.

Akár Fermat, akár Barrow vagy Gregory példája nagyon megnehezíti azt az állítást, hogy a differenciál- és

integrálszámítás felfedezője Newton és Leibniz, mint ahogyan ezt széltében-hosszában tanítjuk. Hosszan tartó fejlődés és sok éles elme erőfeszítése munkálta ki e két fogalmat, és emelte arra a fokra, hogy ezekből a függvények egy nagy osztályára alkalmazható, tehát nagyon általános számítási eljárás, algoritmus válhassék. A felfedezés hosszú folyamatában nem az utolsó, de jelentős lépést tett meg

NEWTON ÉS LEIBNIZ

Nevük végképp összeforrt egy áldatlan, különösen az angol matematikának nagy kárt okozó, prioritási vitával. A differenciál- és integrálszámítás felfedezésének az elsőbbségéért folyt köztük a harc akkor, amikor pedig - mint láttuk - a felfedezés dicsősége sokaké; pedig még nem is említettük a felfedezők sorában Gregory of Saint Vincent (1584-1667) belga matematikust, aki Cavalieritől függetlenül, vele egy időben dolgozta ki az oszthatatlanok elvén alapuló terület- és térfogatszámítást. Nem szóltunk a forgástestek térfogatának kiszámítására szolgáló Guldin-tételről, amelyet Papposz nyomán Paul Guldin (1577-1643) svájci matematikus dolgozott ki. Nem szerepelt Andreas (André) Tacquet (1612-1660) belga matematikus sem, aki kortársához, TORRICELLIhez nagyon hasonló módon fejlesztette az infinitezimálisokkal való számolást. Nem soroltuk fel azok nevét, akik a görbék ívhosszát határozták meg infinitezimális módszerekkel, köztük volt az angol William Neil (1637-1670), a holland Heinrich van Heuraet (1633-1660?) és az angol Christopher Wren (1632-1723).

Nem került elő Florimond Debeaune (1601-1652) francia matematikusnak, Descartes barátjának a neve sem, aki felhívta a figyelmet az érintőfeladatok megfordítására, lényegében a differenciálegyenletekre. E felsorolásból nem maradhat ki Christiaan Huygens (1629-1695) holland matematikus és fizikus. Ő szintén megtalálta a szubtangens meghatározásának BARROW-nál bemutatott módját, és megoldott sok érintő- és szélsőérték-feladatot.

A differenciál- és integrálszámítás felfedezése tehát sok tudós együttes érdeme, de Newton és Leibniz volt az a két szerencsés, akiket méltán megillet ugyan a betetőzés vagy inkább a tető alá hozás dicsősége, de azzal a megjegyzéssel, hogy művük még

utánuk is tökéletesítésre szorult.

Newton már 1665 táján használta az általa fluxióelméletnek nevezett számítási apparátust fizikai és csillagászati kutatásaiban. Az eljárást azonban sokáig nem hozta nyilvánosságra, mert tudta, hogy logikai megalapozása nem kielégítő. A fluxióelmélet kidolgozásához fizikai modellt használt. Jól ismerte az elődök irodalmát, és közvetlen szellemi elődjének, BARROW-nak nemcsak tanítványa volt, hanem segítője is a *Lectiones geometricae* sajtó alá rendezésében. Newton főleg Galilei, Cavalieri, Torricelli és Barrow eszméire támaszkodott, nagyon jól ismerte azonban Pascal, Wallis és Fermat műveit is. Kalkulusának fizikai eredetét mutatják az elnevezései is. Az időben lefolyó fizikai folyamat természetesen függ az időtől. A képzeletben egyenletesen múló időtől függő, az időben lefolyó változásnak - például egy mozgásnak - az éppen vizsgált mennyiségét - például az útját - nevezte fluensnek. (A latin fluens magyar megfelelője: folyó, megváltozó.) Az út időbeni megváltozását, vagyis a mozgás sebességét hívta fluxiónak. (A latin fluxio jelentése: folyás, változás. Ez a differenciálhányados megfelelője.)

Ha a *t* időtől függő fluenst Newton y-nal jelölte, akkor a fluxiót $\dot{y}$-tal. Afluxió is függhet az időtől, azaz maga is lehet fluens. A fluxió fluxióját Newton $\ddot{y}$ -tal jelölte stb. Az idő végtelen kicsiny megváltozásának a jele NEWTONnál, mint GREGORYnál is, egy kis nulla *(o).* Az x és az y fluensek (változók) e kicsiny o időtartam alatti megváltozására a $o\dot{x}$, illetve a $o\dot{y}$ jeleket használta, és ezeket az x, illetve az y fluens momentumának nevezte. (Momentum = mozzanat, szaporulat, a Δx és Δy megfelelője.) Figyeljük meg e jelölések használatát, valamint a fluxiószámítást Newton egyik példája nyomán, amely Fermat, vagy ha úgy tetszik, Barrow eljárásának minden konkrétumtól való elvonatkoztatása. Éppen az eljárás konkrét feladattól való függetlenítése jelenti a valódi újat a fluxiószámítás-ban.

Legyen tehát két (az időtől függő) fluens x és y. Ezek között adott az

$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

összefüggés. Keressük az x és y fluxióinak a kapcsolatát!

Az x megnövekszik o idő alatt ox·-tal, y pedig oy·-tal. Így:

$$(x+o\dot{x})^3-a(x+o\dot{x})^2+a(x+o\dot{x})(y+o\dot{y})-(y+o\dot{y})^3=0$$

Rendezve:

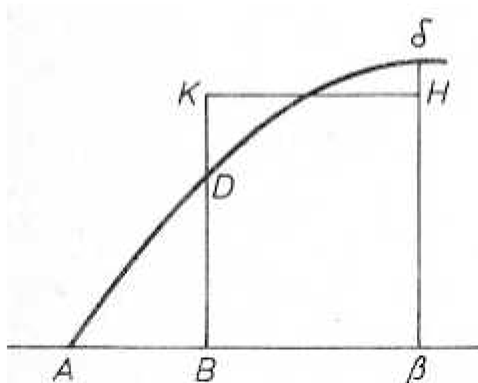
$$x^3-ax^2+axy-y^3+3x^2o\dot{x}+3xo^2\dot{x}^2+o^3\dot{x}^3-2axo\dot{x}-$$
$$-ao^2\dot{x}^2+ayo\dot{x}+axo\dot{y}+ao^2\dot{x}\dot{y}-3y^2o\dot{y}-3yo^2\dot{y}^2-o^3\dot{y}^3=0.$$

Az első négy tagot elhagyhatjuk, mert ezek összege az eredeti egyenlet szerint nulla. A bal oldalt osszuk végig o-val, azután pedig hagyjuk el azokat a tagokat is, amelyekben még az osztás után is előfordul a o. Így megkapjuk a fluxiók közti összefüggést:

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0.$$

Látható, hogy még NEWTONnál is megmaradt a meg nem magyarázott mozzanat. Ahogy Barrow az e-vel, és ahogy Fermat az E-vel egyszer oszt, később pedig ugyanazt, amivel osztott, nullának tekinti, ugyanúgy tesz Newton a o-val.

Valószínűleg ez volt az a logikai hézag, amely miatt Newton késlekedett a publikálással. Megkísérelt ugyan ehhez a ténykedéshez magyarázatot fűzni: „Az utolsó hányadosok, amelyekben a mennyiségek eltűnnek, pontosan szólva, nem az utolsó mennyiségek hányadosai, hanem határok, amelyek felé ezen mennyiségek hányadosai határtalanul közelednek és amelyeket bár minden adott különbségnél jobban megközelítenek, mégsem haladnak túl, sem el nem érnek, amíg a mennyiségek nem csökkennek a végtelenségig.” Habár Newton e megjegyzése határozottan a határértékfogalom felé mutat, az értelmezési homály így is megmaradt.



353. ábra

Illusztrációul idézek még egy részletet Newton *De analysi per aequationes numero terminorum infinitus* (A végtelen sok tagú egyenletekkel való analízisről) című írásából, amelyet 1669-ben mutatott be BARROW-nak.

„I. szabály: Ha $ax^{\frac{m}{n}}=y$, akkor $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ az *ABD* területtel." *(353. ábra.)*

„Legyen valamely *ADδ* görbe alapja *AB* = *x;* legyen továbbá az erre merőleges *BD* = *y* és az *ABD* terület z. Legyen még Bβ = o, *BK* = *v* és a *BKHβ* téglalap *(ov)* egyenlő a *BβδD* területtel. Így *Aβ* = *x* + *o* és *Aβδ* = *z* + *ov.* Ezeket előrebocsátva, keresem az összefüggést *x, y és z* között az alábbi módon

Most Newton a már sokszor bemutatott kvadratúrával eljutott a bizonyítandó I. szabályhoz. Ezzel azonban nem elégedett meg, hanem megtoldotta még az alábbi bizonyítással:

„Legyen általában

$$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z.$$

Ha bevezetem az (an)/(m + n) = c és az $m+n=p$ jelölést, akkor $cx^{p/n}=z$ vagy $c^nz^p=z^n$. Ekkor *x* helyett (x + o)-át és z helyett (z +

ov)-t [vagy ami ugyanaz, *(z+oy)-t]* írva kapom, hogy

$c^n(x^p + pox^{p-1} \dots) = z^n + noyz^{n-1} + \dots,$

miközben elhagyom a többi tagot, amely a végén eltűnik. Ha továbbá elhagyom a $c^n x^p$ *és* z^n egymással egyenlő tagokat is, és a megmaradtakat osztom o-val, akkor marad

$$c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1} \left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}} \right)$$

vagy $c^n x^p$-nel való osztás után:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}, \quad \text{illetve} \quad pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny.$$

Visszahelyettesítve *c* helyére (an)/(m+n)-et és *p* helyére *(m+n)-et,* ami-

kor is $p-n=m$ és $pc=an$, kapom, hogy $ax^{\frac{m}{n}}=y$. Ezért fordítva is, ha $ax^{\frac{m}{n}}=y$, akkor $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z$. Ezt kellett bizonyítani."

Azt hiszem, hogy e két kiragadott szemelvény eléggé szemlélteti, hogy Newton nagyon világosan látta a fluxiószámítás és az integrálszámítás inverz viszonyát, továbbá mindkettőt az értelmezéstől és az alkalmazásukat igénylő feladatoktól független művelette általánosította.

Leibniz tudományos törekvéseinek egy sokkal elvontabb tájáról érkezett el az analízishez. Ő nem elsősorban volt matematikus. A matematikus együtt élt benne a filozófussal, a történetíróval, a jogásszal és az irodalmárral. Mindezen területek számára tudott egységes filozófiai nézőpontot találni. Mindenben a gondolkodás legáltalánosabb törvényeit kutatta, akárcsak Descartes. Ilyen törekvések közepette

barátkozott össze Párizsban a fiatal Huygens-szel, aki megismertette az analízisnek akkor már élő fogalmaival és azok kombinatorikus kapcsolataival, és természetesen saját gondolataival is. Ekkor kezdett el Leibniz - aki addig a kombinatorika területén kereste az általános gondolkodási törvényeket - az analízissel foglalkozni. Áttanulmányozta Cavalieri, Fermat, Pascal és Huygens munkáit, és igyekezett az azokból megismert analitikus módszereket a saját filozófiai gondolatkörébe beilleszteni, majd egy olyan jelrendszert kidolgozni, amelynek segítségével e módszerek egységes matematikai műveletté, „kalkulussá” általánosíthatók.

Ezen eredményeiről először 1684-ben számolt be az általa két évvel előbb megalapított *Acta Eruditorumban* (Tudósok folyóirata). Alapvető cikkének címe: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae necfractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus* (Új módszer a maximumokra és minimumokra, valamint az érintőkre, amelyet nem gátolnak sem a tört, sem az irracionális mennyiségek, és az azokra vonatkozó különleges számítási művelet). Ez a számos hibával teletűzdelt és száraz ismertetés bizony még a Leibniz iránt lelkesedő Bernoulli testvérek számára is „inkább volt rejtvény, mint magyarázat”. Ebben az x abszcissza differenciálján egy meghatározott dx mennyiséget értett, és az y ordináta dy differenciálján olyan mennyiséget, amelyhez dx úgy aránylik, mint az y ordináta az S_1 szubtangenshez. Egy visszapillantás a *352. ábrára,* meggyőz bennünket arról, hogy ez a definíció a Pascal-, illetve a Barrow-féle karakterisztikus háromszögre van alapozva. LEIBNIZnél $a = dy$, $e = dx$ és $TP = S_t$. Leibniz tehát geometriai modellt választott: a görbe érintőjéhez illesztett karakterisztikus háromszöget. A továbbiakban ez a hatlapos tanulmány ismertette az összeg, a szorzat, a hányados, a hatvány és a gyök differenciáljának a meghatározását minden bizonyítás nélkül, majd tárgyalt néhány érintőre, inflexiós pontra és szélsőértékre vonatkozó alkalmazást. Ezek között szerepel a fénytörés törvénye is, amelyet a Fresnel-elv alapján határozott meg. Leibniz az 1686-os cikkében, amely ugyancsak folyóiratában jelent meg, az alkalmazások körét még jobban kiterjesztette. Későbbi értekezéseiben megjelent a logaritmus, az exponenciális és a trigonometrikus függvények

differenciáljainak kiszámítási szabálya is.

Az érintőhöz ragasztott definíciók nem kielégítő volta miatt sikertelenek voltak Leibniz azon próbálkozásai, amelyekkel a magasabb rendű differenciálokat igyekezett bevezetni. Amint mondta: a d^2x ugyanaz a dx-hez képest, mint ami a dx az x-hez viszonyítva, ha tehát dx : x = *dh : a,* ahol *a* konstans és *dh* egy konstans differenciál, akkor d^2x : *dx* = *dh* : *a,* és mivel az első összefüggésből $dx = xdh/a$ azért

$$d^2x : \frac{x\,dh}{a} = dh : a, \quad \text{azaz} \quad d^2x : x = dh^2 : a^2.$$

Általánosan pedig: $d^nx : x = dh^n : a^n$, ahol *n* lehet tört is. Leibniz talán maga is érezte e meghatározások kifogásolhatóságát, azért később egy geometriai interpretációt is adott. E szerint: Egy adott görbe minden pontjára nézve dx legyen egy meghatározott mennyiség, és határozzuk meg minden pontra a d*y* értéket úgy, hogy $dy : dx = y : S_t$ legyen. Ezután az eredeti koordináta-rendszerben mérjünk fel a görbe minden pontjához olyan ordinátákat, amelyek arányosak a ponthoz tartozó d*y* értékkel. A felmért ordináták végpontjai egy új görbét határoznak meg. Ennek az új görbének - írja Leibniz - a differenciáljai az eredeti görbe „differentio-differential”-jai, illetve második differenciáljai. A hiányos definíciók miatt bizonytalanná vált a d^nx és d^ny szimbólumok használata is. Így történhetett meg, hogy Johann Bernoulli a LEIBNIZhez intézett egyik levelében 1695-ben olyan szörnyűségeket írt, mint például:

$$\sqrt[3]{(d^6y)} = d^2y.$$

Leibniz kínlódott a meghatározásokkal, hiszen nem állt rendelkezésére sem a határértéknek, sem az érintőnek a pontos definíciója, amire alapozhatott volna. Ezért sokszor kénytelen volt analógiákhoz, hasonlatokhoz folyamodni. A különböző rendű végtelen kicsinyek viszonyát magyarázva például azt mondta, hogy ha egy mozgást (a mozgás útját) egy vonallal ábrázolunk, akkor a sebességet egy ahhoz képest végtelen kicsiny szakasz ábrázolja, a gyorsulást pedig kétszeresen

VÉGTELEN KICSINY VONAL. MÉG A *Historia et origo calculi differentialis* (A differenciálkalkulus története és eredete) című munkájában is, amelyet halála előtt 2 évvel írt, érezhetően nagyon küszködik a differenciálok természetével, amelyeket hol véges, hol végtelen kicsi mennyiségekként kell kezelni. Véges korukban jelük (d)x és (d)y, ha pedig már eltűnő mennyiségekké válnak, akkor dx és *dy* a jelük. Szilárd kikötés azonban, hogy (d)y : (d)x = dy : dx. Leibniz, csakúgy mint Newton, sohasem számolta ki ténylegesen a differenciálokat, hanem mindig csak azok arányát, ami mindig az ordináta és a szubtangens hányadosa. Gondolatmenetében a folytonosság törvényét alkalmazta a karakterisztikus háromszögre, ami azt jelenti, hogy a háromszögben a befogók hányadosa mindig ugyanaz marad miközben a dx kisebbedik, ti. az $y : S_t$ arány, és ezt az állandó értéket megtartja, ha dx egyre kisebbé, majd zérussá válik. E megfontolásban fő szerepet kap a határhelyzet, a határérték fogalma, de ezt Leibniz a nem definiált folytonosságra alapozta, pedig - mint tudjuk - a járható út ennek éppen a fordítottja: a határérték fogalmára lehet építeni a folytonosság fogalmát.

Minden fogalmi bizonytalanság mellett azonban Leibniz is nagyon ügyesen alkalmazta e kellően meg nem alapozott eljárást. Ezt mutatja az a példa is, amelyet az 1693-ban megjelent *Supplementum geometriae practicae*... (A gyakorlati geometria kiegészítése...) című cikkéből vettünk. Ő maga is példának szánta ezt a részt arra, hogy a sorbafejtés alkalmazhatóságáról meggyőzze olvasóit.

Fejtsük sorba az ∫ (adx/a + x) integrált! Itt bizonyára - írja Leibniz -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a+x}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a\,dy}{dx} + \frac{x\,dy}{dx} - a = 0. \qquad (*)$$

y sorbafejtett alakja: $y = bx + cx^2 + ex^3 + \ldots$, ahol a *b, c, e, ...* együtthatók meghatározása a feladat. Ebből:

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3ex^2 + \ldots$$

Ezt behelyettesítve a csillagos egyenletbe:

$$ab+2acx+3aex^2+\ldots+bx+2cx^2+3ex^3+\ldots-a=0.$$

$$ab-a+(2ac+b)x+(3ae+2c)x^2+(4af+3e)x^3+\ldots=0.$$

Ahhoz - folytatja Leibniz hogy ez az egyenlet azonosság legyen, az szükséges, hogy minden együttható külön-külön is zérus legyen. Tehát

$$ab-a=0, \quad \text{ahonnan } b=1,$$

$$2ac+b=2ac+1=0, \quad \text{ahonnan } c=-\frac{1}{2a},$$

$$3ae+2c=3ae-\frac{1}{a}=0, \quad \text{ahonnan } e=\frac{1}{3a^2},$$

. . .

így

$$y=x-\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^4}{4a^3}+\ldots$$

Amint tudjuk - és Leibniz is tudta -, most egy logaritmusfüggvény végtelen hatványsorát kaptuk.

Összefoglalásként megállapíthatjuk, hogy sem Leibniz, sem Newton nem volt képes a differenciál- és integrálszámítás logikai alapjainak a tisztázására, viszont mindketten megalkottak egy olyan matematikai apparátust, a végtelen kicsinyekkel való számolási eljárást, amelynek eredményei, valahányszor ellenőrzésre nyílott alkalom, mindig helyesnek bizonyultak. Leibniz is, Newton is meglátta, hogy a differenciálszámítás és annak inverz művelete felhasználható a határozott integrál kiszámítására. Így teljes joggal nevezzük e kapcsolatot Newton-Leibniz-tételnek. A két nagy tudós között fellángolt és nagyságukhoz méltatlan prioritási vita teljesen értelmetlen volt. Igaz, hogy e vitát inkább a túlbuzgó tisztelők indították el. E versengés a matematikatörténet szempontjából csak azért érdemel említést, mert az angol

matematikusok Newton iránti elfogultságból nem vették át Leibniz világosabb és a fejlődést jobban segítő jelölésrendszerét és ezzel csökkentették az angol matematika fejlődési lehetőségeit.

E két nagy tudós iránti tiszteletből emlékezzünk meg néhány más eredményeikről is.

Newton első matematikai felfedezései közé tartozik a binomiális tétel általánosítása tört és negatív kitevőkre, GREGORYtól függetlenül, aki a közlésben megelőzte. Newton ezt az 1664-1665-ös eredményét csak 1676-ban írta, meg két levélben Henry OLDENBURG-nak (1618?-1677). Newton beleegyezésével Wallis is publikálta 1685-ben *Algebrájában.* Newton 1676. június 13-án kelt leveléből szakítottunk ki egy részletet, amelyben a binomiális tételt a törtkitevőkre is értelmezte. Az alapfeladat (mai jelölésekkel) az

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{0}{2}}\,dt,\quad \int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt,\quad \int_0^x (1-t^2)^{\frac{2}{2}}\,dt,$$

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{3}{2}}\,dt,\quad \int_0^x (1-t^2)^{\frac{4}{2}}\,dt,\quad \ldots$$

határozott integrálok meghatározása volt.

Ezért kiszemelte az

$$(1-t^2)^{\frac{0}{2}}=1,$$

$$(1-t^2)^{\frac{2}{2}}=1-t^2,$$

$$(1-t^2)^{\frac{4}{2}}=1-2t^2+t^4,$$

$$(1-t^2)^{\frac{6}{2}}=1-3t^2+3t^4-t^6,$$

$$(1-t^2)^{\frac{8}{2}}=1-4t^2+6t^4-4t^6+t^8,$$

$$\vdots$$

sorozatot. Megfigyelte, hogy a hatványok mindegyikénél az első tag 1, a második tagok együtthatói pedig számtani sorozatot alkotnak:

$$\frac{0}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{4}{2}, \quad \frac{6}{2}, \quad \frac{8}{2}, \quad \cdots$$

Tekintsük ezt alaptörvénynek, és akkor a sorozatban nem szereplő, közbenső hatványok mindegyikének első tagja 1, és a második tagok együtthatói a közrefogó hatványok megfelelő együtthatóinak számtani közepei, tehát:

$$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}t^2+\ldots$$

$$(1-t^2)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}t^2+\ldots$$

$$(1-t^2)^{\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}t^2+\ldots$$

$$\vdots$$

A további kérdés az volt, hogyan lehet következtetni a többi együtthatóra. Ehhez Newton felírta a 11 természetes szám kitevőjű hatványait. Ezekben a számjegyek az $(a+b)^n$ együtthatóinak felelnek meg. Tehát:

$11^0= 1$

$11^1= 11$

$11^2= 121$

$11^3=1331$

$11^4=14641$

. . .

Ha e hatványok második számjegyeit m betűvel jelöljük, akkor m-ből a következő számjegyeket, illetve az ezeknek megfelelő, keresett együtthatókat abszolút értékben megadja az

$$\frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot\ldots$$

képlet. „Legyen például-írja Newton - $m=4$, akkor a harmadik 4*(m-1)/2=6 ; a negyedik 6*(m-2)/3=4; az ötödik 4*(m-3)/4=1;

a hatodik 1*(m-4)/5 = 0, ami azt jelenti, hogy itt a hatványnak vége van.”

Így tehát, ha *m = 1/2*, akkor az együtthatók rendre:

$$1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}=-\frac{1}{8};\ -\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3}=\frac{1}{16};\ \frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{2}-3}{4}=-\frac{5}{128};\ \ldots$$

Ezekkel:

$$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8}t^4-\frac{1}{16}t^6-\frac{5}{128}t^8-\ldots$$

Ekkor már tagonkénti integrálással:

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt=x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}-\ldots$$

Newton leveléből kitűnik, hogy a binomiális tétel általánosítása egy szűk függvényosztály sorbafejtésének az érdekében történt, hogy azután lehetővé váljék a tagonkénti integrálás. Newton a sorbafejtéshez felhasználta még a határozatlan együtthatók módszerét, az inverz függvényeket és a koordinátatranszformációkat. Sikerült eljutnia - többek közt - a

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

sorokhoz is. Newton fiatalon, már az 1665-1666-os években

nemcsak ismerte, hanem a fizika és a csillagászat területén alkalmazta is a fluxióelméletet, de csak fő művében a *Philosophiae naturalis principia mathematica* (A természetfilozófia matematikai alapelvei) című könyvében hozta nyilvánosságra 1687-ben. Ez a késedelmes közlés nem tartozott a kivételek közé. Az általános tömegvonzás törvényét is 1666 táján fedezte fel, de csak 20 évvel később közölte az imént említett *Principiá*ban. Általában szerette műveit a nyilvánosságra hozatal előtt sokáig érlelni. 1704-ből való a harmadfokú görbékről írt műve, amely kezdete az algebrai görbék elméletének, és elsőként haladta lényegesen túl Apollóniosz életművét. Feltétlenül említésre méltó az egyenletek gyökeinek közelítő meghatározására szolgáló Newton-Raphson-módszer (Joseph Raphson angol matematikus, 1648-1715), és a Newton-féle interpolációs polinom, amely egy függvény n pontjának ismeretében meghatározza annak a függvénynek a legfeljebb (n— l)-ed fokú polinomját, amely az n pont mindegyikén áthalad. A dinamika Newton-féle alaptörvényei jelentik a XVIII. és XIX. század fizikájának és egyben a mechanikus materialista világképnek az alapjait. Az ő nevéhez kapcsolódik a fényszóródás törvényének a felfedezése és az emissziós fényelmélet megalkotása is.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) úgy, mint Descartes, mindig filozófiai céllal közeledett az általa művelt tudományokhoz. Objektív idealista nézeteit az 1714-ben megjelent *Monadologiá*-ban fejtette ki. E szerint a mindenség végtelen sok eszmei szubsztanciából, „monász”-ból áll, amelyek egymástól függetlenül rendelkeznek érzékelőképességgel és törekvéssel, ennélfogva aktivitással és mozgékonysággal is. Ezeket az egymással kölcsönhatásban nem levő monászokat egy magasabb rendű monász, az Isten rendezi harmóniába, hogy azokból kialakuljon az állandó mozgásban fejlődő világ. Ismeretelmélete az idealista racionalizmus, amelynek értelmében az ismeret forrása csak az értelem, és így az észigazságok ellenőrzésére a logikai törvények alkalmasak. Célja volt tehát egy olyan új logika kialakítása, amely a nyelvi logikán alapszik, és amely számára megteremthető az egyetemes szimbólumrendszer. E cél elérésére Leibniz legalkalmasabbnak tartotta a matematika logikai törvényeinek és fogalmainak kifejezését lehetővé tevő jelrendszert. Azt a jelrendszert kereste, amellyel az új ismeretek mintegy számíthatók a matematika minőségi összefüggései (hasonlóság, sorrend, igaz,

hamis, következik stb.) alapján. Megálmodta a szimbolikus logikához vezető minőségek matematikáját, amely különleges esetként tartalmazná a mennyiségek matematikáját. Kezdetben úgy látta, hogy a keresett és szimbólumokkal leírható univerzális nyelv elemeit legtisztábban a kombinatorika tartalmazza. Amikor azonban Huygens révén megismerkedett az infinitezimális mennyiségekkel, akkor teljes érdeklődése az új tudomány felé fordult. A differenciálokban szinte a monászok megtestesülését látta. Nem nehéz felfedezni LEIBNIZben a püthagoreust. Ezt ő, a 2-es számrendszerbeli számírás feltalálója, szinte lelkendezve ki is fejtette a Rudolf Ágost főhercegnek küldött kéziratában 1696 májusában. Abban, hogy a 2-es számrendszerben az 1 és a 0 segítségével minden szám felírható, a teremtés szimbólumát látta. Az egy Isten így teremtheti csupán a semmiből a világ számtalan dolgát. „Essentiae rerum sunt sicut numeri” (A dolgok lényegei a számok) vallja Leibniz is, mint vallotta Püthagorasz. (Lásd a 300. oldalt.)

A vázolt filozófiai és ismeretelméleti törekvések mellett természetes, hogy Leibniz a matematikában is törekedett a kifejezőbb jelölésre. Ehhez különösen jó érzéke volt. Jellemző, hogy például H. V. Alekszandrova *Matematikai terminusok* című, 168 oldalas könyvecskéjében Leibniz neve 47 oldalon szerepel, mint olyan, aki a matematikába bevezetett vagy népszerűsített valamilyen elnevezést vagy jelet. Ilyen elnevezések: simulókör, differenciál, ordináta, transzcendens görbe, függvény, exponenciális görbe stb. Jelei között szerepelnek a dx, d*y*, $a : b = c : d$ *és*
$\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\int$, $\sim$,
mások.

Az eddig említett területeken kívül sikeresen működött a kombinatorikában, ő vezette be a determináns fogalmát, és kikutatta a szakaszos tizedes törtek több tulajdonságát. Mechanikus számológépe révén - amely tudta mind a négy alapműveletet - választotta a londoni Royal Society tagjai sorába 1673-ban. 1693-ban felismerte a mechanikai energiák állandóságának törvényét, és először tervezett meg egy aneroid barométert. Gazdag, sikerekkel teli, színes életére emlékeztet szobra Lipcsében és Hannoverben.

NEWTON UTÁN ANGLIÁBAN

Érthető, hogy a Newton és Leibniz utáni matematikusokat nem hagyta nyugodni a nagyon eredményesnek mutatkozó fluxiómódszernek, illetve differenciálkalkulusnak a logikai megalapozatlansága. Angliában is - ott természetesen Newtonhoz kapcsolódva - és a kontinensen is - ahol pedig Leibniz volt a központ - igyekeztek a homályt eloszlatni. Különféle magyarázatok születtek.

NEWTON RÖGTÖN MEGTÁMADTA GEORGE BERKELEY (1685-1753), A CLOYNE-I PÜSPÖK AZ 1734-BEN KIADOTT *The Analyst* című könyvében. Ennek a kritikának az volt a haszna, hogy Newton és az őt támogató matematikusok igyekeztek kivédeni a támadásokat, amelyek között volt jogos is. A vitában többen is részt vettek. Közülük messze kimagaslott

Colin Maclaurin (1698-1746) skót matematikus és csillagász, aki sikeresen működött az analízis, az algebra és a projektív geometria területén. Az 1742-ben megjelent *Treatise of Fluxione* (Értekezés a fluxiókról) című tanulmányában kifejtette, hogy a „végtelen kicsiny" fogalmát,, mint definiálhatatlant, ki kell zárni az új analízisből és ajánlotta a pillanatnyi sebesség fogalmának a matematikába való bevezetését. A változó mozgás útjának egy *P* pontjához tartozó pillanatnyi sebessége fizikailag is realizálható, hiszen ha a *P* pontban a mozgás egyenletessé válnék, akkor annak az állandó sebessége az eredeti mozgás *P* pontbeli pillanatnyi sebessége, amint ezt már Oresme is megfogalmazta. Maclaurin Newton fluxióját mint valamely változás pillanatnyi sebességét definiálta, de visszavezette a sebességet az egyenletes mozgás véges út- és időintervallumának a hányadosára. A pillanatnyi sebességet fogadta el értelmezési alapként

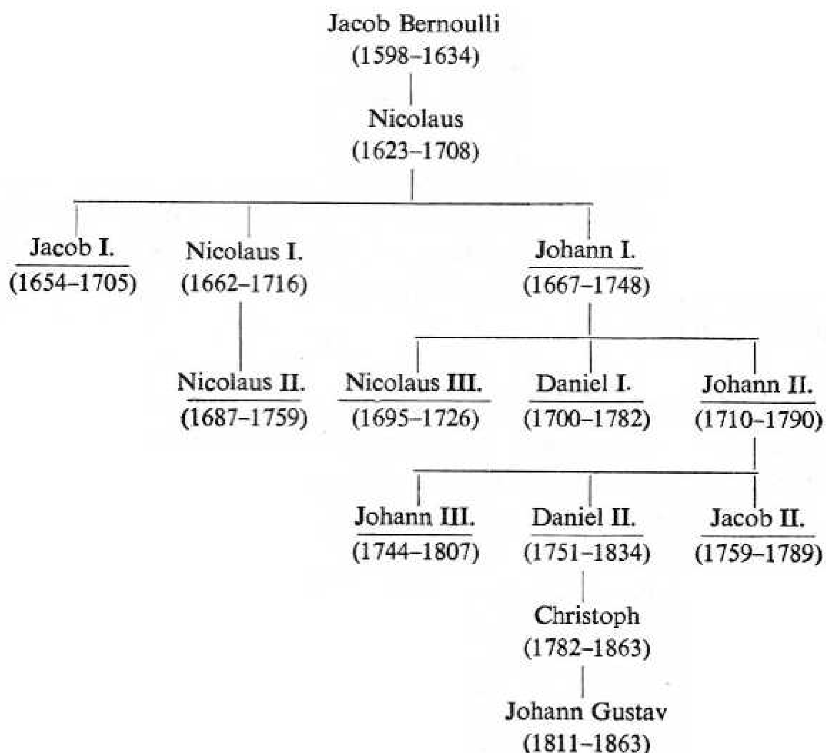
Brook Taylor (1685-1731) is, aki visszatért Newton momentumaihoz. Az ő nézetét osztotta, sőt még tovább is ment nála, Thomas Simpson (1710-1761), woolwichi matematikaprofesszor az 1737-ben megjelent igen népszerű könyvében, amelynek tárgya éppen a fluxiók módszere.

Az említettek erőfeszítése azonban nem tette sokkal világosabbá Newton módszerét, és nem szüntette meg látszólagos

ellentmondásait. Ennek egyik akadálya a függvényfogalom kialakulatlansága volt, amely fogalom tökéletesítését akadályozta az, hogy nagyon összekeveredtek az aritmetikai, a geometriai és a fizikai módszerek. Newton például a szorzat fluxiójának a kifejtésekor úgy vélte, hogy a határérték szigorú alkalmazásával - ami kimondottan aritmetikai eljárás - jutott az eredményhez, ugyanakkor a szorzatot mint egy téglalap területét szemléltette, ami viszont geometriai felfogás. Amíg Angliában Newton égisze alatt ilyen sikertelen küzdelem vagy talán küszködés folyt a fluxióelmélet fogalmainak a tisztázására, addig a kontinensen a függvényfogalom formális kialakításával igyekeztek a jobb megalapozás felé.

LEIBNIZ UTÁN A KONTINENSEN

A kontinensen a „kalkulus” lelkes művelői között kitűnik a Bernoulli *család* és annak barátja, minden idők legtermékenyebb matematikusa, Euler. A protestáns Bernoulli *család* Flandriából menekült a vallásüldözések elől a Majna melletti Frankfurtba, majd onnan a svájci Bázelbe. Ekkor Jacob Bernoulli (1598-1634) volt a családfő. Az ő fiának, Nicolaus BERNOULLInak (1623-1708) 11 gyermeke volt. A családnak több mint féltucat tagja örökítette meg nevét a matematikában. A Bernoulliak alább közölt családfájában csak azok szerepelnek, akik valamilyen tudomány területén kimagasló sikereket értek el. Ezek közül aláhúztuk a matematikában kiválóakat.



A Bernoulli család első két matematikusa Jacob és Johann. NICOLAUSnak Jacob az ötödik és Johann a tizedik gyermeke volt. Mindkettőjük Leibniz 1684-es közleményeinek a hatására kezdett matematikával foglalkozni, pedig Jacob teológusnak, Johann meg orvosnak készült. Szorosan együttműködtek LEIBNIZcel, és sokszor el sem választható egy-egy eredményben különösen a két testvér szerepe. Az infinitezimális számítás elvi alapjainak a tisztázásában talán több érdeme volt JOHANN-nak, ezért a testvérek közül súllyal az ő gondolatait szeretném ismertetni, amelyek azonban nem választhatók el L'Hospital nevétől sem. Mindketten megérdemlik, hogy eredményeikkel és személyükkel is kissé részletesebben foglalkozzunk.

Jacob (Jacques) Bernoulli I. (1654-1705) teológus korában Hollandiában és Angliában ismerkedett meg Wallis és

Barrow műveivel. Ekkor fordult érdeklődése a matematika felé. Leibniz cikkeit olvasva végképp elhatározta, hogy a matematikának szenteli életét, és erre rábeszélte öccsét, Johannt is, aki kitűnő tanítványnak bizonyult. Jacob 33 éves korában a bázeli egyetem matematikaprofesszora lett. Nemcsak az analízis fejlesztésében, hanem a sorelméletben, a differenciálegyenletek elméletében, a variációszámítás és a valószínűségszámítás alapjainak a lerakásában is kiváló eredményeket ért el.

Johann (Jean) Bernoulli I. (1667-1748) az orvosi diplomát 1694-ben szerezte meg Bázelben, de egy év múlva már a groningeni egyetemen matematikát adott elő addig, amíg bátyja halála után át nem vette annak tanszékét Bázelben. Itt tanította két kiváló fiát, NICOLAUSt és a világhírű fizikussá vált Danielt, valamint ezek jó barátját, EULERt is. Hatvani István (1718-1786), a legendás hírű debreceni professzor szintén hallgatta Bázelben Johann Bernoulli matematikai előadásait, a fizikát és az orvostudományt pedig annak fiától, DANIELtől tanulta. Johann az analízisen kívül sikeresen foglalkozott a húrok rezgéseivel, a differenciálegyenletekkel, a koordinátageometriával és a csillagászattal is. A variációszámítás megalapozásában egyenlő érdemei vannak bátyjával, JACOBbal.

Jacob Bernoulli az analízisben jó eszközt talált a síkgörbék tanulmányozására. (Az $r^2=a*\cos 2\vartheta$ egyenletű Bernoulli-féle lemniszkáta, a láncgörbe, a logaritmikus spirális stb.) Különösen megtetszett neki a logaritmikus spirális *($r=ae^{k\varphi}$),* annyira, hogy kívánsága szerint ezzel a görbével jelölték meg a sírját, alatta e felirattal: „Eadem mutata resurgo.” (Megváltozva bár, de ugyanannak támadok fel.) A felirat arra utal, hogy a szóban forgó görbéből származtatott új görbék egy része szintén logaritmikus spirális. Ilyen a görbe evolutája (evoluta a görbületi körök középpontjának mértani helye), a görbe evolvense (az a görbe, amelyre nézve a logaritmikus spirális evoluta), a görbe talpponti görbéje (a pólus tükörképeinek az összessége az érintőkre vonatkoztatva).

A sorelméletben Jacob nevét őrzi a Bernoulli-egyenlőtlenség, amely azonban már BARROW-nál is szerepelt. E szerint, ha $x \neq 0$, $x > -1$ és n 1-nél nagyobb egész szám, akkor $(1 + x)^n > 1 + nx$. JACOB SZÍVESEN FOGLALKOZOTT A FIGURÁLIS SZÁMOK (88. OLDAL) RECIPROKAINAK SOROZATAIVAL. EZEK KÖZÜL EREDMÉNYTELENÜL KÜSZKÖDÖTT AZ

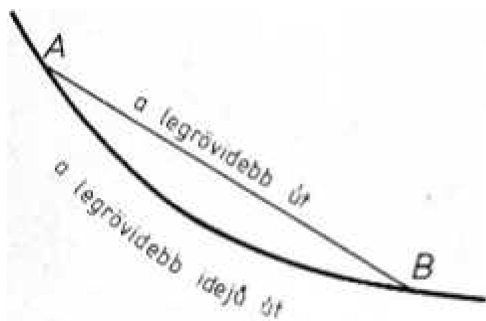
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

sor összegének zárt előállításával, pedig a sor konvergens voltában bizonyos volt, mert észrevette, hogy annak minden tagja kisebb az

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots$$

sor megfelelő tagjánál, és tudta, hogy ez utóbbi sor a 2-höz tart. ő írta az első rendszeres, sorokról szóló művet az 1689-1704-es években *Aritmetikai vonatkozások, a végtelen sorokról és véges összegükről* címen. Ilyen szempontból nem érdektelen az *Ars conjectandi* (A találgatás tudománya) sem, amely ugyan a valószínűségszámítás alapozó könyve, de függelékében a végtelen sorokkal foglalkozik. Itt adja meg többek közt a következő becslést:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$



354. ábra

Bár Leibniz és Huygens is meghatározták, de Jacob Bernoulli önállóan is rájött, hogy annak a görbének az egyenlete, amely mentén a nehézségi erő hatása alatt eső test sebességének a függőleges komponense állandó, vagyis az izochron görbének az egyenlete: $y=x^{3/2}$. Az *Acta Eruditorumnak* abban a cikkében, amelyben ezt az eredményt közölte, ő használta először Leibniz „calculus summatoris” kifejezése helyett a „calculus integralis”-t és annak ∫ jelét, amelyet később Leibniz is átvett. Jacob BERNOULLIról nyerte nevét az $y'+P(x)y = Q(x)y^n$ differenciálegyenlet, amelyet Leibniz és Johann Bernoulli is megoldott.

E hármas együttműködés másik példája a brachisztochron (legrövidebb idejű) görbe meghatározása. A feladatot Johann adta fel bátyjának: Melyik az a görbe, amely mentén a nehézségi erő hatására az *A* pontból induló test az alacsonyabban fekvő *B* pontba a legrövidebb idő alatt érkezik el *(354. ábra)?* Jacob helyesen a cikloid egyenletét adta meg. E feladatot Leibniz szintén megoldotta. A cikloidgörbéről az is kiderült, hogy bármely pontjából induljon a görbe mentén eső test, mindig ugyanakkora idő alatt jut el a görbe legmélyebb pontjába, vagyis a cikloid tautochron (egyidejű) görbe is. Jacob e feladvány viszonzásául kitűzte öccse számára az izoperimetrikus problémát: Az egyenlő kerületű síkidomok közül melyik a legnagyobb területű? Johann azonban helytelen megoldást adott, és ezt Jacob nyilvánosan megbírálta. Emiatt közte és az amúgy is könnyen felfortyanó Johann között testvérekhez nem illő hangú vita alakult ki.

Amikor Johann 1692-ben Párizsban járt, találkozott Guillaume

Francois L'Hospital márkival, akivel heti négy órában ismertette meg a Leibniz-féle kalkulust. Ezért igen jó díjazást kapott, és hazatérte után is fennmaradt köztük ez a JOHANN-nak jövedelmező tanácsadói viszony. Következményként L'Hospital megírta a Leibniz-féle differenciálszámítás első és nagyon jól sikerült tankönyvét. Ez már nem tetszett JOHANN-nak, mert ő is tervbe vette egy ilyen tárgyú kézikönyv megírását, amelyet végül is nem adott ki. L'Hospital az 1694-ben megjelent *Analyse des infiniment petits* (A végtelen kicsinyek analízise) előszavában elismerte, hogy sok magyarázatot köszönhet „a Bernoulli uraknak, különösen az ifjúnak, aki most Groningenben professzor. Minden további nélkül felhasználtam az ő és Leibniz úr felfedezéseit." A beismerés ellenére a szerzőt, ennek halála után, Johann plágiummal vádolta. Így történt, hogy nem Bernoulli-, hanem L'Hospital-szabálynak nevezik a következő tételt: Ha az *a* helyen differenciálható f(x) és *g(x)* függvényekre igaz, hogy *f(a)* = 0 és *g(a)* = *0,* akkor létezik az *f'(x)* és *g'(x)* hányadosának a határértéke, ha *x* tart az a-hoz, és

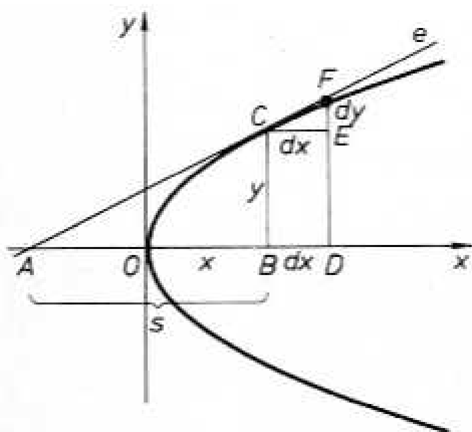
$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1924-ben a bázeli könyvtárban megtalálták és ki is adták Johann BERNOULLInak azt a 38 oldalas füzetét, amely tanúsítja, hogy szerzője az 1691-1692-es években valóban foglalkozott egy *Lectiones de Calculo Differencialis* című összefoglaló könyv kiadásának a gondolatával. Ebben az 1924-ben megjelent könyvecskében Johann Bernoulli három posztulátumból indult ki:

1. Egy mennyiség, amelyet végtelen kicsiny mennyiséggel csökkentünk vagy növelünk, nem lesz kisebb, sem nagyobb.

2. Egy görbe vonal végtelen sok végtelen kicsiny szakaszból áll.

3. Egy síkidom, amelyet két ordináta, az abszcisszák különbsége



355. ábra

és valamely görbének végtelen kicsiny darabja határol, paralelogrammának tekinthető. Ezek a posztulátumok, habár a végtelen kicsiny fogalmát nem határozzák meg, mégis a differenciálszámítás megalapozásának a kezdetét jelentik. Hasonló követelményekkel kezdi a könyvét L'Hospital is.

Hogyan épített ezekre a posztulátumokra Bernoulli? Figyeljük meg egy feladaton! Határozzuk meg az $y^2 = ax$ parabola érintőjét, vagy ami ezzel egyértelmű, az érintő szubtangensét! Ha a *355. ábra* szerint x-et megnöveljük kis dx-szel, akkor *y* megnő kis dy-nal, tehát : $(y+dy)^2 = a(x+dx)$, azaz $y^2+2ydy+(dy)^2 = ax+adx$. Azért, hogy a *CEF* háromszög oldalaihoz jussunk, vonjuk ki az utóbbi egyenletből a paraboláét. Ekkor: $2y\,dy+(dy)^2=adx$.

Az 1. posztulátum szerint $2y\,dy$ nem változott, amikor megnöveltük a hozzá képest végtelen kicsi $(dy)^2$-tel, tehát $2y\,dy = adx$, ahonnan

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a}\,.$$

A 2. posztulátum szerint a görbe *CF* íve egyenes szakasz, és ekkor a $CEF\Delta \approx ABC\Delta$, tehát:

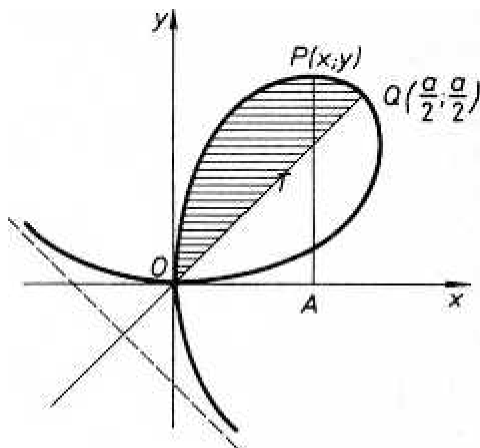
$dy : dx = y : AB.$

Innen az $s=AB$ szubtangens:

$$s=AB=\frac{y\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{y\cdot 2y}{a}=\frac{2ax}{a}=2x.$$

A szubtangens ismeretében az érintő már meghatározható.

Ugyanebben az írásban a szerző ötletes helyettesítéssel teszi lehetővé az integrál kiszámítását, amikor meghatározza a „Descartes-levél” területét. Ezt a síkidomot az



356. ábra

$x^3+y^3=axy$

egyenletű görbe zárja be a *356. ábra* szerint. Bernoulli először is $y=ax^2/z^2$ helyettesítéssel bevezette az új z változót. Ekkor az egyenlet:

$$x^3=\frac{a^2z^4-z^6}{a^3}\,.$$

Ebből:

$$x^2\,dx=\frac{4a^2z^3\,dz-6z^5\,dz}{3a^3}\quad\Big|\cdot\frac{a}{z^2}$$

$$\frac{ax^2\,dx}{z^2}=y\,dx=\frac{4z\,dz}{3}-\frac{2z^3\,dz}{a^2}\,.$$

Innen:

$$\int y\,dx=\frac{2z^2}{3}-\frac{z^4}{2a^2}\,.$$

A $z^2=ax^2/y$ helyettesítés után:

$$\int y\,dx=\frac{2ax^2}{3y}-\frac{x^4}{2y^2}\,.$$

Mivel a *Q* pont koordinátái: $x=y=a/2$, azért az *OPQ* ív alatti terület:

$$\int_0^{\frac{a}{2}} y\,dx=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{8}=\frac{5a^2}{24}\,.$$

A bevonalkázott fél levél területe:

$$\frac{5a^2}{24}-\frac{a^2}{8}=\frac{a^2}{12}\,,$$

és az egész levél területe $:T=a^2/6$.

A Bernoulli fivéreknek és tanítványuknak, L'Hospitalnak a művei nyomán megerősödött a bizalom a Leibniz-kalkulus iránt, amely így népszerű lett az európai matematikusok körében.

A Bernoulliak közül a matematika fejlődésére nagy hatással volt

Daniel Bernoulli (1700-1782), Johann I. fia. 1725-ben bátyjával, Nicolaus III-mal (1695-1726) együtt elfogadta Katalin cárnő meghívását a szentpétervári Akadémiára. Sajnos Nicolaus, aki differenciálegyenletekkel és valószínűségszámítással foglalkozott, 9 hónapi együttlét után meghalt. Daniel ajánlatára ekkor nevezték ki ifjúkori barátjukat, EULERt a szentpétervári Akadémia adjunktusának. Daniel 1733-ban hazatért, és elfoglalta a bázeli egyetem anatómiai és botanikai tanszékét. 1750-ben ugyanitt a fizika professzora lett. 1738-ban adta ki a *Hidrodinamikáját.* Jelentős eredményekkel gazdagította a differenciálegyenletek és a variációszámítás területét. Egyik fontos eredménye volt az

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

összefüggés. A párizsi Akadémia díját 10-szer nyerte el.

Daniel öccse, Johann II. (1710-1790) a szónoklattan, majd a matematika professzora volt a bázeli egyetemen.

Jacob I. és Johann I. Nicolaus nevű testvérének a fia: Nicolaus II. (1687-1759) szintén a matematika tanára volt Páduában, aztán pedig jogot és logikát tanított a bázeli egyetemen.

Johann II-nek Johann nevű fia (1744-1807) már 19 éves korában csillagászprofesszor lett a berlini Akadémián. A végtelen szakaszos tizedes törtekkel foglalkozott. Később a matematikai osztály vezetője lett.

Johann II-nek másik két fia, Daniel II. (1751-1834) és Jacob II. (1759-1789) nem voltak kiugró matematikai tehetségek, de annyira azért értettek a matematikához és a fizikához, hogy Daniel nagybátyjukat idős korában egyetemi előadásain nehézség nélkül helyettesíteni tudták.

Leonhard Euler (1707-1783) apja kálvinista lelkész volt, aki fiát is papnak szánta. Az ifjú azonban nagy igyekezettel látogatta Johann Bernoulli matematikaóráit, akinek fiaival is összebarátkozott. Amikor Nicolaus és Daniel Szentpétervárra kerültek, ajánlatukra az ekkor állástalan Eulert is meghívta a szentpétervári Akadémia, ahol

először az élettan, majd hamarosan a matematika és fizika tanszékén fejthette ki páratlan tehetségét. 1727-től 1741-ig maradt Szentpéterváron. Ezalatt mintegy 50 tudományos munkája jelent meg, és még 80-at rendezett sajtó alá. Közben jelentős térképészeti munkát is végzett. Ez utóbbi annyira igénybe vette, hogy fél szemére megvakult. 1741-ben elfogadta II. Frigyes meghívását a berlini Akadémiára. Itt az Akadémia elnöke, és a matematikai osztály vezetőjeként 1766-ig mintegy 380 művet írt, amelyek egy része Oroszországban jelent meg, ahol az Akadémia továbbra is tagjaként kezelte, olyannyira, hogy rendszeres fizetést is folyósított neki. 1766-ban a hétéves háború elől visszaköltözött Szentpétervárra. Kétszer nősült, és 13 gyermeke volt. Annak ellenére, hogy 1766-ban mindkét szeme világát teljesen elvesztette, munkakedve töretlen maradt. Káprázatos memóriával és belső látással diktálta műveit. Ebben az időszakban az Akadémia 416 munkáját fogadta el. Az elvétve említett számadatok is mutatják, hogy a matematika történetében példátlan az a termékenység, amellyel Euler matematikai műveit ontotta. Ugyanakkor ezek a művek mind tartalmukban, mind formájukban a matematikai szakirodalom remekbe szabott kincsei.

Euler azt a nagy célt tűzte maga elé, hogy rendszeresen feldolgozza, kiegészíti és biztos alapokra helyezi korának már igen tekintélyes mennyiségű matematikai ismereteit. Ha ez ilyen szóról szóra értelemben nem is sikerült, de azt elmondhatjuk, hogy más matematikát hagyott maga után, mint amit talált. Nincs a korabeli matematikának olyan fejezete, amelyhez lényegeset ne tett volna hozzá, vagy amely nem az ő kutatásai nyomán született. Euler születésének 200 éves évfordulóján felújult az összes Euler-művek kiadásának régi szándéka. A terv a Svájci Természettudományi Társulat, a berlini és a pétervári Akadémia összefogásával 1909-ben révbe jutott. 1911-ben a Teubner Kiadónál a 35 kötetre tervezett kiadás első kötete már meg is jelent. Közben Gustav Eneström (1852-1923) svéd matematikatörténész összeállította Euler műveinek majdnem teljes listáját. Az ezen szereplő 866 cím akkora anyagot ölel át, hogy a teljes kiadás kötetszámát 72-re kellett emelni. A kiadókat dicséri, hogy a közbejött második világháború nehézségei

ELLENÉRE IS A 72 KÖTETBŐL 1981-BEN MÁR CSAK 3 HIÁNYZOTT. AZ UTOLSÓ KÖTETEKET MÁR A BIRKHAUSER VERLAG ADTA KI.

Az analízisre Euler három könyvet szánt: a kétkötetes *Introductio in analysin infinitorumot* (Bevezetés a végtelenek analízisébe, 1748), a kétkötetes *Institutiones calculi differencialist* (A differenciálszámítás alapjai, 1755) és a négykötetes *Institutiones calculi integralist* (Az integrálszámítás alapjai, 1767-1770; a negyedik kötet 1794-ben jelent meg.) E három könyv tartalmazza mindazt, ami az analízis területén Euler idejében egyáltalában elérhető volt. Euler a kielégítő logikai megalapozottság hiányában igen fejlett intuíciós érzékkel a formalizmusra támaszkodott, és ezt az irányzatot a végsőkig tökéletesítette. Módszeréről képet alkothatunk, ha figyelemmel kísérjük az *Introductio* egyik részletét, amelyen csak annyit hamisítunk, hogy a ma megszokott jelöléseket használjuk. A részletet a könyv 132. és további pontjaiból idézzük:

132. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ felírható a

$(\cos x + i \sin x)(\cos x — i \sin x) = 1$ alakban, ahol $i = \sqrt{(-1)}$.

Ez a képzetes szorzat széles körű alkalmazásra talál. Tekintsük például a $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$ szorzatot, amely kifejtve:

$\cos x \cos y — \sin x \sin y + i (\sin x * \cos y + \cos x * \sin y) = \cos (x + y) + i * \sin(x + y)$,

tehát

$(\cos x + i * \sin x)(\cos y + i * \sin y) = \cos (x + y) + i * \sin (x + y)$.

Hasonló módon:

$(\cos x — i * \sin x)(\cos y — i * \sin y) = \cos (x + y) — i * \sin (x + y)$,

és még:

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)(\cos y \pm i \cdot \sin y)(\cos z \pm i \cdot \sin z) =$$
$$= \cos (x + y + z) \pm i \cdot \sin (x + y + z).$$

133. Az előbbiekből következik, hogy

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^2 = \cos 2x \pm i \cdot \sin 2x$$

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^3 = \cos 3x \pm i \cdot \sin 3x$$

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^4 = \cos 4x \pm i \cdot \sin 4x$$

$$\ldots$$

$$(\cos x \pm i \cdot \sin x)^n = \cos nx \pm i \cdot \sin nx.$$

Válasszuk ketté az utolsó egyenlőséget:

$$(\cos x + i \cdot \sin x)^n = \cos nx + i \cdot \sin nx$$

$$(\cos x - i \cdot \sin x)^n = \cos nx - i \cdot \sin nx.$$

E kettő összegéből:

$$\cos nx = \frac{(\cos x + i \cdot \sin x)^n + (\cos x - i \cdot \sin x)^n}{2}.$$

A kettő különbségéből:

$$\sin nx = \frac{(\cos x + i \cdot \sin x)^n - (\cos x - i \cdot \sin x)^n}{2i}$$

138. Legyen a 133. pontban az x végtelen kicsi és n végtelen nagy úgy, hogy nx véges legyen, amit jelöljünk u betűvel: $nx = u$. Vegyük még tekintetbe, hogy ha x végtelen kicsi, akkor cos x= 1 és sin x= x. Ekkor tehát:

és

$$\cos u = \frac{\left(1+i\frac{u}{n}\right)^n + \left(1-i\frac{u}{n}\right)^n}{2}$$

$$\sin u = \frac{\left(1+i\frac{u}{n}\right)^n - \left(1-i\frac{u}{n}\right)^n}{2i}.$$

Az előző fejezetben láttuk - írja EULER -, hogy ha *n* végtelen nagy, akkor

$$\left(1+i\frac{u}{n}\right)^n = e^{iu}.$$

Ezt figyelembe véve:

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$$

és

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}.$$

A 138. paragrafust Euler az ezekből nyert

$$e^{iu} = \cos u + i \cdot \sin u$$

$$e^{-iu} = \cos u - i \cdot \sin u$$

képletekkel fejezte be. Mi pedig gondoljunk vissza könyvünk 633. oldalára, ahol bevezettük a hiperbolikus függvényeket. Az ottani jelölésekkel Euler cos *u* és sin *u* képletei így írhatók át:

$\cos u = \operatorname{ch} iu$

és

$i * \sin u = \operatorname{sh} iu,$

amik megegyeznek a 633. oldalon közölt, magyarázat nélküli képletekkel.

A 133. pont $(\cos x + i * \sin x)^n = \cos nx + i * \sin nx$ képlete a híres Moivre-formula, amelyet Abraham de Moivre (1667-1754) angol matematikus már Euler előtt, 1707-ben publikált.

Az analízis mesteri összefoglalásán és fejlesztésén kívül érdeme még EULERnak a függvényfogalom további alakítása is. Ez az analízis kielégítő megalapozásának egyik alapfeltétele volt, éppen ezért erre is kell szentelnünk néhány sort.

A FÜGGVÉNYFOGALOM FEJLŐDÉSE

A függvényfogalom minden bizonnyal olyan absztrakció, amelynek eredete az emberek által már igen régen észrevett oksági viszonyban gyökerezik. Ennek a mind tudatosabbá váló ok-okozati viszonynak már a korai matematikában jelentkeztek különböző megfogalmazásai. Lényegében ezt fejezik ki a számolást megkönnyítő egyiptomi és babiloni táblázatok is. Az ógörög matematikusok a mennyiségi törvényeket kutatva, a függvényfogalmat rejtő összefüggések tömegét fogalmazták meg, ilyenek voltak például a kúpszeletek szümptómái is (219. oldal). Ide számíthatjuk az ógörög és a középkori hindu és arab húrtáblázatokat. APOLLÓNIOSZ-nál már fellépett a koordinátageometriai szellemben való gondolkozás, sőt PTOLEMAIOSZ földrajzi szélessége és hosszúsága kimondottan koordináta-rendszer. Ezek az eredmények olyan fejlett függvényfogalom csírái, mint amilyeneket a középkori ORESME sebesség-idő-grafikonja rejt (462. oldal).

Végül is Descartes nagy matematikai tette volt a függvényfogalom első definíciója. Csodálatos lényeglátással a függvényt megfeleltetésnek definiálta, bár ő még csak az algebrai műveletekkel meghatározott függvényekkel foglalkozott. Descartes, és vele egy időben és ugyanolyan érdemekkel, Fermat megteremtette a változó mennyiségek matematikáját.

A függvényfogalom további alakítását Leibniz végezte el, de az ő értelmezése szűkebb DESCARTES-énál. Ő használta először 1692-ben a függvény, illetve a latin functio szót (eljárás, végrehajtás) valamely görbének egy pontjához tartozó olyan szakaszra, amely változik, ha a pont végigfut a görbén (ordináta, abszcissza, szubtangens stb.). Ekkor vezette be a paraméter, az állandó, a változó és más kifejezéseket is. A XVII. század végén, a XVIII. század elején terjedt el, hogy függvénynek tekintették azt az analitikus kifejezést, amely kifejezte a változók és állandók közötti kapcsolatot. Ilyen értelemben használta a függvény szót a két Bernoulli testvér, és ezt a fogalmat Johann Bernoulli zárójel nélkül φx-szel jelölte. Ezt az értelmezést vette át Euler is, aki a φ betű helyett az f-et kezdte használni, és megengedte a komplex

változókat is. Euler szerint tehát függvényen értjük a változók és a konstansok közötti kapcsolatot leíró kifejezést, ha az analitikus műveleteket (négy alapművelet, hatványozás, gyökvonás, sorbafejtés, differenciálás, integrálás) tartalmaz. Ez még mindig a függvényeknek csak azt az osztályát ölelte át, amelyeket teljes értelmezési tartományukban már meghatároz grafikonjaik bármilyen kicsiny darabja. Ezenkívül azonban Euler foglalkozott az c^x, a ln x és a trigonometrikus függvényekkel is, és elvégezte az általa tanulmányozott függvényeknek a függvényt leíró egyenletben előforduló műveletek szerinti osztályozását. Euler kezdetben azt hitte, hogy minden függvény hatványsorba, azaz

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ \dots$$

alakba fejthető.

Euler azonban a differenciálegyenletek vizsgálatánál olyan függvényekre bukkant, amelyeket megadhatott tetszőleges alakú grafikon is. Ezekről azt gondolta, hogy nem analitikus függvények, azaz nem fejthetők hatványsorba. Maga a hatványsorok elmélete is hiányos volt. A konvergenciafeltételek tisztázatlansága és a sor összegének fogalmi kialakulatlansága miatt számos nyilvánvalóan téves eredmény született, aminek nem tudták magyarázatát adni. Nem tisztázódott ugyanis a konvergens és a divergens sorok közti különbség. Amely módszer az egyiknél jó eredményhez vezetett, érthetetlen módon a másiknál felmondta a szolgálatot.

Nemcsak a sorelmélet, hanem a függvényelmélet fejlődését is komolyan elősegítette a húrok rezgéseinek a vizsgálata, sőt e kutatások megvetették az elméleti fizika, vagy ha úgy tetszik, a fizikai matematika alapjait. A húrok rezgéseivel Püthagorasz óta számos fizikus és matematikus foglalkozott, köztük Galilei, Descartes és Huygens is. 1715-ben Brook Taylor angol matematikus, a londoni Royal Society titkára közölte a róla elnevezett hatványsort és a húrrezgés elméletét. Abból indult ki, hogy a rezgő húr valamelyik pontjának a gyorsulása arányos a ponthoz tartozó görbületi sugárral. Kis rezgésekre nyerte a

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

differenciálegyenletet. A mindkét végén rögzített húr esetén ennek megoldásául az $y = A \cdot \sin abt \cdot \sin bx$ egyenletet kapta az *A, a, b* konstansokkal. Ennek helyességéről kétszeri differenciálással meg is győződhetünk.

1747-ben d'Alembert (1717-1783) francia matematikus még általánosabb megoldásra talált, és ugyancsak általános megoldáshoz jutott 1750-ben Euler is. Ebben olyan függvények léptek fel, amelyek nem „folytonosak", hanem csak összefüggők. Euler a folytonos függvényeken még azokat értette, amelyek az egész értelmezési tartományukra érvényes egyetlen analitikus kifejezéssel megadhatók, összefüggő pedig bármely függvény, amelynek grafikonja egyetlen ceruzavonallal megrajzolható. Éppen a szabadon mozgó kézzel rajzolható, összefüggő vonallal kapcsolatban alakult ki az a vita, amely arra igyekezett válaszolni, hogy az ilyen, grafikonnal meghatározott függvény analitikus-e vagy nem. Már Euler és Daniel Bernoulli is a rezgő húr esetén adtak olyan megoldást, amelyben a keresett függvény trigonometrikus sorba fejthető. A kérdést csak 1807-ben oldotta meg

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), kiváló francia matematikus. Fourier főleg a fizikai matematikával foglalkozva ért el jelentős sikereket. Leghíresebb munkája, a *Théorie analitique de la chaleur* (A hő analitikai elmélete, 1822) 1807-ben és 1811-ben a párizsi Akadémián pályadíjat nyert. Ennek fizikatörténeti és egyben matematikai érdeme az, hogy a hővezetés elméletében fellépő parciális differenciálegyenletek megoldásában trigonometrikus sorokat használt. Bebizonyította nevezetesen azt, hogy minden 2π szerint periodikus egyváltozós valós függvény, ha integrálható a $[-\pi, +\pi]$ INTERVALLUMBAN, AKKOR AZ

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

alakú trigonometrikus sorba fejthető, ahol az ún. Fourier-

együtthatók:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859) német matematikus 1829-ben bebizonyította, hogy minden véges sok monoton és folytonos szakaszból álló görbe által definiált függvény előállítható trigonometrikus sorok összegeként, tehát az Euler-féle görbe, amelyet „a szabadon vezetett kéz ír le” - EULER állításával ellentétben -, szintén analitikus függvény. Ezek után már nem látszott célszerűnek a függvény fogalmát az analitikus előállíthatósághoz kötni. Éppen ezért DIRICHLET 1837-ben bevezette azt a függvénydefiníciót, amelyet lényegtelen finomítással ma is elfogadunk. E szerint, ha az *y* és x változók olyan viszonyban vannak, hogy x valamely számértékéhez bármilyen törvény hozzárendeli *y*-nak egy értékét, akkor azt mondjuk, hogy *y* az x független változó függvénye. A később kialakult halmazelméleti kifejezésekkel ma így fogalmazzuk meg e definíciót: ha egy *A* halmaz minden x eleméhez hozzárendeljük egy *B* halmaz valamelyik *y* elemét, akkor az *A* halmazon egyértékű függvénykapcsolatot létesítettünk. A Dirichlet-féle általános függvénydefinícióhoz eljutott előtte BOLYAI FARKAS is, aki az 1832-ben megjelent *Tentamenben* így ír: „Tágabb értelemben a függvény bármilyen operáció, amely az időben és térben elképzelhető.” Azt, hogy DIRICHLET mennyire elszakadt EULER „analitikai” függvényfogalmától, mutatja a német matematikusról elnevezett függvény, amelyet így határozott meg: Legyen *y* értéke $+$c, valahányszor x racionális és legyen $d \neq c$, ha x irracionális szám. DIRICHLET munkássága kiterjedt a számelmélet, az algebra, az elméleti fizika és az analízis területére. Először adta meg a Fourier-sorok konvergenciakritériumát. Bevezette a sorok feltételes összetartásának a fogalmát. Nagy hatást gyakorolt többek között RIEMANNra, Kronecker-re és DEDEKINDre.

Annak ellenére, hogy a sajátos körülmények folytán BOLZANO cseh matematikus munkái nem gyorsíthatták meg a függvényelmélet fejlődését, mégis kiemelten kell őt megemlítenünk, hiszen eszméi

megelőztek sok olyan kiváló matematikust, akik valóban előmozdították a függvények fogalmának további tisztázását.

Bernhard Bolzano (1781-1848) cseh matematikust, filozófust és teológust, a prágai egyetemen a vallástörténet professzorát 1819-ben állásából elmozdították, és minden nyilvános szerepléstől eltiltották. Sem szóban, sem írásban nem kaphatott nyilvánosságot, mert előadásaiban a cseh nemzeti önállóság eszméjét hirdette az osztrák elnyomással szemben. Így történt, hogy sok ideje maradt matematikai búvárkodásra, de eredményeit nem közölhette.

A XVIII. századi analízis csillogó sikereinek özönében elhalványult a matematikai szigor iránti igény. BOLZANO éppen ezt a szigort képviselte, azt, amelyet CAUCHY és WEIERSTRASS érvényesített, mit sem tudva BOLZANO eredményeiről. BOLZANÓnak az íróasztala számára írt műveiben nemcsak fejlett függvényelméleti megállapítások voltak, hanem olyan halmazelméleti és matematikai-logikai alapvetések is, amelyek megelőzték mások hasonló felfedezéseit. Az 1830-ban elkészült *Függvénytan* kéziratát például csak 1920-ban találták meg, és nyomtatásban 1930-ban látott napvilágot. Néhány fontos tételét csak felsorolásszerűen említem meg: CAUCHY előtt megfogalmazta a folytonosság szabatos meghatározását, bevezette az egyoldali folytonosság fogalmát, megállapította a folytonos függvények számos tulajdonságát. BOLZANO cáfolta meg AMPÉRE-nek azt az állítását, hogy minden folytonos függvénynek vagy mindenütt van differenciálhányadosa, vagy legfeljebb az értelmezési tartomány elszigetelt helyein nincsen. BOLZANO szerkesztett olyan, mindenütt folytonos függvényt, amelynek sehol sincs differenciálhányadosa. Amíg művei elő nem kerültek, az első ilyen függvényt WEIERSTRASS és DARBOUX nevéhez kapcsolták. BOLZANO „patologikus” függvényei közül idézzük azt, amely a [— 1; 1] intervallumon belül a — 1 és +1 közötti minden értéket felveszi, ugyanakkor minden pontja szakadási pont. Ez a következő:

Legyen

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x=\dfrac{2m+1}{2^n} \\ -1, & \text{ha } x=0 \\ 0, & \text{ha } x=-1 \\ -x, & \text{ha } x \text{ az előbbi háromtól különbözik.} \end{cases}$$

A függvényelmélet voltaképpen BOLZANO és DIRICHLET eredményei alapján indult igazán fejlődésnek, és a XIX. században az előzmények biztos talaján CAUCHY és WEIERSTRASS a legnagyobb szabatossággal önthette szavakba a függvénytani tulajdonságokat és fogalmakat.

A valós függvénytan kialakulása után a komplex változós függvénytan is biztos alapokra talált a komplex számoknak Gauss által alkotott elmélete segítségével. A komplex változójú függvények elméletének megteremtésében Cauchy és Weierstrass mellett nagy szerepet kapott Riemann is, aki a geometriai függvénytan életre hívásával a komplex függvénytan új megalapozását tette lehetővé.

A függvényfogalom halmazelméleti definíciója nem teszi szükségessé, hogy a megfeleltetés számok halmazait kapcsolja össze. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei tetszőleges matematikai objektumok lehetnek. Az absztrakciónak ez a további fokozata a függvénytan új területeit hozta létre. Ha az értelmezési tartomány függvények halmaza és az értékkészlet számok halmaza, akkor az egymáshoz rendelést funkcionálnak nevezzük. Ha pedig az értelmezési tartomány és az értékkészlet is függvények halmaza, akkor a megfeleltetés neve operátor. A funkcionálokkal és az operátorokkal foglalkozó funkcionálanalízis különálló kutatási területnek Vito Volterra kiváló olasz matematikus óta számít. A funkcionálelmélet kibontakozásában kimagasló érdemei vannak a francia Maurice FRÉCHET-nek, a magyar Riesz FRIGYESnek és a német HILBERTnek. Hazánkban e terület kimagasló kutatója volt Haar Alfréd, és ugyancsak fontos eredmények birtokába jutott a magyar származású amerikai Neumann János (1903-1957), valamint Szőkefalvi Nagy Béla (1913—).

A valós függvénytan területén szerzett hírnevet a magyar Geöcze

Zoard (1873-1916) is. 1905-ben olyan görbét konstruált, amely minden pontjában folytonos, de egyetlen pontjában sem differenciálható, és amelynek ívhossza bármilyen kis intervallumban végtelen nagy. 1906-ban a felszínmérés elméletében kiválóan használható, kifogástalan felszíndefiníciót adott. Csak 1908-ban, Párizsban ismerte meg Lebesgue felszíndefinícióját. E két különböző definíció összehasonlítása, vizsgálata számos további eredmény kiindulópontjává lett. Geöcze életművének megismertetésében és továbbfejlesztésében nagy szerepet vállalt Radó Tibor (1895-1965), a budapesti születésű amerikai professzor, aki egyik megteremtője volt az analízis topológiai alapjainak. A valós függvénytanban ért el kiváló eredményeket Császár Ákos és Tandori Károly (1925-) is.

Az analízis kellő megalapozásában fontos szerep jutott a sorozatoknak és a soroknak. Indokolt tehát történetük rövid ismertetése".

A SORELMÉLET FEJLŐDÉSE

Az ókori egyiptomi, babiloni vagy görög matematikában és hasonlóképpen Kína, India és Európa középkorában sűrűn bukkannak fel olyan konkrét feladatok, amelyek bizonyos sorozatok (számtani, mértani, harmonikus sorozat, figurális számok, hatványszámok, Fibonacci-sorozat stb.) ismeretét kívánták meg. Az analízisben különösen a hatványsorok összegezésének a kérdése vált alapvetően fontossá.

Említettük, hogy Gregory a XVII. században, Newtont megelőzve a binomiális tételt már törtkitevő esetén is alkalmazta. Birtokában volt továbbá az arc tg x hatványsorának is. Tudva ugyanis, hogy az $y = 1/(1 + x^2)$ görbéje alatti terület a [0, x] intervallum felett éppen arc tg x, az $1 : (1 + x^2)$ osztásból kapta, hogy:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Ebből

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+\dots)\,dx,$$

azaz

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Ez a Gregory-sor, ami azonos az arc tg x Taylor-sorával. Taylor előtt 40 évvel!

Ugyancsak a XVII. században Nicolaus Mercator hasonló módon nyerte a ln (1 + x) Mercator-sorát. GREGORYtól tudta, hogy

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x).$$

Ha tehát integrálta az

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

egyenlőség mindkét oldalát, akkor kapta, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Megnőtt a hatványsorok jelentősége a differenciál- és integrálszámítás felfedezése után. Newton kezdte alkalmazni az integrálás elvégzésére azt a módszert, hogy az integrálandó függvényt hatványsorba fejtette, és e sort integrálta. A sorbafejtésre felhasználta a binomiális tételt, a racionális törtfüggvényeknél a GREGORYnál bemutatott osztási eljárást, sokszor alkalmazta a határozatlan együtthatók módszerét, új változó bevezetését vagy

alkalmas koordinátatranszformációt. Amint láttuk, eleinte Euler is azt hitte, hogy minden függvény hatványsorba fejthető, és így az integrálás sorbafejtéssel igen kényelmes számolási eljárásnak látszott. Taylor a Newton-féle interpolációs képletet általánosítva fedezte fel a Taylor-sort. Ennek egyik speciális alakját később, de TAYLORtól eltérő módon előállította Maclaurin is.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) francia matematikusnak 1797-ben jelent meg a Politechnikai Főiskolán tartott előadásait összefoglaló *Théorie des fonctions analytiques* (Az analitikus függvények elmélete) című könyve. Ez a hatásaiban jelentős mű a differenciálás algebrai módszereivel foglalkozott, célul tűzve ki a jobb logikai megalapozást. Módszerének alapgondolatát egyik példáján szemléltetjük: Mivel

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,$$

azért az n-edik differenciálhányados:

$$f^{(n)}(x)=n!+(n+1)(n)(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot 3\cdot 2\cdot x+\ldots$$

így *f(x)* n-edik derivált függvényének értéke az $x=0$ helyen: $f^{(n)}(0)=n!$. LAGRANGE bizonyította, hogy minden *f(x+h)* függvény majdnem mindenütt kifejezhető az

$$f(x+h)=f(x)+a_1h+a_2h^2+\ldots+a_nh^n+R_n$$

alakú Taylor-sorral, tisztán algebrai úton is. A differenciálhányadosokat pedig a Taylor-sor együtthatóiként értelmezte, és így elkerülte a végtelen kicsinyekkel való törődést, illetve a határérték fogalmát. Gondolatmenetének fő hibája, hogy csak az analitikus függvényekre érvényes, amint ezt WEIERSTRASS észrevette. LAGRANGE először határozta meg a sor maradéktagjának (R_n) a képletét egyes konkrét függvényeknél, és először állította elő a Taylor-sor maradéktagját integrál alakban. Ugyancsak ő vezette be a róla elnevezett középértéktételt. Neki köszönhetjük a differenciálhányados-függvény számára a „derivált” kifejezést, és a

magasabb rendű differenciálhányados-függvények *f'(x),f''(x), ,.., f*$^{(n)}$ *(x)* jelöléseit.

A XVIII. században, különösen a második felében az analízissel foglalkozók már nagyon tudatosan törekedtek a konvergenciafogalom szabatos meghatározására, a konvergenciafeltételek felfedezésére, a végtelen sorok összegének helyes értelmezésére. E törekvéseket a XIX. század elején koronázta siker, amikor Cauchy ilyen irányú munkásságával a sorelméletben szinte új korszak kezdődött. Egy végtelen sor összegének a részletösszegek sorozatának határértékét tekintette, és így kimondhatta, hogy egy sor akkor konvergens, ha ez a határérték létezik. Nagy hangsúlyt helyezett a maradéktag vizsgálatára. A jelváltó tagú sorok esetére bevezette az abszolút konvergencia fogalmát, és így összefüggést teremthetett a tagok abszolút értékeiből alkotott sor konvergenciája és az alapsor konvergenciája között. Számtalan konvergenciavizsgálatot végzett, több konvergenciafeltételt fogalmazott meg, általában a konvergenciakritériumok kutatását megbízható módon tisztázta. A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium: Az

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sor akkor és csak akkor konvergens, ha egy tetszőleges pozitív ε számhoz található olyan ε-tól függő *N* küszöbindex, hogy valahányszor $n>N$, a sor két részletösszegének különbségére igaz, hogy:

$$|s_{n+p}-s_n|=\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k-\sum_{k=1}^{n} a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\ddot{\,}} a_k\right|<\varepsilon.$$

Cauchy bevezette a komplex változójú hatványsoroknál a konvergenciakor fogalmát. Ha ugyanis a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor nem minden x értékre konvergens és nem minden 0-tól különböző x értékre divergens, akkor létezik pontosan egy *r* szám úgy, hogy az $|x|< r$ változókra nézve a sor konvergens, az $|x|>r$

változókra nézve pedig divergens. Az $|x| = r$ értékre nézve általánosságban semmit sem mondhatunk. Ezt az *r* számot nevezzük a konvergenciakor sugarának, amely kiszámítható az

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Cauchy-Hadamard-féle formulával. (Jacques Hadamard francia matematikus, 1865-1963). Cauchy azt is megállapította, hogy egy függvény hatványsorának konvergenciája nem feltétlenül azt jelenti, hogy a sor az alapfüggvényhez tart. Ugyancsak ő vette észre, hogy ha két sor abszolút konvergens, akkor szorzatuk (a megfelelő tagok szorzataiból alkotott sor) is az, és a szorzatsor határértéke az alapsorok határértékeinek a szorzata.

A sorok további fejlődésére csak a történetükben kiemelkedő szerepet játszó matematikusok felsorolásával utalunk. Dirichlet, Jordan, Abel, Fourier, Csebisev, Olivier, Stores, Seidel, Weierstrass, Hölder, Cesaro, Fejér, Riesz, Fischer, Kolmogorov, Carlson, Haar, Rademacher, Menysov és mások kiterjesztették vizsgálataikat a hatványsorokról általános függvénysorokra.

Különös függvényelméleti fontossága miatt külön is említem WEIERSTRASSnak azt az 1885-ben bizonyított tételét, amely kimondja, hogy minden, az [a, *b*] intervallumban folytonos *f*(x) függvény az analízis módszerével előállítható olyan, az [a, b]-ben egyenletesen konvergens végtelen sorral, amelynek tagjai polinomok.

Magyar vonatkozása miatt e tárgykörből befejezésként kiemelem a Riesz-Fischer-tételt, amely kimondja, hogy a négyzetesen integrálható függvények terében értelmezett konvergencia esetén is érvényes a Cauchy-féle konvergenciafeltétel. E tételt 1907-ben egymástól függetlenül bizonyította a magyar Riesz Frigyes és a német Ernst Fischer (1875-1956). Külön említjük a Haar Alfréd kolozsvári, majd szegedi professzor 1909-es doktori értekezésében tárgyalt Haar-féle ortogonális függvényrendszert,

amelynek többek között szerepe van a Fourier-sorok elméletében. Idézem végül Fejér Lipót (1880-1959) 1900-ban közölt tételét, amely szerint:

Ha az *f(x)* a *2*π szerint periodikus integrálható függvény és létezik határértéke az x_0 pontban, akkor a Fourier-sora ott összegezhető a részletösszegek számtani középével. Ha pedig a 2π szerint periodikus és integrálható *f(x)* függvény az *[a, b*] zárt intervallumban folytonos, akkor Fourier-sora részletösszegeinek számtani közepei egyenletesen konvergálnak az *f(x)* függvényhez. A Fejér-tétel a Fourier-sorok elméletében és általában az ortogonális függvénysorok elméletében számos új kutatás kiindulópontjává lett.

A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS FOGALMÁNAK FEJLŐDÉSE EULER UTÁN

NEWTON és LEIBNIZ az alapfogalmak fejletlensége miatt nem tudtak a differenciálkalkulus számára megnyugtató magyarázatot találni. Ez közvetlen követőiknek sem sikerült. Kezdetben az eljárást csak az ellenőrizhetően helyes eredmények tömege igazolta. A XVIII. század közepén említést érdemelnek EULER erőfeszítései. Ő alapfogalomnak tette magát a differenciálhányadost, amely arra szolgál, hogy a változók igen kis növekményeinek, a differenciáloknak a hányadosát jellemezze. Ugyanakkor a differenciálok tényleges értékét 0-nak tekintette. A differenciálhányados tehát 0/0 alakú hányados, és értéke egy kiválasztott x_0 helyen az a szám, amelyhez ott a Δy/Δx hányados tart. A ténylegesen 0-nak tekintett differenciálok és a 0-hoz közeledő Δ*x-ek* és Δ*y-ok* ellentmondása azonban nyilvánvaló.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), az életét elhagyott gyermekként kezdő, kiváló francia matematikus NEWTON első és utolsó arányok elméletét fejlesztette tovább azzal, hogy definiálta a határérték fogalmát. Amit NEWTON úgy fejezett ki, hogy a - mai jelölésekkel - Δy/Δx első arányok a dy/dx utolsó aránnyá változnak, azt D'ALEMBERT úgy fejezte ki, hogy a véges differenciálok Δy/Δx hányadosának a határértéke a differenciálhányados. Ezt kiegészítette az eljárás leírásával. E szerint a differenciálhányados meghatározása a következő lépésekben történik: Az *y=f(x)*

függvény x változóját növeljük a véges Δx mennyiséggel, amikor is y szintén változik a

véges Δy értékkel. Ezután a $\Delta y/\Delta x$ hányadost egyszerűsítjük, és végül

az egyszerűsített alakban x helyére 0-t írunk.

A határértéket így definiálta: Egy *A* mennyiség a változó *B* mennyiség határértéke, ha *B* bármilyen közeljuthat A-hoz, de *A-t* sohasem érheti el. A d'Alembert-féle meghatározás hiányossága, hogy a határértékhez közeledő *B* monoton módon egy irányban változik, tehát az így megfogalmazott határérték egyoldali. A differenciálhányados értelmezésében rejlő bizonytalanságokat sem oldja fel az eljárás leírása, mert bár magát az eredményt egyértelművé teszi, de a határérték kiszámításának puszta leírása nem adja meg annak a magyarázatát. Mégis egy valahogyan értelmezett határérték felvetése sok gondolatot indított el. Amikor Lagrange 1784-ben a berlini Tudományos Akadémia elnökeként pályázatot hirdetett, éppen a végtelen kicsiny és végtelen nagy mennyiségekkel való számolás szabatos törvényeinek a lefektetésére, akkor a pályázatot Simon L'Huillier genfi professzor nyerte meg, aki elsőként definiálta a dy/dx differenciálhányadost az általa bevezetett

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

szimbólummal, az *Exposition Élémentaire des principes des calculs supérieurs* (A magasabb kalkulusok alapelveinek elemi kifejtése) című, 1786-ban megjelent művében. A határérték-elmélet még akkor sem aratott sikert, mert a d'Alembert-féle megfogalmazás hiányos volt, és nem volt kidolgozva a határértékkel való számolás technikája.

Ezután - amint azt a 704. oldalon láttuk - Lagrange a differenciálhányadosokat a Taylor-sor együtthatóiként értelmezte. Gondolatmenetében azonban a Taylor-sorban szereplő változók hatványkitevőit csak a természetes számokra korlátozta, ezért eljárása csak az analitikus függvényekre érvényes.

1797-ben jelent meg Sylvestre Francois Lacroix francia

matematikusnak, a Politechnikai Főiskola tanárának *Traité du calcul différentiel et du calcul integral* (A differenciál- és az integrálkalkulus tárgyalása) című, nagy hatású összefoglaló műve. Ennek rövidített változata jelent meg 1802-ben, amelyben Lacroix már elutasította a Lagrange-féle meghatározást, és a differenciálhányados fogalmát ismét a határérték fogalmára igyekezett építeni. Fia ez nem is volt tökéletes, mégis nagy érdeme a gondolat népszerűsítése.

A differenciálkalkulus e hosszú fejlődési szakaszában még a legnagyobbaknak sem sikerült teljesen szabatos definíciót adni. Ennek fő oka az, hogy nem tudtak elszakadni a geometriai szemlélettől. Ez érthető, hiszen abban az időben még maga az aritmetika és az algebra is erősen kötődött a geometriai fogalmakhoz. A karakterisztikus háromszögből leolvasott differenciálhányados tagadhatatlanul geometriai eredetű. Bár Euler és Lagrange már igyekeztek megszabadulni a geometriai vonatkozásoktól, de a határérték eszméjét ők is elutasították. Még Lacroix könyveiben sem nehéz megtalálni a geometriai „szennyeződést”.

A határérték először CAUCHY műveiben fordul át geometriaiból teljesen aritmetikai fogalommá, lehetővé téve a formalizáció megszigorítását. A matematikai szigor a differenciálszámítás terén különösen példamutató az 1821-ben megjelent *Cours d’analyse* (Analíziskurzus), az 1823-as *Résume des lecons sur le calcul infinitesimal* (Az infinitezimális számítás előadásainak kivonata) és az 1829-ben kiadott *Lecons sur le calcul différentiel* (Előadások a differenciálszámításról) könyveiben. A határértéket így definiálta: Ha egy változó egymást követő értékei megközelítenek egy fix értéket úgy, hogy végül is attól csak tetszőlegesen kicsiny mennyiségben különböznek, akkor azt mondjuk, hogy a fix érték a változó értéksorozatának a határértéke. A differenciálhányados Cauchy-féle definíciója: Az $y=f(x)$ függvény x változójához adjunk egy $x=i$ növekményt, és képezzük a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

hányadost. Ennek a hányadosnak a határértékét (ha létezik) abban az esetben, ha i a 0-hoz tart, jelöljük f(x)-szel, és nevezzük az y x-re vonatkozó deriváltjának. CAUCHY előbb definiálta a differenciálhányadost, és ennek segítségével a differenciált, tehát

éppen fordítva, mint LEIBNIZ. CAUCHY szerint: Ha dx véges konstans, akkor az *y=f(x)* függvény *dy* differenciálja az *f'(x)*dx. A definíciókból látható, hogy CAUCHY a függvény, a szám, a változó és a határérték fogalmakat használja, tehát távol tartja akár a geometriai, akár a mechanikai fogalmakat.

Carl Weierstrass (1815-1897) német matematikus azonban CAUCHY definícióival sem elégedett meg. Észrevette a circulus vitiosust abban, hogy CAUCHY egyenlő hangsúllyal alkalmazta a szám és a határérték fogalmakat, márpedig abban az időben az irracionális számot határértékkel, például az alsó közelítő értékeiből álló sorozat határértékével definiálták. WEIERSTRASS tehát először is az irracionális szám olyan meghatározására törekedett, amely nélkülözi a határérték fogalmát. Miután ezt elérte, sikerült 1869-ben CAUCHY definícióit olyanokkal helyettesítenie, amelyek már tisztán aritmetikai alapokon nyugosznak. Ezen ismert definíciók közül példaként idézek egyet: az $x=x_0$ helyen az *f*(x) függvény határértéke az *L* szám, ha bármely adott pozitív ε számhoz találhatunk olyan pozitív δ számot, hogy valahányszor $|x—x_0|<\delta$, teljesül az $|L—f(x)|<\varepsilon$ egyenlőtlenség. A határértéknek ez a meghatározása lehetővé tette a differenciál- és az integrálszámításnak a legszigorúbb logikai igényeket is kielégítő értelmezését. Azt, hogy mennyire időszerűvé vált e probléma felszámolása, mutatja, hogy 1872-ben egymástól függetlenül többen is észrevették CAUCHY hibáját, és ezért az irracionális számok olyan meghatározását adták, amely a határértéktől független. Ezt tette a francia CHARLES MÉRAY (1835-1911), a német Heinrich Eduard Heine (1821-1881), a szintén német Georg Cantor és Richard Dedekind (138. oldal).

WEIERSTRASS-szal végeg megszűnt a differenciálszámításban a végtelen kicsinyek fogalmának és a velük való számolásnak a problémája. Definícióiban csak matematikailag megfogható fogalmak szerepelnek, és az infinitezimális számítás elnevezés is valójában indokolatlanná vált.

Így látszott ez napjainkig. Még néhány évvel ezelőtt száműztek a matematikaoktatásból minden olyan gondolatmenetet, amelyet az eredmény megsejtésére használt Arkhimédész (183. és következő oldalak) és amelyet gátlástalanul alkalmazott Nicolaus Cusanus

(1401-1464), Kepler (523—525. oldalon), Pascal vagy L'Hospital, sőt nem tudta elkerülni Newton és Leibniz sem, bár az utóbbi kettő látta, hogy az infinitezimális mennyiségekkel való számolás logikai indoklása még hiányzik. Az ilyen gondolkozásra igen közismert példa a gömb térfogatának a meghatározása a következőképpen: Bontsuk fel a gömbfelszínt végtelen sok gömbháromszögre, és ezek csúcsait kössük össze a gömb középpontjával. Így a gömböt felbontottuk háromszög alapú gúlákhoz hasonlító testekre, majdnem háromszög alapú gúlákra. Ha ezeket némi logikai nagyvonalúsággal, a térfogat számításának szempontjából, valódi háromszög alapú gúláknak tekintjük, akkor az ezekre érvényes eljárás szerint: a köbtartalom az alapterület és a magasság szorzatának a harmada. Az egyes gúlák térfogatösszege, vagyis a gömb térfogata, azonos a gömbfelszín és a gömbsugár szorzatának a harmadrészével. Ennek az eljárásnak megengedhetetlen az a mozzanata, amelynél a gömbháromszögecskéket egyszer a gömbfelszín részének, másszor pedig síkidomnak tekintjük. Az eredmény azonban vitathatatlanul jó. Ez az oka annak, hogy bár a klasszikus matematika kirekesztette birodalmából az infinitezimális mennyiségeket - amelyek pozitívak ugyan, de minden pozitív számnál kisebbek -, ennek ellenére a műszaki számításokban a technikusok és a mérnökök nem hagytak fel a végtelen kicsinyekkel való számolással, már csak azért sem, mert ez a számolási mód lefordítható a számítógépek nyelvére.

A XIX. század matematikusai az analízist az egész számokra vonatkozó axiómákra alapozták. Toralf Skolem (1887-1963) norvég matematikus fedezte fel, hogy a természetes számokra vonatkozó axiómáknak vannak nemszabványos (nonstandard) modelljei, amelyek a szabványos (standard) aritmetikában elő nem forduló és azoktól eltérő tulajdonságú objektumokat tartalmaznak. Abraham Robinson (1918-1974), németországi születésű amerikai matematikus arra gondolt, hogy a formális logika szerint jogosult nonstandard aritmetika alapja lehet a standard analízistől eltérő, az infinitezimális mennyiségeket használó nonstandard analízisnek.

A logikai nehézségeket sikerült elhárítania az Anatolij Malcev szovjet matematikus által bizonyított és Leon Henkin amerikai matematikus által tökéletesített ún. kompaktsági tétellel.

(A tétel szerint, ha létezik valamilyen formális nyelven írott mondatok egy serege, amelynek minden véges részhalmaza igaz a standard univerzumban, akkor létezik olyan nemstandard univerzum, amelyben a mondatok egész serege egyszerre igaz.) Gondolatmenetének végső eredménye: Ha az *F* formális nyelv leírja a standard univerzumot, amelyben ott vannak a klasszikus matematika valós számai, akkor az *F* nyelv azon állításai, amelyek igazak a standard univerzumban igazak a nemstandard univerzumban is. Ez utóbbi azonban még más matematikai objektumokat is tartalmaz, például az infinitezimális mennyiségeket. Ezek az objektumok formálisan úgy viselkednek, mint a standard objektumok, de az utóbbiaktól bizonyos lényeges tulajdonságokban különböznek, és ezek a tulajdonságok nem formalizálhatok az *F* nyelvben.

A Robinson által megteremtett nemstandard analízis logikailag is elfogadhatóvá tette az infinitezimális módszereket, és ezzel nemcsak a matematikának keletkezett egy új ága, hanem a gyakorlat számára is fontos új számítási eljárás nyert polgárjogot a matematikában.

AZ INTEGRÁL FOGALMÁNAK FEJLŐDÉSE LEIBNIZ ÉS NEWTON UTÁN

Newton és Leibniz is észrevette, hogy a határozatlan integrál segítségével, vagyis a differenciálszámítás inverz feladatával megoldhatók a határozottintegrál-számítási feladatok. Ezt foglalja össze a Newton-Leibniz-szabály. A Bernoulliak és Euler munkáiban kialakult az a szemlélet, hogy az integrálszámítás olyan eljárás, amellyel a változó mennyiségek differenciáljai közötti összefüggésekből meghatározható az a függvény, amely kifejezi e változók kapcsolatát. Ebben a felfogásban az Euler korában már hatalmassá terebélyesedő anyagból még nem vált külön sem a differenciálegyenletek elmélete, sem a variációszámítás. A fő cél mindig a primitív függvény keresése volt, tehát a hangsúly a határozatlanintegrál-feladatok kiszámítási technikájának a fejlesztésére esett. Ezt aránylag igen gyorsan sikerült is megteremteni. EULERnek a már idézett *Institutiones calculi integralis* (Az integrálszámítás alapfogalmai) című művében az integrálszámítás

technikai apparátusa lényegében már alig maradt a mai fejlettség mögött. Euler a határozatlan integrált teljes integrálnak nevezte, és mellette megkülönböztette a rögzített állandójú partikuláris integrált, amely speciális esetben olyan értéket szolgáltatott, mint a határozott integrál.

A gyakorlat, az alkalmazás azonban már korán szétválasztotta a határozott és a határozatlan integrált a mai értelemben. A határozott integrál elnevezést 1779-ben vezette be Pierre Simon Laplace (1749-1827), „Franciaország Newtona”. Az *f(x)* dx jelölés pedig FOURIER-től származik 1820 tájáról. Clairaut 1743-ban elsőként mutatta be a görbe menti kétváltozós integrált. Euler 1770-ben bevezette a kettős integrálokat, és Lagrange 1775-ben a hármas integrálokat. Euler, Laplace, Legendre, Gauss, Abel, Jacobi, Liouville, Bessel, Lamé és mások keze nyomán sok, az analízis fejlődésére kiható, különleges integrál született. A határozatlan-integrálszámítás alapvető kérdéseit a XVIII. században már megválaszolták.

A határozott integrál fogalma elsődlegesen LEIBNIZnél jelentkezett végtelen sok, végtelen kicsiny differenciál összegeként. Ezt fogalmazta meg szabatosabban Cauchy, majd Riemann. Riemann az 1854-es doktori értekezésében így írt:

Mit értünk az $_a\int^b f(x)$ dx-en? Azért, hogy erre feleljünk, vegyük fel az a és b egymás utáni mennyiségek között az $x_1, x_2, \ldots. x_{n-1}$ értékek sorozatát, és a rövidség kedvéért jelöljük $(x_1—a)$-t δ_1-gyel,

$(x_2—x_1)$-et δ_2-vel, ...$(b—x_{n-1})$-et δ_n-nel, és ε-nal egy pozitív valódi törtet. Ekkor az

$$S=\delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3)+\ldots+$$
$$+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

összeg értéke függ a δ intervallum és az ε megválasztásától. Ha ez olyan tulajdonságú hogy bármilyen δ és ε megválasztásnál végtelenül közelít egy meghatározott *A* értékhez, miközben az összes *d* végtelen kicsinnyé válik, δ akkor ez az érték az

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Azt már Cauchy belátta, hogy az így definiált határozott integrál létezik minden [a,b] intervallumon folytonos függvénynél. Riemann azonban igazolta, hogy olyan $f(x)$ függvénynek is létezik ez a róla elnevezett integrálja, amely az $[a, b]$ intervallumon korlátos és majdnem mindenütt folytonos. Ez nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétel is. A „majdnem mindenütt” kifejezés azt jelenti, hogy az f(x) függvény legfeljebb az [a, b] intervallum pontjainak nulla mértékű halmazán nem folytonos. Egy ponthalmazt akkor mondunk nulla mértékűnek, ha le lehet fedni intervallumokkal úgy, hogy ezek hosszúságainak összege kisebb, mint egy bármilyen adott pozitív ε szám.

Célszerű lesz, ha most megismerkedünk egy ponthalmaz mértékének a fogalmával, hogy a Riemann-integrál további általánosításáról beszélhessünk. Képzeljük el az egyazon egyenesre illeszkedő E ponthalmazt. Legyen továbbá egy intervallumokból (szakaszokból) álló I intervallumhalmaz. Ez utóbbinak valahány, de véges számú intervallumával fedjük le az E halmaz pontjait, és képezzük a beborító intervallumok összegét. A kívánt lefedést és az erre használt intervallumok összegzését végezzük el minden lehetséges módon, és válasszuk ki a kapott intervallumösszegek közül a legkisebbet. Ezt nevezzük az E halmaz mértékének. Belátható, hogy egy szakasz (intervallum) összes pontjainak a lefedéséhez szükséges intervallumösszeg nem lehet kisebb, mint a lefedett szakasz hossza. A ponthalmazok mértékének ez a definíciója, amely kiterjeszthető más halmazokra is, Carl Gustav Harnack (1851-1888) és Otto Stolz (1842-1905) német matematikusok nevéhez fűződik. Ezt finomította Camille Jordan francia és Giuseppe Peano olasz matematikus úgy, hogy a mérhető halmazok mértéke additív legyen, azaz ha a H_1 halmaz mértéke: $m(H_1)$ és a H_2 halmaz mértéke: $m(H_2)$, valamint a két halmaznak nincs közös pontja, akkor a két halmaz egyesítésének mértéke a két eredeti halmaz mértékének az összege, azaz

$$m(H_1 \cup H_2) = m(H_1) + m(H_2).$$

E mértékfogalmat használta fel a határozott integrál általánosítására

Henri Louis Lebesgue (1875-1941) francia matematikus. Az 1902-es doktori értekezésében általánosította a Jordan-Peano-mértéket azzal, hogy megengedett végtelen sok intervallummal való lefedéseket is. Ezt a Lebesgue-mértéket alkalmazta az általa definiált határozott integrálnál. Ő nem az abszcisszatengely egy intervallumát osztotta fel, hanem ezen intervallumoknak megfelelő függvényértékekből, ordinátákból indult ki. Legyen az $a \leq x \leq b$ intervallum két szélén az *f(x)* függvény értéke *f(a)* és *f(b)*. A közöttük elhelyezkedő függvényértékek:

$f(a)=y_0<y<y_2<y_3< \dots < y_{n-1}<y_n=f(b).$

Tekintsük azon x-ek X_k halmazát, amelyekre nézve igaz, hogy $a \leq x \leq b$ *és* $y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k$, ahol k=1,2,3, ... Ha az X_k halmaznak létezik az $m(X_k)$ Lebesgue-mértéke és ha a

$$\sum_{k=1}^{n} y_k m(X_k)$$

összeg egy meghatározott véges *L* értékhez tart, mialatt $|y_k — y_{k-1}|$ maximuma tart a 0-hoz, akkor ezt az L határértéket az *f(x)* függvény Lebesgue-integráljának nevezzük. Tehát:

$$L = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(X_k).$$

Mivel folytonos függvény esetén az X_k ponthalmaz az x-tengely egy intervalluma, azért ekkor a Lebesgue-integrál azonos a Riemann-integrállal. Léteznek olyan nem folytonos függvények, amelyeknek van Lebesgue-integrálja, de Riemann-integrálja nincs. LEBESGUE egy 1926-os koppenhágai előadásában a következő hasonlattal világította meg a kétféle integrál különbségét:

Riemann módszere olyan, mint azé a kereskedőé, aki a pénzét olyan

sorrendben számlálja meg, amint éppen egy-egy érme a kezébe akad. Lebesgue eljárása pedig olyan, mint azé a kereskedőé, aki ugyanezt a pénzt a számlálás előtt csoportosítja a következőképpen:

Van $m(X_1)$ darab 1 koronásom, az összesen $m(X_1)$ korona.

Van $m(X_2)$ darab 2 koronásom, az összesen $2m(X_2)$ korona.

Van $m(X_3)$ darab 5 koronásom, az összesen $5m(X_3)$ korona.

Az összes pénzem: $S = m(X_1) + 2m(X_2) + 5m(X_3) + \ldots$

E két eljárás bizonyára ugyanazt az eredményt adja mind a két kereskedőnél, hiszen véges számú pénzérmét számláltak össze. Ha azonban, mint az integrálnál, végtelen sok és végtelen kicsi mennyiségeket adunk össze, akkor a kétféle művelet eredménye már különbözhet.

Mivel Lebesgue nem az x-tengely (b—a) intervallumának n részre osztásából, hanem e felosztásnak megfelelő függvényértékek különbségéből indult ki, azért a Lebesgue-integrálnál végtelen sok $f(x_k)-f(x_{k-1})$ intervallum léphet fel, hiszen az (a, b) intervallumon lehet, hogy az integrálandó függvény nem korlátos.

Megtörtént azonban a Riemann-integrálnak egy más irányú általánosítása is.

THOMAS JAN STIELTJES (1856-1894) HOLLAND MATEMATIKUS 1894-BEN A

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Riemann-féle összegben az $(x_k$—$x_{k-1})$ különbséget úgy fogta fel, mint az $y = x$ függvény változását, és arra gondolt, hogy a speciális $y = x$ függvény helyett egy általánosabb g(x) függvényt is szerepeltethet. Ilyen alapgondolattal a Stieltjes-integrál így értelmezhető: Legyen az $[a, b]$ intervallumon értelmezve az f(x) és a g(x) függvény. Osszuk fel az intervallumot n részre a következő n—1 osztóponttal:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$

Válasszunk ki mindegyik x_k—x_{k-1}, részintervallumon egy pontot, és képezzük az

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(\xi_k) - g(\xi_{k-1})]$$

összeget. Növeljük ezután az osztópontok számát úgy, hogy az x_k-x_{k-1} intervallumok közül a legnagyobb is 0-hoz tartson. Ha ebben az esetben az S összegnek van határértéke, az osztópontoknak és a ξ_k pontoknak a megválasztásától függetlenül, akkor ezt a határértéket az f(x) függvény g(x) függvényre vonatkozó Stieltjes-integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

Kézenfekvő, hogy ha g(x) = x, akkor a Stieltjes-integrál átmegy a Riemann-integrálba. A Stieltjes-integrált jogosan nevezhetnénk Kőnig-integrálnak is, mert Kőnig Gyula (1849-1913) magyar professzor előadásaiban ez a fajta integráláltalánosítás már Stieltjes közleménye előtt szerepelt, de Kőnig csak 1897-ben publikálta. A Stieltjes-integrál másik magyar vonatkozása az, hogy annak termékeny alkalmazhatóságára 1909-ben RIESZ FRIGYES hívta fel a matematikusok figyelmét.

A Stieltjes-integrállal azonban nem ért véget az integrálfogalom általánosítása. Sikerült absztrakt halmazokon is értelmezni a mérték fogalmát, és ennek segítségével ezekre is kiterjeszteni az integrálelméltet.

A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A XVIII. század gyors gazdasági és politikai fejlődését tükrözi az analízis tárgykörének gyors kiszélesedése és ágazatainak elkülönülése is. Az analízisnek, ezen belül az integrálszámításnak igen gyorsan jelentkező külön területe a differenciálegyenletek elmélete. Kialakulásának ösztönzői a fizikai és a technikai feladatok. Ezek közül a legelső, igen széles érdeklődést kiváltó törekvés volt a húrok és a légoszlopok rezgéseinek a matematikai leírása. Néhány természeti jelenségnek differenciálegyenletekkel való sikeres jellemzése a XVIII. században sokakban kialakította azt a meggyőződést, hogy a természeti törvények zömének szabatos leírására a differenciálegyenletek szolgáltatják a legeredményesebb matematikai eszközt.

A differenciálegyenletek olyan egyenletek, amelyek kapcsolatot teremtenek a keresendő függvények, azok differenciálhányadosfüggvényei és azok változói, valamint konstans mennyiségek között. Megoldásuk valójában az integrálszámítás általánosítása, hiszen legegyszerűbb alakjukban a differenciálhányados-függvény ismeretében kell keresnünk a primitív függvényt.

A differenciálegyenletek kezdetben egymástól független feladatok áttekinthetetlen sokaságát alkották, közös megoldási módszer és típusaik elkülönítése, azaz osztályozásuk nélkül. Az áttekinthetőség kedvéért mi az utóbbival kezdjük:

A közönséges differenciálegyenletekben csak egyetlen független változó szerepel, például: $y' = x^2 — 3$, vagy $y'' — 3y' + y = 5$.

Az egynél több független változót tartalmazó differenciálegyenletet parciális differenciálegyenetnek nevezzük. Ilyenek:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x = 0.$$

A differenciálegyenletekben előforduló legmagasabb rendű

differenciálhányados-függvény adja az egyenlet rendjét, például az

$y''+y'+y=5$ másodrendű, a $\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=3$ elsőrendű differenciálegyenlet.

A közönséges differenciálegyenlet lineáris, ha a keresendő függvényt, illetve annak deriváltját tartalmazza, de az elsőnél nem magasabb fokon; különben nemlineáris.

Ha a közönséges differenciálegyenletben nincs állandó tag vagy olyan tag, amelyben csupán a független változó szerepel, akkor homogén, különben inhomogén. Például: $y''+2y'+3y=0$ homogén és $y'+3y^2=e^x$ inhomogén differenciálegyenlet.

A közönséges differenciálegyenletek elméletének első munkása Johann Bernoulli (1667-1748) és Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) itáliai matematikus volt.

JOHANN BERNOULLI 1697-BEN MEGOLDOTTA AZ

$y'+P(x)y=Q(x)y^n$

elsőrendű, nemlineáris, homogén, függvényegyütthatós differenciálegyenletet, amelyet Jacob Bernoulli (1654-1705) tűzött ki megoldásra 1695-ben (690. oldal). Johann Bernoulli először új v(x) függvényt vezetett be úgy, hogy $y^{1-n}=v(x)$, amikor is $(1—n)y^{-n}y'=v'(x)$. Osszuk végig a megoldandó egyenletet y”-nel, és a létrejött

$y'y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

egyenletbe helyettesítsük be a v(x) függvényt! Ekkor a tört eltávolítása után nyerjük a

$v'(x)+(1-n)P(x)v(x)=(1-n)Q(x)$

differenciálegyenletet, amely a v(x)-re nézve már lineáris.

Ezt természetesen akkor érdemes megcsinálni, ha már ismerjük a lineáris differenciálegyenlet megoldását. A homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakjai $y'+P(x)y=0$. Ennek a

változók szétválasztásával történő megoldását már LEIBNIZ ismerte. Az egyenlet átrendezve:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P(x)y \quad \text{vagy} \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x.$$

Itt már az egyik oldalon csak a függő, a másikon pedig csak a független változó szerepel. Mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz

$$\ln y = -\int P(x)\,\mathrm{d}x + c,$$

ahol c tetszőleges állandó. Átrendezve:

$$\ln y - c = -\int P(x)$$

vagy

$$\ln y - \ln C = \ln \frac{y}{C} = -\int P(x)\,\mathrm{d}x,$$

ahol $\mathrm{c} = \ln C$. A megoldás tehát:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}.$$

LAGRANGE pedig ebből az általános vagy partikuláris megoldásból (annyi konstans van benne, ahányad rendű a differenciálegyenlet, jelenleg egy) az állandó variálásának módszerével határozta meg az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldását. Azt a fogást

alkalmazta, hogy a *C* állandót x-től függő változónak tekintette, jelöljük tehát mi is C(x)-szel, és az így nyert

$$y_0=C(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}$$

egyenletben megkereste, hogy melyik az a C(x) függvény, amelynél az y_0 az $y'+P(x)y=Q(x)$ egyenlet megoldása.

Mivel

$$y_0'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}+C(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}\cdot[-P(x)],$$

azért ezt az inhomogén egyenletben az y' helyébe írva kapjuk, hogy Ebből

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}-P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}+$$
$$+P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x).$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x),\quad \text{azaz}\quad C'(x)=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}.$$

Most mindkét oldalt integrálva:

$$C(x)=\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Így az inhomogén lineáris differenciálegyenletünk megoldása:

$$y_0=e^{-\int P(x)\,dx}\cdot\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Ebben a differenciálegyenletek körébe tartozó kis kóstolóban láthattunk néhány olyan módszert, amellyel a Bernoulli-féle nemlineáris differenciálegyenlet megoldható. A differenciálegyenletek rendszeres elmélete azonban még váratott

magára. Ugyancsak JOHANN BERNOULLI alkalmazta először az integráló tényezővel való szorzás módszerét 1692 körül. [Az integráló tényező olyan $m(x,y)$ függvény, amellyel az egyenletet megszorozva, a bal oldal teljes differenciállá változik.] E módszer több esetben járt sikerrel, és az eredmények sokasodtával kiderült, hogy ez az eljárás a

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)dy = 0$$

alakú differenciálegyenletek megoldásának általános módszere. Ez az észrevétel már az ilyen típusú egyenletek elméletének megalapozását jelentette.

Nagy lökést adott 1724-ben a nemlineáris differenciálegyenletek elméletének a kialakulásához Riccati néhány tanulmánya. Az általa vizsgált

$$y' + ay^2 = bx^n$$

alakú egyenletet, amellyel Leibniz is, és Daniel Bernoulli is (1742) foglalkozott, d'Alembert óta Riccati-egyenletnek nevezzük.
Ezt általánosította 1738-ban Euler az

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

egyenletté, ahol az együtthatók folytonos függvények. Ez azonban magába foglalja a Bernoulli-féle egyenletet is, ha $R(x) = 0$, és a lineáris differenciálegyenletet is, ha $P(x) = 0$. Euler az 1730-as és az 1770-es évek között számos differenciálegyenletet oldott meg. Ezek között szerepeltek parciális (1735), és tetszőleges rendű lineáris differenciálegyenletek (1743). 1753-ban oldotta meg az $ay'' + by' + cy = d$ alakú egyenletet, amellyel kapcsolatban - Clairaut-val egy időben - dolgozta ki az integráló tényezővel való szorzás módszerét.

EULER SIKEREIHEZ JELENTŐSEN HOZZÁJÁRULT D'ALEMBERT SZÁMOS EREDMÉNYE. Ő LÁTTA MEG, HOGY AZ INHOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSA (AMELYBEN PONTOSAN ANNYI TETSZŐLEGES PARAMÉTER SZEREPEL, AHÁNYAD RENDŰ A KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET) ÖSSZETEHETŐ AZ EGYENLET VALAMELY PARTIKULÁRIS

MEGOLDÁSÁBÓL (AMELY LEGFELJEBB EGGYEL KEVESEBB TETSZŐLEGES PARAMÉTERT TARTALMAZ, MINT AHÁNYAD RENDŰ A DIFFERENCIÁLEGYENLET) ÉS A MEGFELELŐ HOMOGÉN EGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSÁBÓL. D'ALEMBERT IS OLDOTT MEG PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKET.

Érdekes és lényegét tekintve tisztázatlan megoldást adott 1715-ben Taylor a

$$4x^3-4x^2=(1+z^2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \qquad (1)$$

egyenletre. Alkalmazta az

$x=v/y^2$ és $v=1 + z^2$

helyettesítést, amikor

$$\frac{dx}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z^2}{y^2}\right)=\frac{2zy-2y'v}{y^3}.$$

Így az eredeti egyenlet $y^6/4v^2$-szerese:

$v—y^2=z^2y^2—2zyy'v+(y')^2v^2$.

Ebből

$y^2-2zyy'+(y')^2v=1$. (2)

Ezt z szerint differenciálva:

$2yy'-2yy' -2z(y')^2-2zyy'' +2y'y'' v+2z(y')^2=0$,

amiből

$y'' (vy'—yz)=0$.

Ez igaz, ha $vy'—yz=0$, azaz ha $y'= yz/b$.

Ha ezt behelyettesítjük a (2) egyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$y^2 = v,$

és így $x = 1$.

Ez a megoldás azért érdekes, mert kielégíti ugyan a differenciálegyenletet, de egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás (egyértelműség) követelményének, azaz bármely (x, y) pontjának tetszőleges környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, amely a kezdeti feltételeket is kielégíti. Az ilyen megoldásokat először Taylor nevezte szingulárisoknak, mert ezek az általános megoldásnak nem speciális esetei. Csak 1774-1776-ban fedezte fel Lagrange, hogy a szinguláris megoldásoknak mi a kapcsolata az általános megoldásokkal. Szintén ő vette észre, hogy a szinguláris megoldás geometriai képe a differenciálegyenlet integrálgörbéinek a burkológörbéje.

Az

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \ldots, y^{(n-1)}$

n-ed rendű közönséges differenciálegyenletnek, szemben a szinguláris megoldással, akkor van reguláris megoldása, ha csak egyetlen olyan függvény létezik, amely a differenciálegyenletet és a kezdeti feltételeket egyszerre kielégíti. Ennek a reguláris megoldásnak a létezésére Rudolph Lipschitz (1832-1903) német matematikus adta meg a róla elnevezett feltételt.

A XVIII. század elején a sok differenciálegyenlet megoldásával olyan tömegű anyag gyűlt össze, hogy már kialakulhatott az általános elmélet. Alapjainak lerakása és első kifejtése Euler *Institutiones calculi integralis* című, már említett 3 kötetes művében olvasható. A könyv valóban megfelelt, mégpedig kitűnően megfelelt kitűzött céljának. A közönséges és a parciális differenciálegyenletek összefoglalását és elméletét adta az akkori legújabb eredményekkel együtt.

A XVIII. század második felében és a XIX. század elején a differenciálegyenletek körén belül több kutatási irány alakult ki. A lineáris differenciálegyenletek és egyenletrendszerek tanulmányozása tovább folytatódott. E téren különös érdeklődést vívtak ki a rezgések jellemzésére alkalmas másodrendű

differenciálegyenletek. Ugyancsak fizikai, csillagászati, technikai alkalmazhatóságuk révén váltak fontossá a parciális differenciálegyenletek. Elméletük kialakítását még Euler kezdte meg 1770-ben. Megoldásukat Euler és d'Alembert igyekezett visszavezetni a közönséges differenciálegyenletek megoldására. Ilyen módszert dolgozott ki Pierre Simon Laplace és Lagrange is 1776-ban. A visszavezetés e módszereit általánosította Lagrange az 1780-as években, és Monge (1787), majd Carl Jacobi és Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) más egyenlettípusokra is alkalmassá tette.

A másodrendű parciális differenciálegyenletek között nevezetessé vált a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

a húrrezgés differenciálegyenlete. Először 1770-ben EULERnek sikerült az $u = x + at$ és $v = x - at$ helyettesítéssel a $\partial^2 y / (\partial u \partial v)$ ún. kanonikus alakra hoznia, és így megkapta az

$y = f(x + at) + \varphi(x - at)$

általános megoldást. Euler módszereivel Laplace adta meg a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + B \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C \frac{\partial z}{\partial x} + D \frac{\partial z}{\partial y} + Ez + F = 0$$

általános másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet megoldását (kaszkádmódszer).

A fizikai matematika számára kiemelkedően fontos volt a gravitációs és az elektromos erőterek potenciáljának megismerését lehetővé tevő differenciálegyenlet. Laplace 1787-ben bebizonyította, hogy egy erőtér *V* potenciálfüggvénye kielégíti a

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

differenciálegyenletet. Ezt alkalmazta Siméon-Denis Poisson (1781 — 1840) francia matematikus, és fogalmazta meg a nevét viselő $\Delta V = 4\rho\pi$ differenciálegyenletet. A teljes általánosságban kidolgozott potenciálelmélet George Green (1793-1841) angol matematikus és fizikus, valamint Gauss nevéhez kapcsolódik. Green 1828-ban fejtette ki elméletét az *Essay on the application of mathematical analysis to theories of electricity and magnetism* (Értekezés a matematikai analízisnek az elektromosság és a mágnesség elméletében való alkalmazásáról) című könyvében. Gauss hasonló tárgyú tanulmánya 1840-ben jelent meg. A potenciálelmélethez jelentős módon hozzájárult Mihail Vasziljevics Osztrogradszkij (1801-1862) és Alekszandr Mihajlovics Ljapunov (1857-1918) orosz matematikus is.

A Laplace-féle $\Delta V = 0$ differenciálegyenlet megoldásának, az ún. harmonikus függvénynek a tanulmányozása, amely a fizikában kiemelkedően sokféle alkalmazásra lelt, számos kiváló matematikust foglalkoztatott. Köztük megemlítjük Dirichlet, Hermank Amadeus Schwarz (1843-1921), Carl Gottfried Neumann (18321925) német, Erik Ivar Fredholm (1866-1927) svájci és Henri Poincaré francia matematikust. A matematikai fizikában hatalmas fejlődést hozott a XX. század, különösen az elektrotechnika igényeinek a kielégítésére.

A gőzgép feltalálása (1765) és elterjedése előtérbe hozta a hőeloszlás törvényeinek a kutatását. Fourier 1807-es és 1811 -es dolgozata, valamint az 1822-ben megjelent *Théorie analytique de la chaleur* (A hő analitikus elmélete) című könyve, mint már említettem, nagy hatással volt a sorelméletre is. Ebben a műben oldotta meg a

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dv}{dx}$$

differenciálegyenletet, amely arra az esetre vonatkozik, amelynél az *A* felületű, dx vastagságú lemezre merőlegesen beeső hőáram d*t* idő alatt, a lemezzel d*Q* hőmennyiséget közöl, ha az áthaladáskor bekövetkezett hőmérséklet-csökkenés dv.

A XVIII. század végén gyors fejlődésnek indultak és egymás után

léptek fel a kinematikai, majd a XIX. század közepétől a dinamikai differenciálegyenletek. Az itt előforduló legnagyobb nevek: Lagrange, Jacobi, Poisson, Osztrogradszkij és Nyikolaj Jegorovics Zsukovszkij (1847-1921).

Minőségi ugrást jelentett a differenciálegyenletek elméletében is Cauchy fellépte, aki bevezette azt, hogy első lépésként a differenciálegyenlet megoldásának a létezését kell kimutatni. Amíg a differenciálegyenletek főként a fizikai feladatokkal szoros kapcsolatban jelentkeztek, addig a megoldhatóság kézenfekvőnek látszott. Az absztrakció magasabb fokán azonban az egzisztenciabizonyítás és a megoldás egyértelműségének a belátása már elengedhetetlenné vált. Az egzisztenciatételek és bizonyítási módszereik kidolgozásában Cauchy után jelentős részt vállalt Lipschitz, Peano, Szofija Vasziuevna Kovalevszkaja (1850-1891) és Émile Picard (18561941). Az egzisztenciatételek egyik bizonyítási módja, a fokozatos közelítések módszere kiindulási alapja lett a differenciálegyenletek közelítő megoldásának.

Ugyancsak minőségi változást hozott Sophus Lie norvég matematikus, aki felfedezte, hogy minden differenciálegyenlethez hozzárendelhető egy folytonos transzformációcsoport, amellyel szemben az invariáns. Ezzel Lie összefüggést teremtett a csoportelmélet és a differenciálegyenletek elmélete között. Ez a kapcsolat különösen a fizikai matematikában vált gyümölcsözővé akkor, amikor Poincaré kimutatta, hogy a Lorentz-transzformációk csoportot alkotnak. Hendrik Anton Lorentz (1853-1928) holland fizikus 1904-ben rájött, hogy a róla elnevezett - bár elsőként Woldemar Voigt (1850-1919) által használt (1887) - transzformációkkal szemben nemcsak a mechanika, hanem az elektrodinamika egyenletei is invariánsak. Ezek a felfedezések összekapcsolták a differenciálegyenletek elméletét a transzformációcsoportokon át a fizikával is.

Poincaré munkássága nyomán teljesedett ki a differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálata, amelynek fő feladata, hogy az egyenlet megoldása nélkül mutassa ki a megoldás létezését, azok számát és minőségét. Módszerei topológiai jellegűek. Ezzel a témakörrel foglalkozott sikerrel POINCARÉtól függetlenül az orosz Ljapunov is. A

KVALITATÍV VIZSGÁLATOK AKKOR VÁLTAK GYAKORLATI FONTOSSÁGÚVÁ, AMIKOR 1912-BEN GEORGE DAVID BIRKHOFF AMERIKAI MATEMATIKUS POINCARÉ TOPOLOGIKUS MÓDSZERÉVEL KIDOLGOZTA A DINAMIKAI RENDSZEREK ELMÉLETÉT, ÉS RÁJÖTT, HOGY A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TÉNYLEGES MEGOLDÁSÁVAL A DINAMIKAI RENDSZEREK MINDEN FONTOS JELLEMZÉSE NEM VIHETŐ KERESZTÜL.

E rész befejezéseként még rámutatunk arra, hogy LIE kezdeményezése képezte Émile Picard - 1883-ban és 1887-ben közölt -azon gondolatának az alapját, amely szerint a lineáris differenciálegyenletek szerkezete és az algebra Galois-elmélete között párhuzam észlelhető. Ennek nyomán Ernst Vessiot (1865-1952) 1892-ben megfogalmazta a következő alapvető megállapítást: Minden n-ed rendű lineáris differenciálegyenletnek megfelel az n-változós lineáris homogén transzformációknak egy olyan véges, folytonos csoportja, amely az algebrai egyenletek gyökeinek permutációs csoportjához hasonló tulajdonságú.

Hazánkban a differenciálegyenletek jelentős művelője volt Petzval József (1807-1891), a bécsi egyetem differenciálegyenletekkel foglalkozó iskolájának a megalapítója. Beke Manó (1862-1946) főleg a közönséges differenciálegyenletek reducibilitásával kapcsolatban ért el kimagasló eredményeket. Kiváló munkáival világhírnévre tett szert, e területen a volt kolozsvári magyar egyetem tanára, Schlesinger Alajos (1864-1933), és Kármán Tódor (18811963). Itt említem meg az analízissel foglalkozó két akadémikusunkat, Daróczy ZOLTÁNt (1938-) és Leindler LÁSZLÓt (1935-).

A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS KIALAKULÁSA

Bár az analízis fejlődése, tehát a története ma sem ért véget, mi mégsem követhetjük a mai napok fejleményeit, hanem befejezzük áttekintését a variációszámítás kezdetének vázolásával. Az analízis e fejezete ma is időszerű, mert módszereit nemcsak a matematika sok más ága veszi igénybe, hanem kiterjedt gyakorlati alkalmazásra talált a fizika és a technika számos területén is. Tárgya szerint a funkcionálanalízis részének tekinthető (702. oldal), mert bizonyos extrém tulajdonságokkal rendelkező függvények keresése

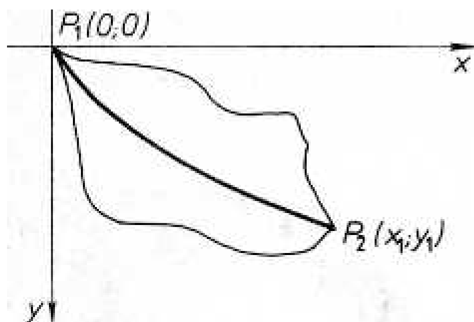
a fő feladata. Ilyen feladatok felbukkanását láttuk már a püthagoreusok korában, amikor az állandó kerületű zárt görbék közül keresték azt, amely a legnagyobb területet határolja. Az ilyen, izoperimetrikus feladatok mellett láttuk a 690. oldalon a brachisztochron görbe keresését, és megemlítjük Newton azon feladatát, amely azt kérdezte, hogy melyik az a két megadott ponton áthaladó görbe, amely egy ismert tengely körül forgatva olyan testet határol, amelynek a legkisebb a közegellenállása, ha a forgástengely irányában mozog.

A variációszámítás sajátos tárgyát és feladatainak általános megoldási módját először Euler igyekezett elhatárolni, illetve megtalálni az izoperimetrikus problémákról írt, 1732-es tanulmányában. A következő évtizedben e tárgykör anyaga annyira kibővült, hogy 1744-ben Euler megírhatta első variációszámítás-könyvét *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive salutio problematis isoperimetrici latissima sensu accepti* (A maximum vagy minimum tulajdonságú görbék feltalálásának módszere, avagy a legtágabb értelemben vett izoperimetrikus probléma megoldása) címen.

A variációszámítás problémakörének a megértéséhez alkalmasnak mutatkozik Johann Bernoulli említett brachisztochron-feladata. Ez így hangzik: Adott a különböző magasságban, de nem azonos függőlegesben elhelyezkedő $P_1(0;0)$ és $P_2(x_1\,;\,y_1)$ pont *(357. ábra)*. Ez a két pont végtelen sokféleképpen összeköthető görbe vonallal. Válasszuk ki azt a görbét, amelyen egy tömegpont pusztán a nehézségi erő hatására a legrövidebb idő alatt ér a P_1 pontból a P_2 pontba!

Jelölje $y=y(x)$ azon függvényeket, amelyek görbéje összeköti a P_1 és P_2 pontokat. A tömegpont t idő alatti útja legyen s. A pillanatnyi sebesség, $v=ds/dt$ kifejezhető a gravitációs gyorsulást feltüntető $v=\sqrt{2gs}$ képlettel is. A ds ívelemet leírja a $ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ függvény. A $v=ds/dt$ szerint az időelem:

$$dt=\frac{ds}{v},\quad \text{illetve}\quad dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\sqrt{2gy_1}}\;.$$



357. ábra

Így az esés teljes ideje:

$$T=\int_0^{x1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy_1}}\,dx.$$

Olyan $y_0=y_0(x)$ függvény keresendő, amelynél ez az integrál a legkisebb!

A feladat általánosan így fogalmazható: keresendő olyan $y_0=y_0(x)$ függvény, amelynél egy másik *f(x, y, y')* függvény integrálja - amely fizikai vagy technikai feltételekből adódik - a legkisebb vagy a legnagyobb, azaz ahol az

$$I_0=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0, y_0')\,\mathrm{d}x$$

extrém érték. Az *f(x, y, y')* függvényt, amelynek független változói *x, y* és *y'*, alapfüggvénynek hívjuk. A keresendő $y_0=y_0(x)$ függvény neve: extremális, és a hozzá tartozó I_0 integrálé extrémum. [Az *f*(x, *y, y')* és az *y=y(x)* függvény folytonos és differenciálható.]

A Bernoulli testvérek a brachisztochron-problémát ügyes fogásokkal oldották meg. Euler azonban általános megoldást talált. Sikerült a variációs feladatot visszavezetnie a

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

Euler-féle differenciálegyenletre. Euler a maga direkt módszerét általánosította arra az esetre is, amelyben az alapfüggvény magasabb rendű deriváltaktól is függ.

Lagrange 1755-ben megírta EULERnek, hogy megtalálta a variációszámítás egy új módszerét. Euler, aki akkor szintén hasonló gondolatokkal foglalkozott, nemcsak a prioritás jogát engedte át a fiatal matematikusnak, hanem javaslataival is segítette, sőt Lagrange eredményeinek közléséig, tehát 1762-ig ő maga nem publikált hasonló tárgyú cikkeket. Azután viszont ő is folytatta ilyen irányú közléseit.

Lagrange és Euler gondolatmenete arra a törekvésre épült, hogy az extremális függvény keresését visszavezessék függvénytani szélsőérték-keresésre. Maradjunk a brachisztochron-feladat általánosításakor használt jelöléseknél. A keresendő extremális függvény legyen most is $y_0=y_0(x)$amelyet a $P_1(x_1; y_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontjai között veszünk számításba. Ezt kell kiválasztanunk a végtelen sok $y=y(x)$ folytonos és differenciálható függvény közül úgy, hogy az

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

integrál az $y=y_0$ esetben extrémum legyen. A megengedett $y=y(x)$ görbékre kössük ki peremfeltételként, hogy (szélső) pontjaik az x_1 és x_2 abszcisszájú helyeken essenek egybe az $y_0=y_0(x)$ extremális P_1 és P_2 pontjaival. *Az* $y=y(x)$ függvény különbözzék *az* $y_0=y_0(x)$ függvénytől valamilyen $\delta y_0(x)= \varepsilon \cdot \eta(x)$ függvénnyel. A peremfeltételek szerint azért, hogy $y(x)$ és $y_0(x)$ két közös pontja a P_1 és a P_2 lehessen, kell, hogy $\eta(x_1)=0$ és $\eta(x_2)=0$ legyen. A $\delta_0(x)$-

et nevezte Lagrange az $y_0(x)$ függvény variációjának (megváltozásának) és a dy_0-tól való megkülönböztetésül δy_0-lal jelölte. Ezek szerint :

$y(x) = y_0(x) + \delta y_0(x) = y_0(x) + \varepsilon^* \eta(x)$.

Az extrémumot adó integrál tehát, amely most az ε függvénye:

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0 + \varepsilon\eta, y_0' + \varepsilon\eta')\, dx.$$

Ha $\varepsilon = 0$, akkor *y(x)* éppen a keresendő $y_0(x)$ extremális. Az ε pedig akkor 0, amikor az I(ε) függvény szélső értéket vesz fel. Ekkor viszont a differenciálhányadosa szükségképpen 0.
Differenciáljuk hát az *I(ε)* függvényt. Ekkor az integrandusz parciális differenciálhányadosát véve:

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x, y_0 + \varepsilon\eta, y_0' + \varepsilon\eta')\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y_0 + \varepsilon\eta, y_0' + \varepsilon\eta')\eta' \right] dx.$$

A minden x_1 és x_2 között differenciálható *η(x)* a peremfeltételek szerint az x_1 és x_2 helyen eltűnik. Ha továbbá $\varepsilon = 0$, akkor I'(ε) is nulla, tehát:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial f(x, y_0, y_0')}{\partial y'} \cdot \eta' \right] dx = 0.$$

Az integrandusz második tagjára a parciális integrálást ($\int u'v\, dx = uv — \int uv' dx$) alkalmazva:

$$I'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial y}\eta\,\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\,\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2}=0.$$

Mivel a jobb oldal második tagja az $\eta(x_1)=0$ és $\eta(x_2)=0$ miatt zérus, azért kell, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

legyen, ami pedig a már idézett Euler-féle differenciálegyenlet (724. oldal). Ennek megoldása adja a keresett $y_0(x)$ extremálist.

Lagrange tehát a variációszámítás feladatait visszavezette - a szélsőérték-számítás módszerét használva - differenciálegyenletmegoldásra. Ő használta először a variációszámítás elnevezést is.

Lagrange után jelentősen továbbfejlesztették a variációszámítást Jacobi, Weierstrass, Hilbert, Osztrogradszkij, Walter Ritz (1878-1909), Hermann Weyl, Lebesgue, Richard Courant (1888-1972) és mások.

Hazánkban a variációszámítás világhírű kutatója volt Haar Alfréd.

A SZÁMELMÉLET FEJLŐDÉSE

Annak ellenére, hogy a számelmélet csak a XVII-XVIII. században vált önálló kutatási területté, mégis azt kell mondanunk, hogy ez a matematika legrégibb ága. Eredete a világ minden részén rendszerint visszanyúlik a számmisztikába. A püthagoreusok is az istenséghez való felemelkedés eszközének tekintették a számok törvényeinek a megismerését. Kétségkívül ők voltak a számelmélet megalapítói olyan fogalmak megalkotásával, mint a páros, páratlan, baráti, tökéletes és figurális számok. Ők kezdték az oszthatósági tételek kutatását, és ők vezették be a prímszám és az összetett szám fogalmát. Eratoszthenész már szinte nagyüzemi módon választotta ki a prímszámokat a számsorból. Eukleidész *Sztoikheiá*-jában megtaláljuk annak a bizonyítását, hogy végtelen sok prímszám létezik, és ugyanez a mű megtanít a legnagyobb közös osztó kikeresésére (euklideszi algoritmus) is. Amint tudjuk, a püthagoreusoknál a szám még csupán a természetes számokat jelentette. Érdemes áttekintenünk, hogy miként vált a szám mind általánosabb és még általánosabb fogalommá.

A SZÁMFOGALOM KIALAKULÁSA

A természetes számokkal párhuzamosan jelentkeztek a törtek is: kezdetben a fél, a harmad és a negyed. Eredetileg a törtfogalomhoz nem kapcsolódott az osztás fogalma. A „fél” szó nem utal a kettővel való osztásra, a ketted már későbbi eredetű. Ugyanígy a német halb, az angol half, az orosz polovina és a görög hémi szavak nem a zwei, a two, a dva, illetőleg a düo szavakból képződtek. Ez mutatkozik meg az egyiptomi törtfogalomban is. Az egyiptomiak kezdetben a törtet nem kapcsolták össze az osztással. Ugyanakkor, tehát i. e. 2000 táján, Babilonban már helyi értékes hatvanados számrendszerben írták a számokat, és ennek megfelelően bevezették a hatvanados törteket is. Ugyanitt megtaláljuk a √2-nek a hatvanados törtekkel leírt igen jó közelítő értékét, a négyzet átlójának kiszámításánál (22. oldal). A jó közelítő értékeket is elfogadó Mezopotámiában nem okozott problémát az, hogy a négyzet átlója nem fejezhető ki pontosan sem egész, sem törtszámmal. Ugyanez viszont az ógörögöknél már az irracionális

szám felfedezéséhez vezetett. Az irracionális viszony a görögöknél geometriai köntösben, az összemérhetetlen szakaszok formájában fogalmazódott meg (98. oldal).

A negatív számok csak nagyon későn nyertek a matematikában polgárjogot. Szükségességük először az egyenletmegoldásoknál jelentkezett. Diophantosz az egyenletek megoldásakor még úgy ügyeskedett, hogy elkerülje a negatív számokat. Negatív gyököket megoldásul sem fogadott el. Chuquet már jelet is talált ki a negatív számok részére, de az itáliai Cardano csak fiktív számoknak nevezte őket, habár már számolt létezésükkel. Ugyanebben az időben a német Stifel a negatív számokat abszurd számoknak nevezte. Még a francia Viéte is száműzte az egyenletek negatív megoldásait. Descartes már fenntartás nélkül számolt ezekkel a „hamis" számokkal.

Amikor a negatív számok szerepe még eléggé tisztázatlan volt, akkor már jelentkeztek a harmadfokú egyenletek megoldásánál a képzetes számok, illetve a komplex számok. Először Bombelli próbálta megalapozni a komplex számok elméletét (498. oldal). Ez először ARGAND-nak és WESSELnek, majd megnyugtató módon GAUSSnak sikerült 1831-ben, amikor a komplex számoknak a derékszögű koordináta-rendszerben való ábrázolásával minden komplex számot mint rendezett számkettőst definiált. Ugyanezt tette vele egy időben Hamilton is, de ő - ahogy Bolyai János is - tisztán aritmetikai alapon. Hamilton megkísérelte kidolgozni a számhármasok és a számnégyesek algebráját is a komplex számokat jelentő számkettősök mintájára. A számnégyesek vagy kvaterniók a komplex számok általánosításai: négyegységes mennyiségek (602. oldal). Hamilton a komplex számok $a+bi$ alakja nyomán megalkotta az $a+bi+cj+dk$ alakú kvaterniókat, ahol a, b, c és d valós számok, és i, j és k egységek. A matematikusok körében sok vitát kavart Hamilton kvaternióelmélete. Amikor azonban Charles Peirce (1839-1914) amerikai, Georg Frobenius (1849-1917) német és Joseph Cartan (1869-1951) francia matematikusok kidolgozták a hiperkomplex számok (a kettőnél több egységgel rendelkező számok) elméletét, akkor a kvaterniók is elfoglalhatták az őket megillető helyet a legegyszerűbb asszociatív számrendszerek birodalmában. Ha az $a+bi+cj+dk$ kvaternióban $a=0$, akkor tiszta kvaterniónak nevezik. Minden tiszta kvaterniónak megfelel egy

háromdimenziós térbeli vektor. Hamilton éppen azért vezette be a kvaterniókat, hogy elvégezhesse a vektorok közti osztást. Hamiltonnal egy időben alapozta meg a vektorelméletet Grassmann is, aki eljutott az n-dimenziós vektor fogalmához. A kvaterniók szellemében történő általánosításban még tovább ment az angol William Clifford (1845-1879), aki bevezette a bikvaterniókat, vagyis az $a+b\varepsilon$ alakú számokat, ahol a és b komplex számok, ε^2 pedig lehet $+1$, — 1 és 0. Így alkalmas számokat nyert a nemeuklideszi térbeli mozgások tanulmányozásához.

A számfogalom fejlődése az algebrához kötötten folyt. Erre jó példa a következő általánosítás is: A racionális számokat az $ax+b=0$ egész együtthatós elsőfokú egyenlet gyökeinek is tekinthetjük, ahol a és b egész számok. Ennek a felfogásnak az általánosításából ered az algebrai szám fogalma. Fermat foglalkozott azon számok kutatásával, amelyek valamely egész együtthatójú algebrai egyenlet gyökei lehetnek. Meghatározása szerint: Algebrai számoknak nevezzük azokat a (valós vagy komplex) számokat, amelyek gyökei lehetnek valamely

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

n-ed fokú, egész együtthatójú algebrai egyenletnek. Ezt kiegészítendő: Lejeune Dirichlet bevezette az egész algebrai szám fogalmát. Egész algebrai szám az az algebrai szám, amely gyöke lehet az

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

n-ed fokú, egész együtthatós, algebrai egyenletnek. Ezek szerint a racionális számok azok, amelyek az $a_1 x + a_0 = 0$ egész együtthatójú, elsőfokú egyenletnek gyökei lehetnek. Az algebrai számok elméletét 1842 táján Ernst Eduard Kummer német matematikus dolgozta

ki.

Georg Cantor bizonyította be, hogy léteznek nem algebrai komplex számok is. Kimutatta ugyanis, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálható sokaság. Ez belátható, ha az algebrai számokat definiáló n-ed fokú egyenlethez

HOZZÁRENDELJÜK A

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_2| + |a_1 + |a_0| + n$$

természetes számot - amit szokás az egyenlet *magasságá*nak is nevezni -, akkor minden egyes *h* számhoz csak véges számú egyenlet tartozik. Ezen egyenletek mindegyikének csak véges számú gyöke lehet, azaz mindegyik csak véges számú algebrai számot határoz meg. Így tehát egy rögzített *h* értékhez véges számú egyenletnek véges számú gyöke, vagyis véges számú algebrai szám tartozik. A *h* értékek halmaza a természetes számok halmaza, tehát megszámlálható sokaság. Az elmondottakból következik, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálható halmaz. Mivel pedig a komplex számok halmaza kontinuum számosságú, azért kell lennie olyan komplex számnak, amely nem algebrai szám. Az ilyen komplex számot Euler nyomán transzcendens számnak nevezzük (transcendo = túlhaladok).

Az is meglepő - és nem is nehéz belátnunk hogy a valós számok között is vannak transzcendens számok. Láttuk, hogy az algebrai számok megszámlálható halmazt alkotnak. Még inkább igaz ez az algebrai valós számokra. A valós számok összessége viszont kontinuum számosságú, azaz nem megszámlálható halmaz, tehát kell, hogy legyen köztük - méghozzá végtelen sok - transzcendens szám.

Először a π-ről és az *e* számról derült ki, hogy transzcendens szám. Heinrich Lambert 1766-ban igazolta, hogy π és *e* irracionális számok. 1873-ban Charles Hermite (1822-1901) francia matematikus a π-*ről* és 1882-ben Ferdinand Lindemann német matematikus az *e* számról mutatta ki annak transzcendens voltát.

CANTORnak a fentebb közölt bizonyítása beláttatja ugyan velünk, hogy a komplex, sőt a valós számok között is léteznek transzcendensek, de nem ad módot az ilyen transzcendens számok megkeresésére. Ezt tette lehetővé a még Cantor bizonyítása előtt megszületett Liouville-tétel. Megfogalmazásához azt kell tudnunk, hogy ha egy *x* szám kielégít valamely egész együtthatós, n-ed fokú algebrai egyenletet, de nincs olyan (n— l)-ed fokú algebrai egyenlet, amelynek gyöke lehetne, akkor azt mondjuk, hogy *x* n-ed fokú algebrai szám. Például √5 másodfokú algebrai szám, mert

kielégíti az $x^2— 5=0$ egyenletet, de nem lehet gyöke egyetlen $ax +b= 0$ alakú egyenletnek sem, ha a és b egész számok. Legyen tehát x egy n-ed fokú algebrai szám. Belátható, hogy az elsőnél magasabb fokú algebrai szám nem lehet racionális, hiszen az a/b racionális szám mindig gyöke lehet a $bx—a= 0$ elsőfokú egyenletnek. Az irracionális algebrai számok megközelíthetők racionális számok sorozatával. Kézenfekvő ez például a √2 esetén, a négyzetgyökvonás algoritmusának a bármeddig való folytatásával. Így nyerjük a √2-t megközelítő sorozatot:

$$1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14\,142}{10\,000}, \frac{141\,421}{100\,000}, \frac{1\,414\,213}{1\,000\,000}, \ldots,$$

i

azaz

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{141}{100}, \frac{707}{500}, \frac{1071}{5000}, \frac{141\,421}{100\,000}, \frac{1\,414\,213}{1\,000\,000}, \ldots$$

Általában az a irracionális szám megközelíthető a

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

racionális számok sorozatával.

JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) FRANCIA PROFESSZOR 1851-BEN KÖZÖLT EGY CIKKET A FRANCIA AKADÉMIA LAPJÁBAN, A *Comptes Rendus-ben,* és ebben bebizonyította, hogy az α n-ed fokú algebrai szám csak akkor lehet irracionális, ha a közelítő törtjei növekvő nevezőjű sorozatában, ahol p és q relatív prímek, egy elég nagy q nevező után már teljesül az

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{n+1}}$$

egyenlőtlenség, ami határt szab a közelítés pontosságának. Ennek az egyenlőtlenségnek az alapján Liouville talált egy olyan

feltételt, amellyel sikeresen tudott keresni transzcendens valós számokat. Így például az

$$\alpha=1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^{1\cdot 2}}+\frac{1}{q^{1\cdot 2\cdot 3}}+\dots+\frac{1}{q^{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}}+\dots$$

transzcendens szám, ha q > 1.

Az algebrai számoknak a racionális számokkal való megközelítésével sokan foglalkoztak. Axel Thue (1863-1922) norvég matematikus úgy élesítette a Liouville-egyenlőtlenséget, hogy (n+l) helyébe

$$\left(\frac{n+2}{2}+\varepsilon\right)$$-t

írt, ahol ε tetszőleges kicsiny pozitív szám.

CARL LUDWIG SIEGEL(1896-1981) NÉMET MATEMATIKUS PEDIG BEBIZONYÍTOTTA, HOGY AZ *(n+* 1) felcserélhető 2√n-re is. Végül Klaus Fridrich Roth (1925-) angol matematikus az (n+ l)-nek a (2+ε)-nal való kicserélését is jogosnak találta, ha ε>0.

HILBERT 1900-BAN VETETTE FEL AZT A KÉRDÉST, HOGY A $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám-e. Mintegy 30 évig azt sem sikerült belátni, hogy irracionális. Az 1930-as években azonban új alapelvek bevezetésével egymástól függetlenül igazolta Siegel és a szovjet Alekszandr Joszipovics Gelfond, hogy minden α^{β} alakú szám, ahol α a 0-tól és az 1-től különböző algebrai szám és β legalább másodfokú algebrai szám, transzcendens. Így Hilbert kérdésére igennel lehetett válaszolni.

A komplex számokat oszthatósági szempontból először Gauss kezdte vizsgálni. Rájött, hogy az olyan $a+bi$ komplex számok körében, amelyeknél a és b irracionális szám, az oszthatóság alaptulajdonságai megmaradnak. Az ilyen tulajdonságú komplex számokat Gauss-féle egészeknek nevezik. Meglepő, hogy minden Gauss-féle egész egyszersmind egész algebrai szám is, de ez fordítva nem igaz.

A számfogalmat sokféle szempontból lehet általánosítani. Igen éles

szemű általánosítás kapcsolódik a kiváló magyar matematikushoz, Kürschák JÓZSEFhez (1864-1933). Bevezette a p-adikus számokat a következőképpen: Legyen *p* egy rögzített prímszám, és legyenek a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... a p-nél kisebb nem negatív egész számok. Az

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

végtelen összeget (ha létezik) p-adikus egész számnak nevezzük. Ez a számfogalom, amely környezetéből kiszakítva mesterkéltnek tetszik, jelentős alkalmazásra talált a hatványsorok elméletében.

Arra, hogy adott esetben mi tesz szükségessé egy ilyen számfogalmat, jó példa Kummer fáradozása a nagy Fermat-tétel bizonyítása érdekében, vagyis az az igyekezet, amellyel ki szerette volna mutatni, hogy az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek x, *y* és z-re nincs nem triviális megoldása, ha *n* 2-nél nagyobb egész szám. Először leszűkítette a feladatot az $x^p + y^p = z^p$ esetére, amikor *p* páratlan prímszám. Az egyenlet bal oldalát felbontotta lineáris tényezők szorzatára a következőképpen:

$$x^p + y^p = (x + y)(x + \varepsilon y)(x + \varepsilon^2 y) * \ldots * (x + \varepsilon^{p-1} y).$$

Itt az ε szám az $\varepsilon^p = 1$ egyenlet egyik 1-től különböző gyöke. (Belátható, hogy 1, ε, ε^2, ε^3, ..., ε^{p-1} megadja az egyenlet mindegyik gyökét.) A bizonyítás sarkalatos pontja volt annak a kimutatása, hogy az eredeti Fermat-egyenletnek nincs megoldása az ilyen $x + \varepsilon y$ alakú számok körében, ahol x és *y* egész számok. Kummer a kidolgozott bizonyítást elküldte barátjának és tanárának, Dirichlet-nek, aki azonban észrevette, hogy az algebrai számtestben (az algebrai számok körében a négy alapművelet értelmezett, tehát az algebrai számok halmaza testet alkot) a prímtényezős felbontás nem egyértelmű, és ezért Kummer bizonyítása hibás. Kummer azonban nem keseredett el, hanem megalkotta az „ideális számok" testét, amelyet később Dedekind ideálnak nevezett. Ebben a számtestben a prímtényezős felbontás már egyértelmű volt. Így sikerült KUMMERnek kimutatnia, hogy a Fermat-egyenlet megoldása akkor is lehetetlen, ha megengedjük, hogy a megoldáshármast a nagyobb tartományú algebrai számtest számaiból vegyük. Kummer ezért a munkájáért, amelyet az 1844-1847-es években dolgozott ki, és a *Crelle Journal* 1850-es

évfolyamában közölt, elnyerte a párizsi Akadémia matematikai nagydíját, anélkül hogy megpályázta volna. A Kummer által megteremtett ideál fogalma a következő: Az *R* gyűrű *I* részhalmazát ideálnak nevezzük, ha az *I* bármely α_1, α_2, ..., a^n elemeire és az *R* tetszőleges β_1, β_2, ..., β_n elemeire teljesül, hogy az $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ lineáris kompozíció szintén az *I* ideál eleme, és bármely α_k és α_i elemmel együtt az *I* ideálhoz tartozik az α_k—α_i elem is. Az algebrában az ideál fogalma lényegesen túlnőtte a most körvonalazott segédtétel szerepet.

A kedves olvasó bizonyára észrevette, hogy a számfogalom fejlődésének e rövid vázlatában éppen az egyik legalapvetőbb fogalomnak, az irracionális szám fogalmának a meghatározásán átsiklottunk, ott, ahol megemlítettük a √2-nek tetszőleges pontossággal való megközelítését. Hasonló módon lehetséges a többi irracionális szám megközelítése racionális számok sorozatával, de maga a fogalom így is tisztázatlan maradt, még akkor is, amikor Cauchy megfogalmazta a határérték definícióját. Sokan észrevették, hogy mikor az irracionális számot határértékként értelmezzük és amikor a határérték fogalmát a valós számokra alapozzuk, akkor Cauchy-val együtt a circulus vitiosus hibájába esünk (708. oldal). Az analízis és a számelmélet együttes érdeke volt, hogy az irracionális számot ne határértékkel definiáljuk, illetve a határérték meghatározásához ne kelljen az irracionális szám fogalma.

1872-ben Charles Méray francia matematikusnak a *Nouveau précis d'analyse infinitesimale* (Az infinitezimális analízis új foglalata) című művében a Cauchy-Bolzano-féle konvergenciakritériumra alapozva azt a fogást alkalmazta, hogy egy konvergens sor esetében feltételezte, hogy annak a határértéke racionális szám, vagy ha nem, akkor a sor „fiktív határértéke” egy „fiktív szám”. Aztán kimutatta, hogy a „fiktív határértékkel” definiált „fiktív szám” valójában az, amit irracionális számnak nevezünk. Méray nem szögezte le félreérthetetlenül, hogy magát a sorozatot tekinti számnak.

Alapjában nagyon hasonló ez az okoskodás WEIERSTRASSéhoz. Ő is a raconális számok egy sorát, vagy ahogy ő mondta:
egy aggregátumát (egymással össze nem függő elemek halmaza) tekintette valós számnak, tehát nem egy sor vagy sorozat határértékével, hanem egy számot reprezentáló sorral,

aggregátummal fogalmazott. Ezt az elméletét azonban írásban nem fejtette ki, hanem csak tanítványai, Heinrich Eduard Heine, George Cantor és mások írták le, visszaidézve Weierstrass előadásait. Sokak véleménye az, hogy a valós számnak a Weierstrass-féle homályos elmélete nehezen tesz eleget a weierstrassi szigor követelményeinek. Az azonban biztos, hogy egyetemi előadásai nagy ösztönző erőt jelentettek ahhoz, hogy tanítványai ezt az analízis aritmetizációjához szükséges, még hiányzó lépést megtegyék.

E problémának igen népszerűvé vált, Dedekind-féle megoldását könyvünk 138. oldalán nagy vonalakban ismertettem. Elméletét Dedekind az 1872-ben megjelent *Stetigkeit und die Irrationalzahlen* (Folytonosság és az irracionális számok) című könyvében írta meg. Ahogyan a Dedekind-szeletek alkalmasak a valós számok meghatározására, ugyanúgy használhatók az egyenes pontjainak a kijelölésére is, azaz a Dedekind-szeletek az egyenes pontjai és a valós számok között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetést létesítenek. Jogos tehát a valós számok halmazát kontinuumszámosságúnak tekinteni. A Dedekind-szeletekre vonatkozóan Bertrand Russell kiváló angol matematikus és filozófus megjegyezte, hogy a valós szám definiálására elegendő a két szelet közül az egyik is.

Létezik a valós számnak tisztán axiomatikus meghatározása is. Ezen axiómák közül az első 5 biztosítja a valós számkörben a négy alapművelet elvégezhetőségét. A következő 3 axióma definiálja a pozitív valós szám fogalmát. Ezekből aztán következik a kisebb és a nagyobb reláció értelmezése. Az ezutáni 3 axióma a természetes számokat különbözteti meg a többitől (ezek akár el is hagyhatók). A 12. axióma szerint: Ha r valós szám, akkor van olyan n természetes szám, hogy $r < n$. Az utolsó, 13. axióma szerint: Ha egy bizonyos tulajdonság teljesül az a valós számokra, de a b valós számokra nem, és ha minden a-ra és b-re igaz, hogy $a < b$, akkor létezik olyan c valós szám, hogy $a < c$ és ugyanakkor $c < b$. Legyen például a olyan racionális szám, amelynek a négyzete nagyobb 2-nél, és b olyan racionális szám, amelynek a négyzete kisebb 2-nél. Ekkor az axióma értelmében létezik egy a-nál kisebb, b-nél nagyobb c szám. Ennek négyzete az a^2 és b^2 között van, tehát csak 2 lehet, azaz $c = \sqrt{2}$. Ez az utolsó axióma tehát az irracionális számokat iktatja a racionális

számok közé, éppen úgy, ahogy a Dedekind-szeletek.

Végül tehát többféle módszerrel is sikerült az irracionális számok és velük együtt a valós számok fogalmát, a határérték igénybevétele nélkül meghatározni, ilyenképpen tehát megszűnt a Cauchy-féle egymással definiálás hibája, valamint kifogástalanná vált a valós számkör felépítése is.

A SZÁMELMÉLET NÉHÁNY PROBLÉMÁJA

A görög, kínai és hindu számelméleti eredmények után egészen a XVII. századig ezen a területen nem történt említésre méltó fejlődés. Ebben a században azonban Fermat működése nemcsak felébresztette álmaiból a matematikának ezt a mellőzött ágát, hanem olyan tömeg új ismerettel bővítette, és annyira felkeltette mások érdeklődését is, hogy az ő munkásságától szokás a számelméletet önálló kutatási ágként kezelni. A kiváló francia matematikusra alapvetően nagy hatást gyakoroltak Diophantosz eredményei. Ezt illusztrálja az a széljegyzet, amelyet örökül hagyott ránk éppen Diophantosz egyik könyvének a margóján. Ezt a könyvet Bachet de Méziriac (1581-1638), a négy nyelven író lyoni költő és matematikus adta ki, és benne saját szellemes megoldásai is helyet kaptak. Az egyik feladat mellé - amely azt kívánja, hogy „Egy négyzetszám két másik négyzetszám összegére bontandó!” - írta Fermat a következő megjegyzést: „Teljesen lehetetlen egy köböt két köbre, egy negyedik hatványt két negyedik hatványra, és általában a négyzeten kívül egy hatványt ugyanolyan kitevőjű két hatványra bontani. Erre én egy valóban csodálatos megoldást találtam, de a lapszél túl keskeny ahhoz, hogy befogadja.” Ezt az ún. nagy Fermat-tételt, amely tehát azt állítja, hogy az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek x-re, *y-ra* és *z*-re nincs a 0-n kívül egész szám megoldása, ha *n* kettőnél nagyobb egész szám, a mai napig a legnagyobb matematikusoknak sem sikerült teljes általánosságban bebizonyítaniuk. Valószínűnek tarthatjuk, hogy a Fermat által jelzett általános bizonyítás hibás lehetett. Ezt valószínűsíti Fermat egy másik széljegyzete, amely már csak az $n =$ 3 és $n = 4$ esetekről beszél. Itt megemlíti azt is, hogy az ún. „descente infinie” módszert alkalmazta. Ennek a „határtalanul csökkentés” eljárásnak a lényege a következő: Jelöljön *T(n)* egy *n* természetes számra vonatkozó tételt. Mutassuk ki, hogy csupán a T(n)-ből következik,

hogy a tétel egy, az n-nél kisebb *m* természetes számra is érvényes, azaz ha *T(n)* igaz, akkor *T(m)* is az, ha $m<n$. Az *n* természetes számnak az ilyen módon való csökkentése nyilván határtalanul folytatható. Ez viszont lehetetlen, mert létezik legkisebb természetes szám. E miatt az ellentmondás miatt nem fogadható el a bizonyítandó *T(n)* állítás sem. Ez a Fermat-féle módszer bizonyára egy állítás hamis voltának a kimutatására alkalmas. Megjegyzendő, hogy ezt a bizonyítási eljárást már az ógörög matematikusok is alkalmazták.

Ezzel a módszerrel 1770-ben Euler igazolta a nagy Fermat-tételt az $n=3$ és $n=4$ esetre. Gauss is talált bizonyítást az $n=3$ esetre. Legendre 1825-ben igazolta a tételt, ha $n=5$. A következő eredményt - amelyről néhány oldallal előbb megemlékeztünk -Kummer érte el, aki az ideálok alapján érvényesnek találta a tételt a 100-nál kisebb kitevőkre. Az általános bizonyítás máig sem született meg, pedig 1908-ban Paul Wolfskehl 100 000 német márka jutalmat helyezett letétbe a göttingeni Akadémián a probléma sikeres megoldójának. Ez úgy felfokozta a bizonyítási lázat, hogy a következő két év alatt az Akadémia mintegy 1000 megoldási kísérletet kapott, és a *Crelles Journal* folyóirathoz átlag 10-11 naponként érkezett egy-egy ilyen tárgyú dolgozat. Valamicske haladás azért mindig történik. 1955-ben született meg a bizonyítás a 4002-nél kisebb prímszám kitevőkre. Ma igaznak tudjuk a tételt, ha $n < 30\,000$ (1979).

E témához tartozik, hogy Euler sejtése szerint *n* darab n-edik hatvány szükséges ahhoz, hogy összegül újra n-edik hatványt kapjunk. 1966-ban azonban az *Amerikai Matematikai Társaság Közleményeiben* ellenpélda olvasható, nevezetesen már négy tag esetén is:

$27^5 + 84^3 + 110^5 + 135^5 = 144^5$.

1770-ben Edward Waring (1734-1798) angol matematikus sejtésként mondta ki, hogy minden *k* természetes számhoz, tőle függően található egy olyan *K* természetes szám, hogy minden n természetes szám előállítható mint legfeljebb *K* számú *k*-adik hatvány Az analízis eszközeit is használó analitikus számelméletnek nagy becsületei szerzett Hilbert, amikor 1909-ben bebizonyította, hogy minden *k-hoz* tartozik a fent leírt *K* szám. Ezután John

Edensor Littlewood (1885-1977) és munkatársa, Godfrey Harold Hardy (1877-1947) a *K* számra elég jó felső határt talált, és újabb sejtést fogalmazott meg, amely szerint minden természetes szám előállítható legfeljebb 4*k* számú k-adik hatvány összegeként. A Waring-problémát 1945-ben elemi módszerekkel oldotta meg Jurij Vlagyimirovjcs Linnik (1915-1972) szovjet matematikus.

Abból a kínai sejtésből, hogy valahányszor (2^n—2) osztható *n*-nel, az *n* kitevő mindig prímszám, származhatott az ún. kis Fermat-tétel. Fermat ugyanis észrevette, hogy a kínai sejtés téves. Például (2^{341} - 2) OSZTHATÓ 341-GYEL, PEDIG 341 = 11*31 NEM PRÍMSZÁM. EZT A HAMIS SEJTÉST ÁLTALÁNOSÍTOTTA ÉS IGAZÍTOTTA KI FERMAT AZ 1640-BEN FRÉNICLE BERNARD DE BESSY (1605-1675) FRANCIA MATEMATIKUSHOZ ÍRT LEVELÉBEN. EBBEN OLVASHATÓ ELŐSZÖR, HOGY HA *p* prímszám és *a* nem osztható p-vel, akkor (a^{p-1}—1) osztható p-vel. Mai jelölésekkel:

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Tekintsük ugyanis az *a* alap következő többszöröseit:

$a_1 = a,\ a_2 = 2a,\ a_3 = 3a,\ \ldots,\ a_{p-1} = (p—1)a.$

E többszörösök között nem lehet kettő, amely a p-vel való osztáskor ugyanazt a maradékot adja, azaz amely a *p* modulusra nézve kongruens. Ha ugyanis például ilyen pár lenne az a_r és a_s, amikor is $1 \leq r < s \leq p—1$, akkor

$a_s \equiv k \pmod{p}$

és

$a_r = k \pmod{p}$,

amiből

$a_s—a_r \equiv 0 \pmod{p}$,

azaz $a_s—a_r = sa—ra = a(s—r)$ osztható lenne p-vel. Mivel azonban a kikötés szerint *a* nem osztható p-vel - és az $s—r<p$ természetes szám sem -, azért $(a_s—a_r)$ sem. Így viszont $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ számok mindegyikéhez található az 1, 2, 3, ..., (*p*—1) számok

között pontosan egy (és fordítva is), amellyel a *p* modulusra nézve kongruens. Ekkor pedig szorzatukra igaz, hogy:

$a_1 * a_2 * a_3 ... * a_{p-1} = 1*2*3* ... *(p-1)a^{p-1} \equiv [1*2*3* ... *(p-1)]$ (mod p),

vagy ami ugyanaz: $[1*2*3* ... * (p-1)]* (a^{p-1}-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Mivel a bal oldali szögletes zárójeles szorzat nem osztható p-vel, azért

$a^{p-1} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$, azaz $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$.

Ezt a kis Fermat-tételt általánosította és igazolta Euler. Ő ugyanis bevezette az első számelméleti függvényt: $\varphi(n)$ jelenti az n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prímszámok számát. Ha például $n=7$, akkor $\varphi(7)=6$, mert a 7-nél kisebb és a 7-hez relatív prímek: 1, 2, 3, 4, 5 és 6. Ugyanígy $\varphi(6)=2$, mert az itt számító relatív prímszámok: 1 és 5. Az általánosított Fermat-Euler-tétel szerint, ha *n* tetszőleges egész szám, valamint *a* és *n* relatív prímek, akkor

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$.

Szintén Fermat és Euler nevét kapcsolja össze FERMAT-nak egy hibás állítása. Úgy gondolta, hogy

$$2^{2^n}+1$$

mindig prímszám, ha *n* terszészetes szám. Euler azonban - akinek figyelmét Goldbach hívta fel e képletre - kimutatta, hogy Fermat állítása már n=5-re sem igaz, ugyanis $2^{32}+1 = 641 \cdot 6\,700\,417$. A prímszámokat csak nagyon korlátozottan előállító képlet érdekes alkalmazásra talált az alig 19 éves Gauss kezében, amikor a szabályos sokszögek szerkeszthetőségének kérdésére felelt. Bebizonyította, hogy csak azok a szabályos sokszögek szerkeszthetők euklideszi módon, amelyek oldalszámában törzstényezőként csak Fermat-féle törzsszám szerepel az első hatványon és még 2-nek tetszőleges, de nem negatív egész kitevős hatványa.

FERMAT-nak volt még néhány téves tétele, igaz, hogy ezeket csak levelezéseiben olvashatjuk, tehát nem hozta nyilvánosságra azokat. Ezek közül felsorolom azt a hármat, amelyekre Waclav Sierpinski kiváló lengyel matematikus adott ellenpéldákat. Ezek:

Egyetlen $12k+1$ alakú prímszám sem lehet osztója valamely 3^n+1 alakú számnak. Ellenpélda: 61 osztója a (3^5+1)-nek.

Egyetlen $10k+1$ alakú prímszám sem osztója az 5^n+1 alakú számoknak. Ellenpélda: 521 osztója (5^5+1)-nek.

Egyetlen $10k—1$ alakú prímszám sem osztója az 5^n+1 alakú számoknak. Ellenpélda: 29 osztója az $(5^7+ 1)$-nek.

FERMAT-val kapcsolatban megemlítem még, hogy az $y^2=ax^2+1$ egyenletnek, amelyben a nem négyzetszám, meghatározta a legkisebb megoldáspárját és annak segítségével a további megoldásokat is. Ez az ún. Pell-féle egyenlet már felbukkant az indiai matematikában (368., 372. oldal), de a görögök is foglalkoztak vele. Talán ennyi is elegendő ahhoz, hogy az algebrai és aritmetikai módszereket használó algebrai számelmélet területén elismerjük Fermat kiemelkedő szerepét.

Amint láttuk, Euler volt, aki a $\varphi(n)$ és más számelméleti függvények bevezetésével meghonosította a számelméletben a függvénytant módszereket, és ezzel az ún. analitikus számelmélet megalapítója lett. Ugyancsak ő vezette be a később jelentőségében megnövekedett ζ függvényt, amely értelmezése szerint:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

A következő hiányos gondolatmenet elegendő arra, hogy valószínűsítse EULERnak erre a függvényre vonatkozó egyik azonosságát. Mivel bármely prímszámra igaz, hogy $0<1/p^s<1$ azért

$$1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Írjuk most *p* helyébe egymás után a 2, 3, 5, 7, ... prímszámokat. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{ks}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{ks}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{ks}}=\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}$$

$$\ldots$$

Szorozzuk össze ezeket az egyenlőségeket! Ennek a jogossága igazolható (bár Euler ilyesmivel még nem törődött). A bal oldalak szorzatának a megítéléséhez gondoljuk meg, hogy végtelen sok, végtelen soktagú összeget kell összeszoroznunk. A nyert végtelen sok tag mindegyikének a számlálója 1, a nevezője pedig

$(1^{\alpha} * 2^{\beta} * 3^{\gamma} * 5^{\varepsilon} * \ldots)^{s}$

alakú prímtényezős szorzat s-edik hatványa, amelyben a görög betűs kitevők mindegyike egymástól függetlenül lehet bármely természetes szám, beleértve a 0-t is. Így a zárójelben levő prímtényezős szorzatok értékei egymástól különbözve végigfutnak a természetes számokon, a 0-t kivéve, azaz a bal oldalon éppen Euler ζ(s) függvényét kapjuk. Tehát:

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\ldots$$

A végtelen szorzat szokásos rövidítésével:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

ahol *n* természetes és *p* prímszám.

Ebből az Euler-féle azonosságból rögtön következik az ókorban már bizonyított tétel (163. oldal), hogy a prímszámok száma végtelen. Ha ugyanis véges lenne, akkor az $s=1$ esetben az azonosság jobb oldalán véges szám állna, a bal oldalon pedig a divergens

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

harmonikus sor. Ezek egyenlősége pedig lehetetlen.

A ζ függvény fontossága igazán Riemann munkássága nyomán derült ki. Ő általánosította e függvényt a komplex síkra is, és a prímszámok eloszlásának a vizsgálatakor észrevette, hogy különös jelentősége van a ζ függvény azon 0 helyeinek, amelyek valós koordinátája a [0, 1] intervallumba esik. Megfogalmazta azt a róla elnevezett sejtést, hogy a ζ(s) függvény most szóba került valamennyi 0 helye az $s=1/2+yi$ egyenesen van. E Riemann-sejtés ma sem igazolt.

Az Euler által bevezetett számelméleti fogalmak között fontosnak bizonyult a hatványmaradékok fogalma. Eszerint a *c* szám az *m* modulusra nézve n-edik hatványmaradék, ha megoldható az $x^n\equiv c$ (mod *m)* kongruencia. Például: Az 1 az 5 modulusra nézve négyzetes vagy kvadratikus hatványmaradék, mert az $x^2\equiv 1$ (mod 5) kongruenciának van megoldása: x= 1, 4, 6, 9, 11, ... A kvadratikus hatványmaradékokra igazolta Euler a következő tételt:

Legyen p és q két páratlan törzsszám, és tekintsük az $x^2 \equiv p \pmod{q}$ és az $x^2 \equiv q \pmod{p}$ kongruenciákat! A kvadratikus reciprocitási tétel szerint, *ha* p és q valamelyike $4k+1$ alakú, ahol k egész szám, akkor mindkét kongruencia megoldható, vagy egyik sem. Ha pedig p *és* q is $4k+3$ alakú, akkor a két kongruencia közül csak az egyik oldható meg. Más szavakkal: Ha *a* p *és a* q prímszámok egyike $4k+1$ alakú, akkor abból, hogy $x^2—p$ valamely x értéknél osztható q-*v*al, következik, hogy létezik olyan x, amelynél az $x^2—q$ osztható p-vel. Ha viszont nem található olyan x, amelynél $x^2—p$ osztható q-*v*al, akkor olyan sem, amelynél $x^2—q$ osztható p-vel. Amennyiben pedig p és q is 4k+3 alakú prímszám, akkor ha $x^2—p$ osztható q-*v*al, biztos, hogy $x^2—q$ nem osztható p-vel. A tétel legegyszerűbb felírási módja a Legendre által bevezetett és róla elnevezett jelöléssel történhet. A Legendre-szimbólum:

Legyen $\left[\frac{p}{q}\right] = \begin{cases} +1, \text{ ha } p \text{ a } q \text{ modulusra nézve négyzetes maradék.} \\ -1, \text{ ha } p \text{ a } q \text{ modulusra nézve nem négyzetes maradék.} \end{cases}$

Ekkor a négyzetes reciprocitási tétel így írható fel:

$$\left[\frac{p}{q}\right] \cdot \left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Tehát p akkor és csak akkor kvadratikus maradék a q-ra nézve, ha q kvadratikus maradék a p-re nézve, feltéve, hogy

a $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$

szorzat páros. A szorzat páratlan értékénél viszont p akkor és csak akkor kvadratikus maradék *q-ra* nézve, ha q nem kvadratikus maradék a p-re nézve.

E tétel GAUSSnak annyira tetszett, hogy 8 különböző bizonyítást adott rá. Az első teljesen szabatos bizonyítást szintén ő találta meg 19 éves korában. Gauss különben is igen kedvelte a számelméletet. Tőle származik az a mondás, hogy ha a matematika a tudományok királya, akkor a számelmélet a matematika királynője, ő alapozta meg és fejlesztette ki a komplex számok

oszthatóságának az elméletét. A Gauss-féle egészek körében igazolta a számelmélet alaptételét is, azaz azt, hogy a Gauss-egészek egyértelműen bonthatók fel véges számú prímtényező szorzatára. Ezt a tételt a természetes számok világában is Gauss igazolta először. Tőle származik az Euler által bevezetett számelméleti kongruenciának az elnevezése, jelölése és elméletének kidolgozása.

A számelmélet egyik igen régi kérdése, hogy miképpen oszlanak el a prímszámok a természetes számok halmazában. Ismeretes, hogy Gauss gimnazista korában a logaritmus- és a prímszámok táblázatával barátkozva észrevette, hogy az ezres számkörben a prímszámok száma fordítva arányos logaritmusukkal. Sokan kerestek olyan képletet, amely elő tudná állítani az összes prímszámot. Ilyen próbálkozás volt Fermat említett hibás formulája is. Aztán belátták a matematikusok, hogy ilyen képlet keresése kilátástalan. Valamelyes képet nyújtott a probléma megítéléséhez az, hogy Dirichlet 1837-ben bebizonyított egy tételt, amely szerint, ha *a és b* relatív prímszámok, akkor az $an+b$ képlettel meghatározott számtani sorozatban, ahol n = 0, 1, 2, ..., végtelen sok prímszám van. Legendre a prímszám-eloszlást millióig megvizsgálva tapasztalati alapon - csakúgy, mint a gimnazista Gauss - megállapította, hogy a [2, x] intervallumban található prímszámok száma:

$$\pi(x)=\frac{1}{\ln x-1{,}083\,66}.$$

PAFNUTYIJ LVOVICS CSEBISEV (1821-1894) OROSZ MATEMATIKUS KIMUTATTA, HOGY LEGENDRE TAPASZTALATI KÉPLETE HELYTELEN, TOVÁBBÁ IGAZOLTA, HOGY A $\pi(x)$ függvény nagyságrendileg úgy növekszik, mint az

$$\frac{x}{\ln x}.$$

Igazolta, hogy

$$0{,}921\,29<\pi(x):\frac{x}{\ln x}<1{,}105\,55.$$

JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814-1897) ANGOL MATEMATIKUS 1882-BEN EZT A BECSLÉST

$$0{,}921\,29 < \pi(x) : \frac{x}{\ln x} < 1{,}044\,23\text{-ra}$$

pontosította. 1929-ben Issai Schur (1875-1941) német matematikus még pontosabb közelítést ért el. Csebisev még egy érdekes integráltételt is talált. Rájött, hogy a $\pi(x)$ függvény értékei az

$$\int_2^x \frac{dz}{\ln z}$$

határozott integrál értékei körül oszcillálnak úgy, hogy végtelen sokszor teljesül a

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dz}{\ln z} - \frac{kx}{\ln^n x}$$

és a

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{dz}{\ln z} + \frac{kx}{\ln^n x}$$

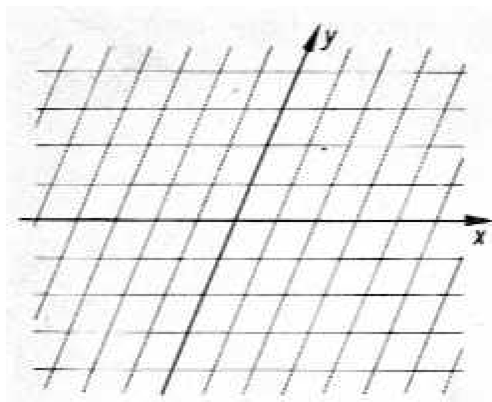
egyenlőtlenség, ahol $k > 0$ és $n \geq 1$. Ezen eredmény alapján bizonyította 1896-ban Jacques Hadamard francia és Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866-1962) belga matematikus az ún. prímszámtételt, amely kimondja, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dz}{\ln z}} = 1.$$

CSEBISEV KÖRÜL ÉS UTÁN TANÍTVÁNYAIBÓL ALAKULT MEG A SZOVJET SZÁMELMÉLETI ISKOLA, AMELYNEK LEGJELESEBB TAGJAI: ALEKSZANDR NYIKOLAJEVICS KORKIN (1837-1908), JEGOR IVANOVICS ZOLOTARJEV (18471878), ANDREJ ANDREJEVICS MARKOV (1865-1922), GEORGIJ FEDOSZEVICS VORONOJ (1868-1908) ÉS IVAN MATVEJEVICS VINOGRADOV (1891—).

Szeretnék még szót keríteni a geometriai számelméletre is, amely létét annak köszönheti, hogy bizonyos számelméleti feladatok jól megfogalmazhatók a geometria nyelvén. Válasszuk ki példaképpen - magyar vonatkozása miatt is - a Minkowski-Hajós-tételt!

Legyen két, egymást metsző egyenes *(358. ábra)*. Ezen egyenesekkel rajzoljunk egymástól egyenlő távolságra párhuzamosokat. E két egyenessereg egy síkbeli paralelogrammarácsot alkot. Az egyenesek metszéspontjai a rácspontok. Helyezzük e rácsot ferdeszögű koordináta-rendszerbe az ábra szerint. Hermann Minkowski (1864-1909) német matematikus és fizikus bebizonyította, hogy ha valamely homogén pontrácsban az alapparalelogrammák területe *t,* és S egy olyan konvex síkidom, amely az origóra centrálisan szimmetrikus és legalább 4t területű, akkor a síkidom területén vagy határán tartalmaz az origótól különböző rácspontot. Ha pedig *S* területe meghaladja a 4t-t, akkor belsejében biztosan található rácspont. E tétel alapján Minkowski azt is igazolta, hogy az



358. ábra

$|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ \ldots\ + a_{in}x_n| \leq k_i$ (i= 1,2,...)

lineáris egyenlőtlenség-rendszernek mindig van csupa 0-tól különböző megoldása, ha a k_i állandók pozitívok és szorzatuk nem kisebb a rendszer determinánsánál. Nem bizonyította, de sejtésként kimondta azt is, hogy néhány jól meghatározható esetet kivéve igaz az állítás akkor is, ha az egyenlőtlenség-rendszerben a $\leq$ jel helyett mindenütt csak a $<$ jelet használjuk. E sejtés bizonyítása csak 40 év múlva sikerült - meglepő módon csoportelméleti meggondolásokkal - a magyar Hajós GYÖRGYnek (1912-1972). A magyar számelméleti iskola nemzetközileg is kimagasló egyéniségei: Bauer Mihály (1874-1945), Erdős Pál (1913-), Turán Pál (1910-1976), Rényi Alfréd (1921-1970) és T. Sós Vera (1930-) akadémikus.

Ezt a fejezetet, amely valamelyes képet kívánt adni a számelmélet fejlődési irányairól, a Goldbach-sejtéssel fejezem be.
Christian Goldbach (1690-1764) német matematikus 1742 júniusában levelet írt EULERnak. Ebben megírta, hogy véleménye szerint minden 6-nál nem kisebb természetes szám kifejezhető három prímszám összegeként. Euler még ugyanabban a hónapban válaszolt, és megállapította, hogy e sejtést elég lenne igazolni páros számokra, mert ebből már következnék érvényessége a páratlan számokra is. Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938) német matematikus még 170 évvel később is teljesen reménytelennek látta a Goldbach-sejtés bizonyítását. Lev Genrihovics Snyirelman

(19051938) szovjet matematikus 1931-ben érte el e téren az első eredményt. Bebizonyította azt az enyhén szólva meglepő állítást, hogy minden pozitív egész szám előállítható 300 000-nél nem több prímszám összegeként. Aztán Hardy és Littlewood és az indiai Srínivásza Aijangár Ramanudzsan igazolták a Riemann-sejtés felhasználásával, annak igaz volta esetére, hogy a Goldbach-sejtés elegendő nagy páratlan számra teljesül. HARDYék módszere lehetőséget teremtett az additív számelmélet (amely a számoknak prímszámokkal való előállításával foglalkozik) néhány feladatának a megközelítéséhez. Így 1937-ben Ivan Matvejevics Vinogradov bebizonyította, hogy elég nagy páratlan szám előállítható legfeljebb 4 prímszám összegeként. Az „elég nagy” azt jelenti, hogy létezik olyan N szám, amelynél nagyobb páratlan számra már igaz az állítás. Vinogradov bizonyítása indirekt, tehát nem teszi lehetővé ennek az N számnak a megbecsülését. A páros számokra vonatkozó Goldbach-sejtés belátására még a kezdeti lépések sem történtek meg.

Ugyanilyen tehetetlenek vagyunk pillanatnyilag azzal a sejtéssel szemben is, hogy végtelen sok ikerprímszám létezik, vagyis olyanok, amelyek p *és* $p+2$ alakúak, mint például: 3 és 5, 5 és 7, 11 és 13, 17 és 19, 29 és 31 stb. Ez utóbbi példa is illusztrálja a számelméleti feladatok nehézségét. E feladatot megérti minden általános iskolás, de bizonyításával a világ legnagyobb matematikusai sem boldogultak.

AZ ALGEBRA FEJLŐDÉSE

Az előző fejezetben a számelméletről azt mondtam, hogy az a matematika legrégibb ága. Most ugyanezt állítom az algebráról is. Ez mégsem ellentmondás, hiszen a matematika e két területe kezdetben nem különült el. Eddigi mondanivalóinkban szinte sehol sem tudtuk elszigetelni magunkat az algebrától, és így ennek történetét a XVII. századig, illetve DESCARTES-ig lényegében már áttekintettük. Ezért most csak utalásszerűen foglalom össze az algebra fejlődésének már látott, fontosabb mozzanatait.

A babiloni algebra (27-31. oldalak) eljutott bizonyos másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszerek megoldásáig és ékírásuknak köszönhetően, ekkor már jelentkezett valamelyes algebrai jelrendszer és gondolkodásmód. Mezopotámia matematikája határozottan algebrai jellegű volt.

Egyiptom algebrája (59-61. oldalak) olyan feladatokra adott megoldási utasításokat, amelyek első és tiszta másodfokú egyenletre vezetnek.

A görög ókor nem követte Babilon példáját, nem fejlesztette tovább az ott csírájában már megtalálható algebrai gondolkodásmódot, sőt, hogy az irracionalitással kapcsolatos aritmetikai bonyodalmakat elkerüljék, még a legalgebraibb színezetű matematikai problémákat is geometriai tálalásban fogalmazták meg (152-157. oldalak). Ez alól kivétel volt Diophantosz, aki a tisztán szóba fűzött retorikus algebra után határozott törekvéssel kezdte meg a rövidítéseket, jeleket használó szinkopikus algebra kiépítését (274-279. oldalak). Sok-sok első és másodfokú határozott és határozatlan egyenletet oldott meg, és ezzel elősegítette az egyenletmegoldás elméletének a kibontakozását. Az *Arithmetika* című, 13 kötetes műve sejthetőleg egy előző, általunk nem ismert görög algebrai korszak eredményeinek is az összefoglalása.

Kína ó- és középkori matematikája határozottan algebrai irányzatú volt. A kínai írás jelei részben betölthették a matematikai jelek szerepét is. A VII. században a fang-fa módszer már magasabb

fokú egyenletek közelítő megoldását is lehetővé tette (316-321. oldalak), és alkalmazták a fang-cseng szabályt is, vagyis a lineáris egyenletrendszerek mátrixokkal való megoldását (332-335. oldalak).

A görög, kínai és mezopotámiai forrásokból merítő indiai matematika középkori művelői előszeretettel foglalkoztak határozott és határozatlan egyenletekkel és egyenletrendszerekkel, amint ezt a VII. századi Brahmagupta és a XII. századi Bhászkara művei meggyőzően tanúsítják (366-376. oldalak).

A középkori arab matematikán belül az algebra fejlődését fémjelzi al-Hvárizmi és Ibn Turk neve (387-395. oldalak). Ők visszatértek ugyan a görög retorikus tárgyalási módhoz, sőt algebrájuk a geometriai módszerektől sem szakadt cl, de jelentős haladás náluk, hogy a száraz megoldási utasítások közlése helyett bizonyítanak, magyaráznak. Az egyik nagy arab érdem, hogy bár szorgalmasan tanulmányozták a görög szerzőket, mégis mentek maradtak a mindenáron való geometrizálástól, és így utat nyitottak az algebrának.

Hatásuk meglátszik az araboktól tanuló középkori Európa matematikáján is: A XII-XIII. századi Fibonacci már elérte az arabok színvonalát, sőt azzal felül is múlta, hogy például az $x^3+2x^2+10\mathrm{x}=20$ egyenlet gyökeiről még az egyenlet megoldása előtt kimutatta, hogy azok sem racionális, sem $a+\sqrt{b}$ alakú irracionális számok nem lehetnek (452. oldal). Fibonacci kortársa, Nemorarius, amikor a számokat betűkkel jelölte, először szakadt el a geometriai értelmezéstől. Nála az $a \cdot b$ már nem téglalapot, hanem geometriai tartalom nélküli számot jelent (454. oldal). Oresme a törtkitevős hatvány értelmezésével és jelölésének bevezetésével segítette közelebb korának algebráját a jelrendszerrel dolgozó szimbolikus algebrához. Regiomontanus a gyökmennyiségek műveleti törvényeinek kidolgozásával járult hozzá az algebra fejlődéséhez (475. oldal).

A XV. században először beszélhetünk igazán szimbolikus algebráról, Chuquet (475. oldal), Pacioli (479. oldal) jelöléseinek megszületésétől. Widmann elsőként tartott a matematika más területeitől elszakított, kizárólag algebrai tárgyú egyetemi előadásokat. Az algebrai szimbólumok fejlődéséről szólva ki kell

emelnünk Stifel érdemeit is (503. oldal), aki elsőként egységesítette az addig különböző típusokként kezelt másodfokú egyenleteket, és az általános alakból kiindulva általános megoldási módot dolgozott ki.

Az algebra a XVI. század elejére a matematikának kifejezetten az egyenletekkel foglalkozó része lett, amelynek legsürgősebb feladatává vált az egyenleteknek csak a négy alapművelettel és a gyökvonással való megoldása. Amint láttuk, ezen a területen az első döntő lépést a harmadfokú és a negyedfokú egyenletek megoldóképletének a megtalálása és publikálása jelentette, hála del Ferro, Tartaglia, Cardano és Ferrari erőfeszítéseinek (482-497. oldalak).

Jelentős hatással volt az algebra fejlődésére Viéte (516-520. oldalak) az igen alaposan átgondolt, tervszerű algebrai szimbólumok bevezetésével. Szeretett volna egységes egyenletmegoldási eljárást kidolgozni, és ennek érdekében igyekezett olyan jelölésrendszert teremteni, amely elősegíti a matematikai felfedezéseket. A haladás ellenére jelölésrendszere még elég nehézkes, és nem volt ment a görög hagyományokat mutató geometriai szemléletről sem. Rátalált több, az egyenlet együtthatóit és gyökeit összekapcsoló összefüggésre, és megtaláljuk nála (1600) a kínaiaknál fang-fa módszer néven ismert Horner-elrendezést. Nem sokkal később Girard (520. oldal) kimondta az algebra alaptételét, és teljes általánosságban ismertette az egyenlet együtthatóit mint a gyökök szimmetrikus függvényeit.

Descartes Geometriájában szintén kimondta az algebra alaptételét és az előjelszabályt, sőt felvetette a reducibilitás kérdését is (568. oldal), de az ő törekvése nem az algebra fejlesztése volt, hanem az, hogy az algebra a geometriával tökéletes egységbe forrva létrehozzon egy univerzális matematikát. Ebből a törekvésből született meg az analitikus geometria, de az algebra ettől függetlenül élte tovább a maga életét, kifejlesztve módszereit és tárgykörét.

A XVIII. századi nagy összefoglaló művek, elsősorban Newton *Arithmetica universalisa.* (Általános aritmetika) 1707-ben és a már vak Euler *Unyiverzalnaja arifmetyikája* 1768-1769-ben hosszú

időre megszabták az algebra tárgyát, amely felölelte az egyenletmegoldások kutatását és minden, az algebrai egyenletekkel kapcsolatos kérdés vizsgálatát.

Newton algebrájában található az együtthatók és gyökök Viéte és Girard által talált összefüggésének egy szellemes általánosítása (bizonyítás nélkül). Ez az

$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

egyenletre vonatkoztatva a következő:

1. Ha $k < n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + \dots + a_k \sum_{i=1}^{n} x_1^0 + a_{k+1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n} = 0.$$

2. Ha $k = n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_1^{k-1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = 0.$$

3. Ha $k > n$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + \dots + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n+1} + a_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n} = 0.$$

(Ezen összefüggések átgondolása igen hasznos például az $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ egyenletre nézve a $k = 1$, a $k = 2$ és a $k = 3$ esetekre.)

EULERnak négy nyelvre is lefordított *Arithmeticá*ja szinte stabilizálta a XVIII. századi algebra kutatási területét, ugyanakkor további vizsgálatokra is mozgósított. Elsőrendű feladattá vált a négynél magasabb fokú egyenletek megoldása. Az ezzel foglalkozók többsége arra a nem bizonyított feltevésre alapozott, hogy létezik olyan algoritmus, amely lehetővé teszi, hogy az algebrai egyenletek

gyökeit az együtthatókból a négy alapművelet, a hatványozás és a gyökvonás segítségével kifejezhessük. Így vélekedett maga Euler is.

1683-ban EHRENFRIED WALTER GRAF VON TSCHIRNHAUSEN (1651 — 1708) német matematikus egy ügyes transzformációval vélte megoldani az

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

egyenletnek egy alacsonyabb fokúra való visszavezetését. Legyen ugyanis

$$y = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1},$$

ahol a b_i együtthatókat később alkalmas módon választjuk meg. E két egyenletből küszöböljük ki az x ismeretlent. Ekkor kapjuk az y-ban n-ed fokú

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_{n-1}y + c_n = 0$$

egyenletet. Válasszuk meg ezután a b_i együtthatókat úgy, hogy minden c_i együttható a c_n kivételével nulla legyen. Így $y^n + c_n = 0$, amiből $y = \sqrt[n]{-c_n}$. Ekkor már csak az

$$\sqrt[n]{-c_n} = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}$$

$(n—2)$-ed fokú egyenletet kell megoldanunk. Miután TSCHIRNHAUSEN meggyőződött arról, hogy a harmadfokú egyenletre ilyen eljárás létezik, általánosságban is kimondta, hogy az n-ed fokú egyenlet megoldása visszavezethető (n—2)-ed fokú egyenlet megoldására. EULER a negyedfokú egyenletre is talált hasonló eljárást, de az ötödfokú egyenlettel nem boldogult. Azt a feltételezett alacsonyabb fokú egyenletet, amelynek megoldása kezünkbe adhatná az eredeti egyenlet megoldását, EULER nevezte el „aequatio resolvens”-nek, megoldóegyenletnek, röviden: a megoldandó egyenlet rezolvensének. Sok matematikus: NEWTON, STIRLING, a BERNOULLIAK, LAGRANGE és mások, sokféle módon foglalkoztak a négynél magasabb fokú egyenletek rezolvenseinek a megkeresésével, hiába. A rezolvens meghatározása közben olyan egyenlet megoldása vált szükségessé, amelynek fokszáma az eredeti

egyenlet fokánál nem volt alacsonyabb.

E hiábavaló keresés nyomán szaporodtak el az egyenletek gyökeinek közelítő meghatározására alkalmas módszerek. Ilyet ismertetett Newton 1669-ben *az* $y^3 - 2y - 5 = 0$ egyenlettel kapcsolatban. Hasonló iterációs eljárást láttunk AL-KÁSInál a 415-416. oldalon. Newton módszerét barátja, Edmund Halley (1656-1743) tökéletesítette. Az eljárást 1690-ben közölte Joseph Raphson (1648-1715) angol matematikus is, Newton elsőbbségét elismerve.

Mind élesebben vetődött fel az a kérdés, hogy minden algebrai egyenletnek léteznek-e gyökei, és ha igen, akkor hány? Girard és Descartes után, akik bizonyítás nélkül mondták ki az algebra alaptételét, 1746-ban d'ALEMBERT adott egy nem túl szabatos bizonyítást, amely szerint a komplex számkörben az n-ed fokú $P_n(x) = 0$ egyenletnek pontosan n gyöke van. E tételre az első kielégítő bizonyítást Gauss adta az 1799-es doktori disszertációjában, amely nyomtatásban 1815-ben jelent meg. GAUSSnak ez is kedvenc témája volt. Később még három bizonyítást talált az algebra alaptételére 1815-ben, 1816-ban és 1849-ben. A legutolsót az aranydoktori értekezésében közölte, tehát doktorátusának ötvenéves évfordulóján. Ezek közül a legkönnyebben követhető az 1815-ös. Gauss abból indult ki, hogy a

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

egyenlet polinomjának az előjele, elég nagy x értéket választva, megegyezik az x^n előjelével, feltételezve, hogy n pozitív, páratlan szám. Ez belátható a

$$P_n(x) = x^n \left(1 + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + a_{n-2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}\right) = x^n[1 + R(x)]$$

átalakítás alapján, ahol $R(x)$ jelöli a zárójelbeni 1 után következő összeget. Az $R(x)$ tagjainak a nevezőjében szereplő x alapú hatványt eléggé megnövelve elérhető, hogy $|R(x)| < 1/2$ legyen. Ebből az következik, hogy $P_n(x)$ egy elég nagy x érték után pozitív, és egy elég kis x érték után negatív előjelű lesz. E kétféle x érték

között kell léteznie legalább egy olyannak, amelynél $P_n(x)=0$. Itt Gauss kihasználta a racionális függvények folytonosságát, és természetesnek vette a folytonos függvényekre csak később igazolt (Bolzano-) törvényt, hogy ti. egy folytonos függvénynek a pozitív és negatív értékei között kell lennie legalább egy nullahelyének. Itt Gauss gondolatmenete hézagos! Ezzel a hiányossággal jutott el ahhoz a megállapításhoz, hogy: a $P_n(x)=0$ páratlan fokú egyenletnek legalább egy gyöke van. A páros n esetét ügyes formai átalakításokkal sikerült GAUSSnak visszavezetnie a páratlan n esetére, tehát belátta, hogy minden n-ed fokú algebrai egyenletnek van legalább egy valós megoldása.

Ebből már az algebra alaptétele következik. Legyen ugyanis α_1 az egyik nullahelye a

$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ ...\ +a_1x+a_0$ polinomnak. Akkor:

$$P_n(\alpha_1)=\alpha_1^n+a_{n-1}\alpha_1^{n-1}+a_{n-2}\alpha_1^{n-2}+\ldots+a_1\alpha_1+a_0=0.$$

A $P_n(x)-P_n(\alpha_1)=P_n(x)$ különbség:

$$P_n(x)=(x^n-\alpha_1^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-\alpha_1^{n-1})+\ldots+a_1(x-\alpha_1),$$

ami nyilvánvalóvá teszi, hogy $P_n(x)$ osztható $(x—\alpha_1)$-gyel, tehát:

$P_n(x)=(x-\alpha_1)P_{n-1}(x)$.

GAUSS FENTI TÉTELE ÉRTELMÉBEN A $P_{n-1}(x)$ polinomnak is létezik legalább egy nullahelye. Legyen ez az $x=\alpha_2$. A $P_n(x)$-re alkalmazott eljárást ismételve a P_{n-1}-re is:

$P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)P_{n-2}(x)$.

További (n—2)-szeri ismétlés után nyerjük, hogy

$P_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) * \ldots *(x-\alpha_n)$,

vagyis a $P_n(x)$ polinom elsőfokú tényezők szorzatára bontható, reducibilis a komplex számok testén. Más szavakkal: A $P_n(x)=0$ egyenletnek ebben a számtestben n gyöke van, ha az egymással egyenlő többszörös gyököket is külön számítjuk. Az, hogy a $P_n(x)=0$ egyenlet

$$P_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) * \ldots * (x-\alpha_n) = 0$$

gyöktényezős alakba írható, nem csupán azt jelenti, hogy a $P_n(x) = 0$ egyenletnek van *n* gyöke, hanem azt is, hogy ennél több gyöke nem lehet. Ha ugyanis létezne még egy, az alfáktól különböző β gyöke, akkor

$$P_n(\beta) = (\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta-\alpha_3) * \ldots * (\beta-\alpha_n) = 0$$

volna, ami lehetetlen, ha β minden α-tól különbözik.

Bár Gauss törekedett arra, hogy az algebra alaptételét tisztán algebrai eszközökkel bizonyítsa, azonban - amint láttuk - ez neki sem sikerült, hiszen (a többi bizonyításában szintén) igénybe kellett vennie az analízis törvényeit is.

Az egyenletmegoldásokkal kapcsolatos másik kérdés még ezek után is feleletre várt: Lehet-e a négynél magasabb fokú algebrai egyenlet gyökeit az együtthatók radikáljaival kifejezni?

Lagrange, Euler rezolvenseinek irányába kutatva, egy nagyon általános rezolvenst - a Lagrange-rezolvenst - állított elő az 1771-1772-ben megjelent *Réflexions sur la résolution des équations* (Megjegyzések az egyenletek megoldásához) című könyvében. Valahányszor azonban négynél magasabb fokú egyenletre akarta alkalmazni, sohasem kapott a megoldandó egyenletnél alacsonyabb fokú rezolvenst. Sejtésként ki is mondta, hogy ha az egyenlet fokszáma, $n \geq 5$, akkor radikálokkal megoldani nem lehet. Habár ennek a bizonyítását meg sem kísérelte, mégis néhány fontosabb észrevételével Euler mutatta meg a későbbi igazolás útját. Euler ugyanis vizsgálta az algebrai egyenlet gyökeinek racionális függvényeit, és nézte, hogyan változnak, ha bennük a gyököket felcseréljük, permutáljuk. Megállapította például, hogy ha létezik - márpedig létezik - a gyököknek olyan racionális függvénye, amely invariáns a gyökök minden permutációjával szemben, akkor ez a függvény az egyenlet együtthatóinak is racionális függvénye. Így terelődött Lagrange figyelme azokra a függvényekre, amelyek a gyökök ugyanazon permutációi esetén nem változnak. Főként a gyökökben szimmetrikus függvényeket vizsgálta, amelyek a gyökök összes permutációjával szemben invariánsak. Úgy gondolta, hogy éppen a

gyökök permutációs csoportjának a törvényein keresztül lehet eljutni a radikálokkal való megoldhatósághoz. Ezt a gondolatot fejlesztette tovább Paolo Ruffini (1765-1822) itáliai matematikus, a kínai Horner-módszer egyik újra felfedezője (1819). 1799-ben közölte a gyökök permutációinak vizsgálata alapján annak bizonyítását, hogy az $n \geq 5$ fokszámú algebrai egyenletek radikálokkal nem oldhatók meg. Bizonyításának hiányosságával maga is tisztában volt, mert az 1799-es *Theoria generale delle equazioni* (Az egyenletek általános elmélete) címen megjelent tanulmányát még négy követte, de az igazolás így is hiányos maradt.

A teljesen kielégítő gondolatmenet a XIX. század tragikus fiatalon elhunyt matematikai lángelméjének, a Bolyai JÁNOSsal egy évben született Niels Henrik Abel (1802-1829) norvég matematikusnak a fejében teremtődött meg. Érdemét cseppet sem csökkenti, hogy ő is csak harmadik nekifutásra tudott úrrá lenni a feladaton. Kezdetben azt hitte, hogy megtalálta az ötödfokú egyenlet radikálokkal való megoldásának a nyitját. Az 1824-es tanulmányában azonban leleplezte előző okoskodásának hibáját, és arra a meggyőződésre jutott, hogy az általános ötödfokú egyenlet a szokásos képletekkel nem oldható meg. Ez a bizonyítása azonban éppen úgy, mint RUFFINIé, hézagos volt. A dolgozat mégis Abel javát szolgálta, mert annak alapján külföldi ösztöndíjat kapott. Berlinben az akkor meginduló Crelle-féle folyóirat első számaiban jelentek meg Abel főbb cikkei. Ezek között olvasható az 1826-os *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qu passent le quatriéme degré* (A négynél magasabb fokú általános egyenletek radikálokkal való megoldhatatlanságának a bizonyítása) című értekezése most már hibátlan igazolással.

ABEL cikke azonban még mindig nem tisztázta a kérdést általánosságban. Világos, hogy végtelen sok négynél magasabb fokú egyenlet megoldható a négy alapművelettel és gyökvonással. Általában mi az ismérve az egyenletek ilyen módon való megoldhatóságának? Erre a kérdésre a szintén fiatalon, tragikus párbajban elhunyt francia matematikus, ÉVARISTE GALOIS (1811-1832) felelt. A LAGRANGE, GAUSS és LEGENDRE művein felnőtt GALOIS LAGRANGE nyomdokain haladt tovább. Az alapgondolatot egy példán szeretném szemléltetni. Hogy az

egyenletet gyökeivel együtt lássuk, azért építsük fel az előre kiszemelt

$$x_1=1+\sqrt{3},\quad x_2=1-\sqrt{3},\quad x_3=-1+\sqrt{3},\quad x_4=-1-\sqrt{3}$$

számokból azt az egyenletet, amelynek éppen ezek a gyökei. Az egyenlet gyöktényezős alakja segítségével a keresett egyenlet lehet az

$$(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})=0.$$

A műveletek elvégzése után : $x^4—8x^2+4=0$.

LAGRANGE figyelme ráirányult a gyököknek és az együtthatóknak azokra a racionális kifejezéseire, amelyek a gyökök bizonyos felcserélése, permutálása után változatlanok maradtak. Írjuk fel mi is e konkrét egyenlet gyökeinek néhány permutációját. Legyen az eredeti sorrend az x_1, x_2, x_3, x_4, amit rövidítsünk az 1, 2, 3, 4 indexekkel. Az

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

jelölés jelentse azt, hogy az első gyök helyett a harmadikat, a második helyett a negyediket, a harmadik helyett a másodikat és a negyedik helyett az elsőt írjuk, tehát az első sor minden eleme helyett az alatta levő második sorbeli elemet. Így a felső sorbeli permutációhoz hozzárendeltük az alsó sorbelit. A négy gyök (négy elem) összes lehetséges permutáció-hozzárendelése a következő huszonnégy:

	①	②	③	④
①	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$
⑥	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

A lehetséges 24 permutációmegfeleltetést (ezután röviden permutációt) 6 sorban és 4 oszlopban helyeztük el. Ezek közül az egyiket például a p_{34} jellel idézzük, amin értjük a harmadik sorban és

negyedik oszlopban található $p_{34}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$ permutációt. Vegyük észre a következőket:

1. Ha két permutációt egymás után alkalmazunk, akkor újra a lehetséges 24 permutáció egyikét kapjuk. Például:

Ha a $p_{22}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ után a $p_{62}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$

felcserélést hajtjuk végre, akkor ismét a 24 permutáció egyikét kapjuk. Jelen esetben az egymás utáni alkalmazás azt jelenti, hogy a

p_{22} szerint az 1 alá 2-t, de továbbmenve, a p_{62} szerint a 2 alá 4-et kell írnunk, tehát végeredményben az eredeti 1 alá 4 kerül. Ugyanígy a többi elem esetén. A két permutáció egymás utáni végrehajtása egy művelet, amelyet jelöljünk például csillaggal (*). Ekkor a példánk szerint:

$$p_{22} * p_{62} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = p_{34}.$$

Az egymás utáni alkalmazás művelete sohasem visz ki a 24 permutáció halmazából.

2. Az elemek helyét nem változtató

$$p_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

permutáció az egymás utáni alkalmazásnál sem okoz változást. Például:

$$p_{43} * p_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = p_{43},$$

$$p_{11} * p_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = p_{43}.$$

A p_u olyan e csillagműveletnél, mint például a pozitív számok körében a szorzás esetében az 1 szám (1 * a = a; a* l = a), vagy az egész számok halmazában az összeadásnál a 0 (0 + a = a; a + 0 = a). Szokás egy halmazban valamilyen műveletre gondolva az ilyen elemet neutrális elemnek nevezni. A mi 24 elemű halmazunkban p_{11} a neutrális elem a csillagműveletre nézve.

3. Meggyőződhetünk arról, hogy e permutációk halmazán a csillagművelet asszociatív, azaz például:

$p_{23}*(p_{34}*p_{13}) = (p_{23}*p_{34})*p_{13} = p63.$

4. Az is szinte nyilvánvaló, hogy minden permutációhoz találhatunk

olyat, amely visszaállítja a kezdeti p_{11} permutációt. Például:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = p_{63} * p_{54} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = p_{11}.$$

Más szavakkal: Minden permutációhoz található egy olyan permutáció, amely a csillag művelet után átviszi a neutrális elembe, éppen úgy, mint a pozitív számok halmazában a szorzásra nézve egy szám inverze

$$\left(a \cdot \frac{1}{a} = 1\right),$$

vagy az egész számok összességében az összeadásnál minden számnak van ellentettje. Az ilyen elempárokat általánosságban inverzeknek nevezzük. A mi 24 elemből álló halmazunkban tehát minden elemnek létezik inverze.

GALOIS tehát LAGRANGE nyomán az egyenletek gyökeinek permutációcsoportjait kezdte tanulmányozni. A csoport elnevezés is tőle származik. Vele együtt induljunk el a

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ \ldots\ + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

egyenletből. Legyenek az egyenlet együtthatói racionális számok. Ezen együtthatók halmazát ki lehet bővíteni úgy, hogy e nagyobb számhalmazban mind a 4 alapművelet elvégezhető legyen, a 0-val való osztás kivételével. Az éppen csak szükséges bővítés után nyerjük a racionális számok halmazát, a racionális számtestet. Úgy szokás kifejezni, hogy az egyenlet a_i együtthatói generálják a racionális számok testét. Ha ebben az egyenlet gyökei benne vannak, akkor azok nyilván meghatározhatók az együtthatókból csupán a négy alapművelet segítségével. Ha viszont a gyökök nem racionális számok, tegyük fel például, hogy az egyik $\sqrt{3}$, akkor a racionális számok teste tovább bővíthető úgy, hogy egyszerűen hozzácsapjuk (adjungáljuk) a $\sqrt{3}$-at. Az így bővített halmazban azonban már nem végezhető el mind a négy alapművelet, azaz további bővítés szükséges. Ismét test lesz a $\sqrt{3}$-mal bővített halmaz, ha még hozzácsatoljuk az összes $a +\ b\sqrt{3}$ alakú számot, ahol a és b tetszőleges racionális számok. Ez az ismét testté lett nagyobb

halmaz a racionális számok testének egy bővítése: a √*3* adjungálásával generált bővítés. Az egyenlet algebrai megoldhatóságának a kérdése tehát úgy módosult, hogy az egyenlet gyökeinek sorozatos adjungálásával eljuthatunk-e egy legfeljebb gyökmennyiségekkel bővített olyan számtesthez, amelyben már az egyenlet minden gyöke előfordul?

Ha a $P_n(x)=0$ egyenlet együtthatói nem racionális számok, akkor is alkotható ezen együtthatók racionális függvényeinek a halmaza - vagyis az együtthatókat a négy alapművelettel összekapcsoló kifejezések összessége -, amelyet racionalitási tartománynak szokás nevezni. Ez esetben ebből az együtthatók által generált racionalitási tartományból, testből kell kiindulnunk.

Térjünk vissza most a például választott $x^4—8x+4=0$ egyenlet gyökeinek permutációcsoportjához. Galois felfedezte, hogy a gyökök bizonyos racionális kifejezései nem változnak meg, ha bennük a gyököket bizonyos módon felcseréljük, azaz így e kifejezésekhez, illetve az egyenlethez hozzárendelhetők bizonyos permutációk. Figyeljük meg példaképpen egyenletünk gyökeinek a legegyszerűbb, olyan racionális műveletekkel (összeadás, szorzás) összeállított kifejezéseit, amelyek értéke is racionális. Ilyenek:

$x_1+x_2=2$, $x_3+x_4=—2$; $x_1+k_4=0$, $x_2+x_3=0$, $x_1 * x_2= —2$, a_3-$x_4= —2$.

Mindegyikük a bennük előforduló gyökökre nézve szimmetrikus, tehát azok felcserélésével nem változnak. Válasszuk ki a 24 permutáció-hozzárendelésből azokat, amelyekben olyan felcserélések szerepelnek, amelyek a felsorolt kifejezéseket nem változtatják meg. Az ilyen értelemben megengedett négy permutáció: a p_{11}, a p_{12}, a p_{21} és a p_{22}. Bizonyára a kiválasztott hat kifejezésből összetett racionális kifejezések is invariánsak e négy permutációra nézve.

Vegyük észre még azt is, hogy a p_{11}, a p_{12}, a p_{21} és a p_{22} permutációk halmaza szintén kielégíti az eredeti 24 permutációból álló csoport mind a 4 felsorolt alaptulajdonságát, tehát e négy permutáció halmaza a csillagműveletre nézve maga is csoport, az eredeti csoport részcsoportja.

GALOIS KIMUTATTA, HOGY MINDEN $P_n(x)=0$ n-ed fokú egyenlethez található a racionalitási tartomány fölött egy olyan egyenlet, amelynek gyökeivel a $P_n(x)=0$ gyökei racionálisan kifejezhetők, és amelynek megvan az a tulajdonsága, hogy gyökei előállíthatók egyik gyökének és a racionalitási tartomány elemeinek racionális kifejezéseként. Az utóbbi tulajdonságú egyenletet normálisnak nevezzük a racionalitási számtest fölött. Állítsuk elő a $P_n(x)=0$ egyenlethez tartozó, most leírt normális egyenlet gyökeinek összes permutáció-hozzárendelését. Ezek összessége csoportot alkot, az ún. Galois-csoportot (G). GALOIS-nak sikerült felfedeznie, hogy szoros kapcsolat áll fenn az egyenlet radikálokkal való megoldhatósága és a Galois-csoport tulajdonságai között. A „radikál" szó jelenti az $x^n-a=0$ alakú algebrai egyenlet megoldását, az $\sqrt[n]{a}$*-t*. A radikálokkal való megoldhatóságon azt szokás érteni, hogy az egyenlet megoldható olyan képlettel, amelyben legfeljebb a négy alapművelet és radikálok szerepelnek. GALOIS nagy érdeme az volt, hogy összefüggést tudott teremteni a Galois-csoportok részcsoportjai és az együtthatók testének a gyökök adjungálásával létrehozott testbővítések sorozata között. Ebben az a nagyszerű, hogy a bővítések végtelen sok elemének a vizsgálatát helyettesítette a véges számú permutációcsoportok sokkal könnyebb elemzésével. A végeredmény:

A $P_n(x)=0$ algebrai egyenlet a négy alapművelettel és gyökvonással akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenlet Galois-csoportja feloldható. Ez utóbbi megállapításhoz gondoljunk át néhány definíciót:

A G Galois-csoport feloldható, ha van részcsoportjainak olyan

$$G=G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{k-1} \supseteq G_k=\{e\}$$

véges szorzata, amelyben mindegyik részcsoport a megelőzőnek normálosztója (2), {e} a *G* neutrális eleméből álló csoport, és a

$G \mid G_1$ $G_1 \mid G_2, \ldots, G_{k-1} \mid G_k$

faktorcsoportok (1) mindegyike Abel-féle (3).

(1) A *G* csoport egy faktorcsoportja a *G* részhalmazainak olyan

összessége, amely bizonyos feltételeknek eleget tesz. A faktorcsoport elemei tehát a G csoport részhalmazai.

Ha K és L a G csoport két részhalmaza, akkor ezek szorzata, KL azon kl szorzatok halmazát jelenti, amelyekre $k \in K$ és $l \in L$. A G részhalmazainak valamely F halmaza faktorcsoportja G-nek, ha F minden K, L elemére igaz, hogy $KL \in F$.

(2) Legyen N egy részcsoportja G-nek. Azt mondjuk, hogy N normálosztója G-nek, ha N eleme G egy F faktorcsoportjának. Mivel csak egy ilyen F van, azért bevezethető az $F = G \mid N$ jelölés, amely jelenti a G csoport N normálosztó szerinti faktorcsoportját.

(3) A faktorcsoport Abel-féle, ha a fenti értelemben vett szorzásra nézve kommutatív.

GALOIS új gondolatokat kifejező tanulmányát háromszor is megpróbálta eljuttatni a párizsi Akadémiához. Először CAUCHY hányta el a kéziratát. Másodszor az Akadémia titkára, FOURIER hazavitte írását, de csakhamar meghalt. Ez a kézirat is elveszett. Próbálkozott harmadszor is, de POISSON, a tanulmány bírálója azzal a megjegyzéssel utasította el, hogy „értelmetlen”. Felfedezéseit utoljára vetette papírra a halálát okozó párbaj előtti éjszakáján, de ezek is - más írásaival együtt - csak jóval későbben jelentek meg érdeklődést felkeltő módon LIOUVILLE újságjában.

LAGRANGE, RUFFINI, ABEL és GALOIS, akik az egyenletek radikálokkal való megoldhatóságát kutatták, megteremtették a csoport fogalmát. Ennek nyomán a matematikusok figyelme az egyenletek tanulmányozásáról mindinkább átterelődött az algebrai testek és csoportok vizsgálatára, az algebrai struktúrák kutatására. A régi algebra tárgyköre és módszerei teljesen megváltoztak.

A csoportelmélet fejlődéséhez nagymértékben hozzájárult Cauchy is a véges csoportokra megállapított törvényeivel. Ezek között nevezetes annak a bizonyítása, hogy ha valamely csoport rendje (véges csoportnál az elemek száma) osztható egy p prímszámmal, akkor annak létezik legalább egy p-ed rendű részcsoportja. CAUCHY már 1815-ben nyilvánosságra hozta a permutációhozzárendelésekből, azaz a szubsztitúciókról szóló eredményeit. Ezeket GALOIS valószínűleg ismerte. CAUCHYnak

1844-ben jelent meg a permutációcsoportok elméletéről szóló nagy összefoglalása. Ő még ebben a „konjugált substituciók rendszere” megnevezést használta. Műveiben az l850-es években kezdett kialakulni az absztrakt csoportok fogalma, amikor a vizsgálatok előterébe már nem a csoportot alkotó elemek, hanem a csoportműveletek kerültek. Igaz ugyan, hogy a csoportelméleti fogalmak definiálatlanul már előbb is éltek. Erről szóltam, különösen LAGRANGE-zsal és ABELlel kapcsolatban. E téren még hangsúlyozottan kell kiemelnünk GAUSSÍ is. *Ő* éppen az algebra alaptételének bizonyítására (1799) fedezte fel a róla elnevezett testkonstruálási módszert, amelyet 1882-ben KRONECKER elevenített fel, amikor sikerült megszerkesztenie egy tetszőleges polinom felbontási testét, vagyis azt a legkisebb számtestet, amely felett a polinom lineáris tényezőkre bontható. GAUSShoz fűződik számos konkrét csoportnak, különösen a kommutatív csoportoknak a tanulmányozása. Az ilyen vizsgálatainak a zöme megtalálható az 1801-ben megjelent *Disquisitiones arithmeticae* (Aritmetikai vizsgálatok) című nagy művében. Itt olvasható a Gauss-egészek (731. oldal) gyűrűjének az aritmetikája, amivel megindult a kommutatív gyűrűk tanulmányozása. Azt is igazolta, hogy a Gauss-egészek gyűrűjében a prímfelbontás egyértelmű. A csoportelmélet számára jelentőssé lett a bikvadratikus formák bizonyos csoportjának GAUSS által megkezdett vizsgálata. Az ő idejében ez volt a csoport legabsztraktabb példája.

1850 táján célratörőbben indult meg az absztrakt csoportok kutatása, sőt ekkor már a nem kommutatív csoportok is színre léptek. Gondoljunk Hamilton kvaternióira (1843) és Grassmann 1844-es vektorelméletére (601-603. és 728-729. oldalak). A példaképpen felsorolt konkrét vizsgálatok még nem jelentették a felbukkant struktúraelmélméleti fogalmak szigorú meghatározását, sőt sokszor még a megnevezését sem. Az absztrakt csoportok elméletének első rendszeres tárgyalása Cayley műve. Ez a kiváló angol matematikus mintegy 200 jelentős munkát írt a matematikának szinte minden területéről (557. oldal). Igen jelentősek a lineáris egyenletrendszerek (lineáris algebra) és a csoportelmélet tárgyában megjelent munkái. Ezekben kifejtette, hogy a Vandermonde és Laplace által megalapozott determinánselmélet csak egy része az általánosabb mátrixalgebrának, amelyben a szorzás kommutatív

törvénye érvénytelen. A mátrixalgebra alapjainak megteremtésével 1858-ban igen hatékony eszközt adott nemcsak a matematikusok, hanem a fizikusok kezébe is. 1854-ben adta ki az *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\vartheta^n = 1$ (A $\vartheta^n = 1$ szimbolikus egyenlettől függő csoportok elmélete) című írását. Ebben található a csoport következő definíciója:

A csoport olyan, egymástól különböző szimbólumok halmaza, amelyek közül bármelyik kettőnek a szorzata vagy bármelyiknek önmagával való szorzata hozzátartozik a halmazhoz és kielégíti a következő feltételeket:

1. A halmazon értelmezett szorzásművelet asszociatív.

2. A halmazban van egységelem.

3. Ha ***a*** és ***b*** a halmaz két tetszőleges eleme, akkor a halmazon belül egyértelműen megoldható az $\boldsymbol{ax = b}$ és az $\boldsymbol{ya = b}$ egyenlet.

Cayley megmutatta, hogy a permutációk halmaza speciális csoport, és idézett művének negyedik részében, amely 1859-ben jelent meg, igazolta, hogy minden prímszámrendű csoport ciklikus. A csoport nevet Galois tiszteletére tartotta meg. Mind a véges, mind a végtelen csoportnak csak lényegtelenül változtatott, ma is használatos definícióját Dedekind egyik tanítványa, Heinrich Weber (1842-1913) fogalmazta meg 1893-ban.

A Galois-elméletet részletesen Joseph Alfred Serret francia matematikus foglalta össze a Sorbonne-on tartott előadásai nyomán kiadott ***Cours d'algébre supérieure*** (Felsőbb algebrai kurzus) című kétkötetes művében, 1866-ban. Még előbb, 1852-ben Enrico Betti, a Garibaldi harcaiban is részt vett itáliai matematikusé volt a Galois-elméletet teljesen átfogó és továbbfejlesztő munka.

E mintegy két évtizedes korszak végén az absztrakt csoportok elméletére a legnagyobb hatást Camille Jordan kiváló francia matematikusnak a ***Traité des substitutions et des équations algébriques*** (Tanulmány a szubsztitúciókról és az algebrai egyenletekről) című könyve gyakorolta 1870-ben. Ő nemcsak összefoglalta és kifejtette a csoportelmélet akkori eredményeit,

hanem lényegesen tovább is fejlesztette azokat. Az ő könyvében fordul elő először az izomorfizmus fontos fogalma. Izomorfnak nevezünk két csoportot, ha egymásra kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők úgy, hogy a leképezés művelettartó is, ami azt jelenti, hogy bármely két elem szorzatának képe egyenlő az elemek képeinek a szorzatával. Ez a fogalom igen nagymérvű általánosítást, további absztrakciót tett lehetővé. Ebből született az Ernst Steinitz (1871-1928) német professzor által 1910-ben megfogalmazott izomorfiaelv, amely két izomorf algebrai struktúrát azonosnak tekint, tehát már nem veszi számításba a struktúra elemeit, hanem csak az izomorfizmussal szemben invariáns tulajdonságokat vizsgálja.

Az alkalmazás vonatkozásában Jordan fontos észrevétele volt a véges csoportok és bizonyos differenciálegyenletek kapcsolata. Éppen Jordan könyvét olvasva lelkesítette fel a csoportelmélet Kleim és LIE-t (633. oldal), akik valóban jelentősen gazdagították ezt a területet. Lie 1873-ban bevezette a folytonos transzformációcsoportok fogalmát (646.,647. oldal). Jordan nyomán ő fejtette ki és alkalmazta a csoportelmélet és a differenciálegyenletek elmélete közti kapcsolatot (721. oldal). 1872 táján Klein kimutatta, hogy minden egyes geometriához egy meghatározott folytonos transzformációcsoport tartozik, és minden geometriai ág a neki megfelelő transzformációcsoport invariáns tulajdonságait tanulmányozza.

A folytonos csoportok fogalma később módosult, általánosabbá lett, és a Lie-féle csoportok csak speciális esetekké váltak.
Ennek tisztázására Georg Bernard Dantzig (1914—) coloradói matematikus érdeme. A folytonos csoportok újabb absztrakciója végül a topologikus csoportok fogalmához vezetett. A folytonos csoportok elméletének felhasználására számos alkalmat nyújtott a modern fizika, nevezetesen a kvantummechanika és az anyagszerkezeti vizsgálatok. Különösen sokat köszönhet a fizika e téren Weyl (658. oldal) és Cartan (728. oldal) munkásságának.

Közben a modern matematika egy másik ágában a matematikai logikában is hatalmas fejlődés indult meg. Ez George Boole (1815-1864), az autodidakta módon kitűnő matematikussá lett angol tudósnak a nevéhez fűződik. Az 1854-ben kiadott

Introduction to the Laws of Thought (Bevezetés a gondolkodás törvényeibe) című könyve az arisztotelészi logikához tért vissza, és sikerült az általa bevezetett szimbólumokkal, algebrai módszerekkel, azonosságokkal leírnia a logika legalapvetőbb törvényeit. Ez a logikai algebra vagy inkább algebrai logika, amelyet Boole-algebrának nevezünk, igen hathatós segítséget nyújtott a matematika számos területének a formalizálásához.

Az algebra további formalizálásában jelentős tényezőként jelentkezett a különböző axiómarendszerek megszületése és vizsgálata. Peano 1888-as aritmetikai és Hilbert 1899-es geometriai axiómarendszere után napvilágot látott a csoportelmélet és a testelmélet axiómarendszere is. Serret és Betti átfogó munkái még nem kellően definiált, inkább csak intuitív jellegű alapfogalmakra építettek. Cayley, Frobenius, Dedekind és Weber már tudatosan axiomatikus tárgyalásra törekedtek.

EDWARD VERMILYE HUNTINGTON (1874-1952) AMERIKAI MATEMATIKUS 1906-BAN A CSOPORTELMÉLETET A KÖVETKEZŐ AXIÓMÁKRA ALAPOZTA:

A G csoport az elemek olyan halmaza, amelyben bármely két x, y elemre értelmezve van az xy szorzat, és ez a művelet rendelkezik a következő két tulajdonsággal:

1. A szorzás asszociatív.

2. A G halmaz minden a, b, elempárjához található a halmaznak két x, y eleme úgy, hogy $xa=b$ és $ay=b$ legyen.

Ugyancsak Huntington állította össze a testelmélet következő axiómáit:

A K test az elemek olyan halmaza, amelyben értelmezve van az $x+y$ összeadás és az $x \cdot y$ szorzás úgy, hogy:

1. Az összeadás és a szorzás kommutatív.

2. Az összeadás és a szorzás asszociatív.

3. A szorzás az összeadásra nézve disztributív: $x(y+z)=xy+xz$, ha *x, y és z K* elemei.

4. Minden K-beli a, *b* elempárra létezik olyan K-beli *x*, amelyre igaz, hogy $a+x=b$.

5. Ha *a* és *b* *K* elemei és $a+a\neq a$, akkor létezik K-ban olyan *y*, amelyre teljesül, hogy $ay= b$.

Az algebra axiomatikus megalapozása felé törekedve fontossá vált a megszabott feltételeket kielégítő összes lehetséges algebrai rendszerek - röviden algebrák - meghatározása, természetesen azonosnak véve az izomorf rendszereket. Elkezdődött a részalgebrák vizsgálata is, vagyis azoknak a részhalmazoknak a kutatása, amelyek éppen úgy eleget tesznek az összes axiómának, mint a részhalmazokat magukba foglaló teljes halmaz.

A századfordulón az algebra fejlődésében különösen fontos szerepet játszott Dedekind, Steinitz és Emmy Noether (1882-1935).

Dedekind az algebrai számelmélet területén továbbfejlesztette a Kummer által megalapozott ideálelméletet (732. oldal), úgy, hogy általánosítani tudta GAUSSnak azt a tételét, amely szerint a Gauss-egészek tényezőkre bontása egyértelmű. Ez az általánosítás úgy szól, hogy az algebrai számok testében a prímideál-tényezőkre való felbontás egyértelmű. Rájött arra is, hogy a Boole-algebrában a legnagyobb közös osztó az „és” műveletnek, és a legkisebb közös többes a „vagy” műveletnek felel meg. Ez a felismerés vezette el a háló fogalmához. Az 1897-es és 1900-as dolgozataiban nemcsak megalapozta a hálóelméletet, hanem alkalmazására is adott példát, továbbá kimutatta, hogy a Boole-algebra egy speciális háló (olyan disztributív háló, amelyben minden elemnek van komplementuma). Amit ma hálónak nevezünk, azt Dedekind duálcsoportnak hívta. Ennek oka a háló definíciójából rögtön kiderül. Ez pedig így szól:

Az elemek egy nem üres *G* halmaza háló, ha értelmezve van benne a metszet (jele: ∩) és az egyesítés (jele: ∪) művelete, a *G* halmaz ezekre zárt, valamint teljesülnek a következő kikötések:

Ha *a, b* és *c* a *G* elemei, akkor

1. Mindkét művelet kommutatív, a*zaz* $a \cap b = b \cup a$ *és* $a \cup b = b \cup a$.

2. Mindkét műveletet asszociatív, azaz

$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ és $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$.

3. Érvényes az ún. elnyelési tulajdonság, azaz

$a \cap (a \cup b) = a$ és $a \cup (a \cap b) = a$.

E követelményekből kitűnik, hogy valóban illik erre a struktúrára a duálcsoport elnevezés is, mert ha a metszés és az egyesítés műveletét felcserélnénk, akkor a definícióban semmi sem változnék. E két művelet dualitása tehát nyilvánvaló. Ha e két műveletre még a disztributivitás is teljesülés e disztributív hálóban van nullelem és egységelem, akkor ez a speciális háló már részhálója egy Boole-algebrának. Ha az *a* elemhez létezik olyan *a'* elem, amelyre igaz, hogy $a \cap a' = 0$ és $a \cup a' = e$, ahol 0 a nullaelem és *e* az egységelem, akkor *a'* komplementuma a-nak. Hálót alkotnak például egy halmaz részhalmazai a metszet és az egyesítés műveletekre vonatkozólag. Belátható, hogy az ilyen háló egyszersmind Boole-algebra is. Dedekind a metszetet a + és az egyesítést a — jellel jelölte.

DEDEKIND HÁLÓELMÉLETÉNEK TOVÁBBI KIBONTAKOZTATÁSÁT AZ 1930-AS ÉVEKBEN KEZDTE MEG GARRETT BIRKHOFF (1911—), AZ AMERIKAI HARVARD EGYETEM PROFESSZORA. AZ 1940-BEN MEGJELENT *Lattice Theory* (Hálóelmélet) című könyvében különösen az absztrakt algebra kombinatorikus jellegű problémáiban mutatta meg a hálóelmélet használhatóságát.

Ugyanebben az időben fejlesztette tovább Tarski cilindrikus algebrák néven a Boole-algebrák elméletét úgy, hogy most már az teljes mértékben tükrözi a modern logikát, és nemcsak annak arisztotelészi változatát.

Ahogy Dedekind a hálóelméletet, ugyanúgy alapozta meg axiómákkal a testelméletet Ernst Steinitz az *Algebraischer Theorie der Körper* (A testek algebrai elmélete) című könyvében 1910-ben. Amíg Huntington axiómarendszerét az axiómamódszerek általános vizsgálata miatt szerkesztette meg, addig STEINITzet elsődlegesen

algebrai szempontok irányították. Áttekintést akart nyerni a lehetséges testtípusok, az ezek közötti alapvonatkozások fölött. Testaxiómáit a következőképpen fogalmazta meg:

Legyen két művelet: az egyiket nevezzük összeadásnak (jele: $+$), a másikat pedig szorzásnak (jele: $\bullet$), de ezek csak elnevezések, nem jelentik föltétlenül az aritmetikai összeadást és szorzást.

A *T* test olyan halmaz, amely zárt az elemei között értelmezett összeadásra és szorzásra, valamint ha *a, b* és c a *T* halmaz elemei, akkor e műveletekre teljesülnek a következő kikötések:

1. Az összeadás asszociatív, azaz $(a+b)+c= a+(b+c)$.

2. Az összeadás kommutatív, azaz $a+b=b+a$.

3. A szorzás asszociatív, azaz $(a \bullet b) \bullet c=a \bullet (b \bullet c)$.

4. A szorzás kommutatív, azaz $a \bullet b = b \bullet a$.

5. Érvényes a disztributív törvény, azaz $a \bullet (b+c)=a \bullet b+b \bullet c$.

6. A T halmazban elvégezhető a kivonás, azaz a benne levő *a* és *b* elemekhez egy és csak egy olyan *x* létezik, amely kielégíti az $a+x=b$ egyenletet.

Az 1., 2. és 6. axiómából következik a 0 elem létezése.

7. A T halmazban elvégezhető az osztás, azaz ha *a* nem 0 elem, akkor létezik a *T* halmaznak egy és csak egy olyan *x* eleme, amely kielégíti az $ax=b$ egyenletet.

Steinitz könyvében rögtön felhozta példaként a racionális számok, a valós számok, valamint a komplex számok halmazát. A véges testek közül ismerték akkor már a prímszám modulusú maradékosztályok halmazát is (Gauss). Steinitz részletesen tárgyalta az absztrakt testek elméletét, kitérve a résztest, a testbővítés, az adjunkció és az integritási tartomány fogalmára is. Nagy érdeme, hogy első vizsgálója volt a most már valóban teljesen absztrakt testelméletnek, és kapcsolatokat teremtett a matematika más nagy területével is (halmazelmélet,

DETERMINÁNSELMÉLET).

A Kummer által megteremtett és Dedekind munkájával továbbfejlesztett ideálelmélet igazán Emmy Noether német matematikusnő kezében vált teljesen absztrakt algebrai ággá. Az 1964-es New York-i világkiállításon a matematika fejlődését bemutató teremben 80 kiváló matematikus képe között csupán egyetlen nő képmása szerepelt, Emmy NOETHERé. Főleg 1920 és 1926 között bontakoztatta ki az absztrakt ideálelméletet. Amint azt Van der Waerden megfogalmazta: Noether meggyőződése volt, hogy a számok, függvények és műveletek összes kapcsolata csak akkor válik igazán világossá, általánosíthatóvá és termékennyé, ha megszabadítjuk e fogalmakat minden konkrét tárgyi jellegtől, és a legáltalánosabb fogalmi összefüggésekre vezetjük azokat vissza. Ebben a szellemben írta meg 1921-ben *Idealtheorie in Ringbereichen* (Ideálelmélet a gyűrűtartományokban) című tanulmányát. Ebben az algebrai számtestben értelmezett ideál fogalmát átvitte tetszőleges gyűrűtartományra. A gyűrű olyan R halmaz, amelyben két művelet van értelmezve, nevezzük ezeket összeadásnak és szorzásnak, és teljesülnek a következő axiómák:

1. R-ben az összeadás asszociatív, invertálható és kommutatív (azaz R az összeadásra nézve Abel-csoport).

2. R a szorzásra nézve zárt, és benne a szorzás asszociatív (azaz R a szorzásra nézve félcsoport).

3. Fennáll a disztributív törvény a jobb és a bal oldali szorzásra is, azaz: $a(b+c)=ab+ac$ *és* $(b+c)a=ba+ca$, ha a, b és c az R halmaz elemei.

A gyűrű általános fogalmát már 1914-ben bevezette Abraham Fraenkel (1891-1965) virachi matematikus, de ő a gyűrűknek csak egy igen speciális típusával foglalkozott. E terület igazi felvirágoztatói Emmy Noether, Emil Artin (1898-1962) osztrák származású amerikai, és a körülöttük kialakult algebrai iskola tagjai voltak, köztük Helmut Hasse (1898-1979), Wolfgang Krull (1899-), Otto Schreier (1901-1929).

NOETHER GYŰRŰELMÉLETE ÚGY ALAKULT KI, HOGY ÖSSZEÖTVÖZTE AZ ALGEBRAI EGÉSZEK IDEÁLJAINAK DEDEKIND-FÉLE ELMÉLETÉT ÉS

a polinom-ideáloknak az algebrai geometriából származó Lasker-féle elméletét. Emanuel Lasker (1868-1941) amerikai matematikus (mellesleg sakkvilágbajnok) volt, akinek ideálelméletét továbbfejlesztette Louis Floyd Macaulay (1924-), a topológiával és az absztrakt terekkel foglalkozó amerikai professzor (Macaulay-Lasker-féle elmélet). Noether ideálelmélete jelentősen alapozott az absztrakt modulus fogalomra. Joseph Wedderburn (1882-1948) amerikai matematikus bevezette a jobb és a bal ideálok fogalmát 1907-ben. Mindezt összevéve: az utóbb említett matematikusok munkája nyomán megélénkült az algebrai struktúrák iránti érdeklődés, és a megszilárdult, hasznosnak bizonyuló új fogalmak biztosították a továbbfejlődést. Az 1920-as évek végén tehát teljes páncélzatban, azaz absztrakt és axiomatikus megalapozással készen álltak a modern algebra alapépítményei: a csoportelmélet, a testelmélet és az ideálelmélet.

Igazi nagy, a lelkesedést továbbfokozó forrássá lett 1930-1931-ben Barthel Leendert van der Waerden (1903—) amszterdami, majd zürichi professzor *Moderne Algebra* című könyve. Ennek a műnek az alapjait a halmazelméleti fogalmak, a számosságok és a leképezések alkotják. Az egyenletek tárgyalását hat oldalon intézi el a szerző. A modern algebra tárgya már az algebrai struktúrák vizsgálata. Van der Waerden könyve számos fiatal matematikust késztetett új vizsgálatokra, és a modern algebra az 1930-as évek után hatalmas, virágzó fejlődésbe kezdett. A fejlődés olyan rohamos volt, hogy Van der Waerden könyvének címét az 1959-es kiadásban már *Algebrára* egyszerűsítette, mert közben a „modern algebránál” még modernebb született. A következő években az absztrakt algebra területén különösen kiemelkedő munkát végzett Garret Birkhoff amerikai és Neumann János budapesti születésű amerikai matematikus (Neumann-algebrák). Birkhoff 1941-ben írta közös könyvét Saunders MacLane (1909-) chicagói professzorral. Ez a *Survey of Modern Algebra* (A modern algebra áttekintése) nagyban hozzájárult a modern algebra népszerűsítéséhez.

Franciaországban 1945 és 1955 között a *Bourbaki-csoport* kötetei terjesztették az absztrakt algebra eszméit. Bourbaki egy görög

származású francia tábornok volt, aki a német-francia háborúban 1871-ben csapatával átment Svájcba, és ott öngyilkosságot kísérelt meg. A sikertelen próbálkozás után végül is 81 éves korában hunyt el. Szobra Nancyben áll, és ez adta az ötletet néhány tréfás kedvű ifjú matematikusnak, hogy Nicolas Bourbaki álnéven jelentessék meg közös művűket. Hogy a társaság fiatalos rugalmasságát biztosítsák, az alapszabály minden 50 évet elért tagot kizárt a csoportból, és a kizártak csak tiszteletbeli tagokként szerepelhettek. Végtére is ez a tréfás keretek közt induló vállalkozás igen komoly eredményeket hozott. Művük: a tízkötetesre tervezett *Eléments de Mathématique* (A matematika elemei), amely 1939-től kezdve jelent meg és amelyet bevezetőjükben a szerzők a matematika épületének neveztek, azt tűzte ki célul, hogy a matematika egészét szigorú axiomatikus módszerrel a halmaz és a függvény fogalmára építi fel. A *Bourbaki-csoport* az egész matematikát az absztrakt halmazstruktúrák és a közöttük értelmezett leképezések összességének tekintette.

A Van der Waerden 1959-es *Algebrája,* utáni években a Birkhoff-MacLane szerzőpár is új *Algebrával* jelentkezett, amelyben az absztrakció még tovább fokozódott. Ebben a könyvben a „tiszta algebra” alapjait a morfizmusok, a kategóriák és az univerzális algebra eredményei alkották. A morfizmusok és a kategóriák hosszadalmas magyarázata helyett inkább egy példával sejtetném meg a fogalmak lényegét. Például a topologikus terek folytonos leképezéseinek az együttese a topologikus terek kategóriája. A most szóba került leképezés a morfizmus. Az absztrakt algebra alapvető elméleteit összefogó, az egész algebrára érvényes elméleteket tárgyalja az univerzális algebra. A kategóriaelmélet alapjait Sámuel Eilenberg (1913-) francia és MacLane amerikai matematikusok könyve, a *General theory of natural equivalences* rakta le 1945-ben. Az univerzális algebra első jelentős eredményeit BIRKHOFFnak és TARSKInak az 1930-as évektől megjelenő tanulmányai tartalmazzák. Különösen nagy lendületet vettek az univerzális algebrai kutatások 1960 után, jelentős mértékben magyar kutatóknak köszönhetően [Gratzer György, Schmidt Tamás (1936-), Fried Ervin(1929-)]. Ez a lendület fokozódott a Tarski-iskola munkássága nyomán a hetvenes évektől.

A XX. század első felében komoly virágzásnak indult a matematikai

logika is. Leopold Löwenheim (1878-1957) német, Toralf Albert Skolem (1887-1963) norvég és Alfred Tarski (1901-1983) lengyel származású amerikai matematikusok nevét viseli az a törvény (1915-1920), amely szerint a halmazelmélet klasszikus axiómarendszere (ha ugyan ellentmondásmentes) teljesülhet akárhány nemizomorf osztályon (univerzumon) is, tehát az axiómarendszer logikai szerkezete nem biztosítja, hogy az csak egyetlen osztályon (univerzumon) legyen igaz. Ez a halmazelméleten kívül is, a matematika bármely axiómarendszerére igaz. Egy axiómarendszerhez tehát több (nemizomorf) modell is készíthető. A matematikai logika modern formáját Tarski alakította ki. Ő hozta létre a modell-elméletet, és Frege nyomán ő mondta meg matematikai szabatossággal, hogy mit jelentenek a logika formulái.

Ez idő tájt a matematikát sikerült logikai alapokra helyezni, feloldva a matematika korábbi válságát (amely a matematikai igazság és a matematikai precizitás fogalmaival kapcsolatos). A megoldás jellege: Az egész matematikát axiomatikusan építjük fel, tehát a matematikának van egyetlen rögzített axiómarendszere, és egy matematikai állítást igaznak fogadunk el akkor és csak akkor, ha ebből az axiómarendszerből bizonyítható.

A már idézett Löwenheim-Skolem-Tarski-tétel egyenes folytatásaként kapott Tarski olyan eredményeket, amelyek mind abba az irányba mutattak, hogy valamely rögzített realitás kimerítő leírása nem oldható meg egyetlen elmélet segítségével. Ez a folyamat az 1930-as években tetőzött, amikor Tarski bizonyította az „igazság” definiálhatatlanságát, és ennek szintaktikai (alaktani) párhuzamaként Kurt Gödel bécsi matematikus igazolta, hogy minden (figyelemre méltó) axiómarendszer nyelvén megfogalmazható olyan állítás, amely az axiómarendszer segítségével se nem bizonyítható, se nem cáfolható. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a kérdéses állítás az axiómarendszertől független. Gödel a tételét kicsit erősebb alakban mondta ki, és abban az alakban világosabban látszik a Tarski-tétellel való párhuzam. Mindkét tétel az önreferenciával (önmagára való utalással) kapcsolatos. Gödel szerint a rendszer saját konzisztenciáját nem tudja bizonyítani, és Tarski szerint saját formuláinak igazságáról nem tud beszélni. Ez azért érdekes, mert a számítástudományban és

a kibernetikában ez a fajta önreferencia kulcsfontosságúnak bizonyult. Ezt igen jól illusztrálja D. R. Hofstadter *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid* című könyvének sikere a szakmai körökben is.

E tételek megrázták az egész tudományos világot, hiszen a matematika, és rajta keresztül az egzakt tudományok megalapozásáról kiderült, hogy az eddigi elképzelések értelmében (például Hilbert programja szerint, 642. oldal) nem megoldható. Vannak tehát matematikai állítások, amelyek függetlenek a matematika axiómáitól, azaz matematikai szempontból se nem igazak, se nem hamisak. Egy ideig lehetett reménykedni abban, hogy ezek az állítások nagyon mesterkéltek, de 1963-ban Paul Cohen bebizonyította a kontinuumhipotézis (771. oldal) függetlenségét. Később kimutattak néhány, a természetes számokra vonatkozó, tehát számelméleti (azaz még konkrétabb) állítás függetlenségét is.

Anatolij Ivanovics Malcev (1909-1967) szovjet, Alfred Tarski lengyel, valamint a ma is dolgozó Leon Henkin és James Donald Monk (1930-) amerikai matematikusok jelentősen továbbfejlesztették a matematikai logikát. Az utóbbi három kutató munkásságának eredményeként az algebra és a logika szintézisét jelentő algebrai logika elnyerte mai formáját. Ebben a témakörben pillanatnyilag (1985) a legújabb monográfia a Henrin, Monr, Tarsri, Andréka, Németi szerzőötös *Cylindric set algebras* (Cilindrikus halmazalgebrák) című könyve.

Az új logikai eredmények lehetővé tették az algebra további fejlődését és új irányainak a kialakulását.

Ilyen új terület a modellelmélet, amely a formális nyelv és annak modelljei közötti kapcsolatokat kutatja. Úttörői: Löwenheim (1915), Srolem (1920), Tarsri (1931) és Malcev (1936). Önálló kutatási területnek számít Henrin és Tarsri 1940-1950-es munkáitól.

Napjainkban bontakozott ki az új numerikus algebra is, amely azokkal az algebrai kérdésekkel foglalkozik, amelyeket a nagy sebességű digitális számítógépek gyártása vetett fel (Richard Varga, James Wilkinson, David Young stb.).

Újkeletű az automataelmélet is, amely a véges számú alkatrészekből álló univerzális számítógépek tanulmányozását helyezi tisztán elméleti alapokra [Alan Mathison Turing (1912-1954), Wang Hao (1921-)]. Az algebrai automataelmélet ma már az algebrának olyan absztrakt fejezeteit is használja, mint a kategóriaelmélet és az univerzális algebra.

Megemlítem még az 1950 táján, ugyancsak a számítógépek hatására létrejött kombinatorikus algebrát, amely a matematikai gondolatmenetek elemzéséhez kombinatorikus módszereket használ (Donald Knuth, Rota, V. S. Mendelsohn, E. F. Reckenbach). A kombinatorika ma élő legnagyobb alakja a magyar Erdős Pál, és ugyancsak világszerte elismert eredményekkel gazdagítja ezt a területet tanítványa, Lovász László.

Hazánkban az algebra a matematikai kutatásoknak igen erős ága. Ezt érthetővé teszi, hogy a magyar matematikai múltban az algebra komoly szerepet játszott. Elsőként kell megemlékeznünk a lineáris algebra Hunyady-Scholtz-féle determináns tételéről. A tételt 1875-ben közölte Hunyady Jenő (1838-1889) műegyetemi tanár, és javított rajta 1877-ben Scholtz Ágoston (1844-1916), a budapesti egyetem professzora. E tételt nagymértékben általánosította Hajós György. A determinánselmélet egyik történetírója, Muir 1914-ben megállapította, hogy a komponált determinánsokra vonatkozó tételeknek mintegy a negyede magyar eredmény.

A XIX. század végén, a XX. század elején a legkiválóbb magyar algebristák Rados Gusztáv (1862-1942), Kürschák József és Bauer Mihály műegyetemi tanárok voltak. Különösen Kürschák értékeléselmélete hozta meg a nemzetközi elismerést 1912-1913-ban. A magyar kutatók eredményei közül kiemelkedik Haar Alfréd kolozsvári, majd szegedi professzornak a topologikus csoportok elméletébe bevezetett mértékfogalma: a folytonos csoportok invariáns mértéke.

A csoportelméletnek nemzetközileg is nagyra értékelt másik magyar alakja Rédei László (1900-1980) szegedi professzor, 1967 óta az MTA Matematikai Kutató Intézetében az algebrai osztály vezetője. ő a magyar absztrakt algebrai iskola megalapítója.
Sikeresen foglalkozott az absztrakt algebra minden ágával. Kiemelkednek a csoportra, a félcsoporta vonatkozó, valamint a

gyűrűelméleti és testelméleti felfedezései. Számos kiváló magyar matematikust nevelt. Az ő tanítványa volt többek közt Szele Tibor (1918-1955) is, szegedi, majd debreceni professzor, aki az Abel-csoportok és -gyűrűk kutatásában végzett kimagasló munkát. Körülötte alakult ki a - korai halálával sajnálatosan megszűnt - debreceni algebrai iskola. Először ért el eredményt abban a kérdésben, hogy adott Abel-csoportra milyen gyűrűk építhetők. Ezek voltak a gyűrűk additív csoportjára vonatkozó kezdeményező vizsgálatok. Az Abel-csoportok kiváló kutatója volt Hajós György is (Hajós-féle faktorizáció).

Hazánkban az univerzális algebrák iránti érdeklődést még 1957-ben Kalmár László (1905-1976) szegedi professzor keltette fel. Kalmár a számítástudomány és főként a logika világhírű művelőjeként talán elsőnek ismerte fel, hogy az univerzális algebra nemcsak az absztrakt algebra egységesítését szolgálja, hanem azon túlmenően olyan önálló kérdéseket is vizsgál, amelyek megválaszolására például a számítástudományban van nagy szükség.
Kalmár leegyszerűsítette a Gödel-féle nemteljességi tétel bizonyítását. Az övénél egyszerűbb igazolás még nem született.

A jelenlegi magyar algebrai kutatásokra a külföldi tudósok közül nagy hatással voltak Birkhoff és Kuros (1908-1971) művei.
Ma erősen éreztetik hatásukat Tarski, Malcev, Henkin és Monk munkái is. A magyar algebristák kutatási területe felöleli az algebrának szinte az egész tárgykörét, és egymással jól együttműködve, sok értékes külföldi kapcsolatot ápolva, nagy nemzetközi tekintélynek is örvendő munkásságot fejtenek ki.

A HALMAZELMÉLET KIALAKULÁSA

Az ember által alkotott fogalmak közül különös érdeklődésre tarthat számot a végtelen fogalma, már csak azért is, mert csupa véges természetű tapasztalataink alapján egyáltalában kialakulhatott, ami nem is olyan magától értetődő. Megközelíteni csak gondolkodás útján lehet, közvetlen szemlélettel meg nem fogható. Foglalkozik vele a filozófia és a matematika. A materialista filozófia például hirdeti a tér és az idő végtelenségét, míg a vallásos jellegű filozófiák a világot teremtett valóságnak vélik, amelynek kezdete és vége van. Arisztotelész kétféle végtelent ismert. Az egyik, amelyiket potenciális végtelennek mond, nem más, mint valamely folyamatnak a korlátlan továbbfolytathatósága. A potenciális végtelent a matematika is ismeri. Ilyen értelemben végtelen például a természetes számok sorozata, és minden olyan számsorozat, amelynek minden eleméhez hozzárendelhető a természetes számok sorozatának egy és csak egy eleme. A végtelen sorozatok között vannak olyanok, amelyek elemei egy véges szám mindjobban és jobban közelítő értékei. Ezt a számot nevezzük a sorozat határértékének. Amint láttuk, pontosan ennek a fogalomnak a szabatos meghatározásán és kezelésén alapszik az egész matematikai analízis, illetve a differenciál- és integrálszámítás.

A matematikában azonban nagy - talán még az előbbinél is nagyobb - szerep jutott Arisztotelész másik végtelenjének, az ún. aktuális vagy befejezett végtelennek. Ha például nem a természetes számok folyton növekvő sorozatára gondolunk, hanem a természetes számok összességére, akkor érezzük, hogy a kétféle végtelen között nagy különbség van. Az egyiknél lépésről lépésre bármilyen számig eljuthatunk, aztán még tovább. A természetes számok összessége viszont lezárt, befejezett gondolati egység, amelyhez hozzátenni vagy amelyből elvenni egyetlen természetes számot sem lehet az összesség megmásítása nélkül. A matematikai aktuális végtelen nagyon nehezen nyert létjogosultságot a matematikában, hiszen ebből a fogalomból számos szokatlan, tehát első látásra hihetetlen állítás következett. Ilyenek voltak már az eleai Zénón meghökkentő

paradoxonjai (170 oldal).

A véges halmazok régtől élő intuitív fogalma nem okozott különös problémát, de az már igen, hogy amikor Galilei minden négyzetszám alá egy természetes számot írt:

$l^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, n^2, \ldots$

1, 2, 3, 4, 5, 6, *n*, ...

és ezzel mintegy megszámlálta a négyzetszámokat, akkor ebből azt a következtetést lehetett levonni, hogy ugyanannyi négyzetszám van, mint ahány természetes szám. Ez bizony már elég hihetetlennek tűnik, hiszen a négyzetszámok egymástól mind nagyobb távolságban szóródnak el a természetes számok között. Felvetődött a kérdés tehát: Miben különböznek a véges halmazok a végtelen halmazoktól? Miért nincs az egyikkel semmi baj, és miért okoz a másik logikátlannak tűnő megállapításokat? Az első, aki e kérdéscsoportot megközelítette, az íróasztalfiókjának író Bolzano volt. Csak a halála után, 1851-ben kiadott *Paradoxien des Unendlichen* (A végtelen paradoxonjai) című könyvében olvashatott Dedekind ilyen gondolatokat: Két végtelen halmaz olyan kapcsolatba hozható, hogy az egyik minden elemét párba állíthatjuk a másik valamelyik elemével, mégpedig úgy, hogy a két halmaz egyik eleme sem marad pár nélkül, és egyik elemhez sem kapcsolódik párként egynél több elem. Bolzano paradoxonként még azt is megfogalmazta, hogy ilyen párokba rendezés lehetséges akkor is, ha egy végtelen halmazról és ennek egy szintén végtelen részhalmazáról van szó. Ez utóbbira példaként hozta fel a [0; 5] intervallumnak a [0; 12] intervallumra leképezését, amelyet előír például az 12

$y = (12/5)x$ invertálható függvény. Bolzano egyik törekvése volt, hogy

az egész matematikát egy általános alapra helyezze, és meg is fogalmazta, hogy ez az alap a ma halmazelméletnek nevezett tudomány, amit ő „Grössenlehre”-nek, mennyiségtannak hívott.

Dedekind felismerte, hogy a végtelen halmaz és annak végtelen részhalmazai közti Bolzano-féle egymáshoz

rendelés az a művelet, amely a véges és végtelen halmazokat elválasztja, amely a végtelen halmazok definiálására alkalmas. Végtelen halmazoknak nevezhetjük tehát azokat, amelyeknek létezik részhalmaza úgy, hogy a teljes halmaz és e részhalmaz elemei között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető. A végtelen halmazok e definícióját 1872-ben közölte Dedekind *Stetigkeit und irrazionale Zahlen* (Folytonosság és irracionális számok) című könyvében, majd alkalmazta is az 1888-as *Was sind und was sollen die Zahlen* (Mik és mit jelentenek a számok) című tanulmányában.

Georg Cantor 1874-ben Interlakenben ismerkedett meg DedeKINDdel. E két tudós között meleg barátság szövődött, amelyet fenntartott a köztük kifejlődött levelező viszony is. Cantor egy jelentős lépéssel DEDEKINDnél is továbbjutott. 1874-ben jelent meg a Crelle-féle folyóiratban a matematikában valóban korszakalkotó cikke, amelyben ő szintén felismerte a végtelen halmazok jellemző tulajdonságát, sőt továbblépve kifejtette, hogy léteznek végtelen halmazok, amelyek alapvetően különböznek egymástól. Először is két halmazt ekvivalensnek mondott, ha elemeik között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető. A véges halmaz tehát egyetlen valódi részhalmazával sem ekvivalens. A végtelen halmaznak pedig létezik olyan részhalmaza, amellyel ekvivalens. Azután bevezette a végtelen halmazok megszámlálhatóságának a fogalmát. Megszámlálható egy végtelen halmaz, ha elemei kölcsönös és egyértelmű módon társíthatók a természetes számokkal. A páros számok halmaza például megszámlálható halmaz, mert a

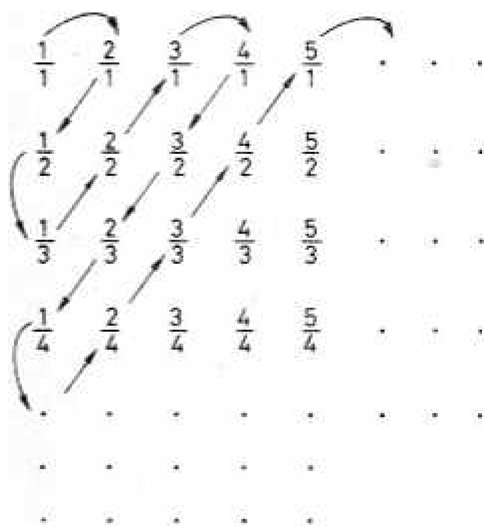
2, 4, 6, 8, 10, 12, ...,2*n,* ...

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., *n,* ...

felírás szerint a páros számok kölcsönösen és egyértelmű módon hozzárendelhetők a természetes számokhoz. E tényt Cantor úgy is megfogalmazta, hogy a páros számok halmazának számossága akkora, mint a természetes számok halmazának

számossága. E két halmaz ekvivalens, azaz számosságuk azonos. Minden olyan halmaznak, amelynek elemei ilyen sorozatba rendezhetők, vagyis megszámlálhatok, akkora a számossága, mint a természetes számok halmazának. CANTOR kimutatta, hogy a racionális számok halmaza is megszámlálható. Ha ugyanis a racionális számokat a *359. ábra* szerint felírjuk, és az 1/1-től kezdve a nyilak által jelzett sorrendbe rendezzük, akkor világos, hogy a racionális számok a

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots$$



359. ábra

sorozatban rendeződnek. Az a lényegen nem változtat, csupán szépíti e sorozatot, ha azokat az elemeit nem írjuk fel, amelyek előbb már szerepeltek. Az eljárás azt is mutatja, hogy a megszámlálhatóan végtelen sok, megszámlálható végtelen halmaz egyesítése is megszámlálható.

Az igazi meglepetést az okozta, hogy CANTOR rájött arra, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható, sőt a valós számoknak a 0 és 1 közé eső részhalmaza sem. A 0 és 1 közötti valós számokat ugyanis igyekezett sorozatba rendezni, és kimutatta,

hogy ez lehetetlen. Az említett valós számok mindegyikét végtelen tizedes tört alakba írva, az elképzelt sorozat egymás utáni elemei így sorakoznának:

$$a_1 = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$$

$$a_2 = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$

$$a_3 = 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$

$$\ldots$$

Az a_{ik} jelenti a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek valamelyikét. Ez az összeállítás egyértelmű, ha nem vesszük figyelembe azokat a végtelen tizedes törteket, amelyekben valamely helytől kezdve végig 0 szerepel. Így például a 0,10 és a 0,09 egyenlő számok közül csak az utóbbi fog szerepelni, tehát a (0,1] intervallum minden száma csak egyszer fordul elő a felsorolásban. Kérdés azonban, hogy valóban előfordul-e mindegyik? Cantor kimutatta, hogy nem. Található ugyanis olyan valós szám, amely e felírásban nem szerepel. Ilyen például a $b = 0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ végtelen tizedes tört, ha $b_k = 1$, amikor $a_{kk} = 9$, és $b_k = a_{kk} + 1$, amikor $a_{kk} \neq 9$. Az így felírt *b* számra igaz, hogy $0 < b \leq 1$, de különbözni fog minden a_k valós számtól, hiszen az átlóban elhelyezkedő k-adik tizedes jegyükben eltérnek egymástól. A valós számok halmaza tehát nem megszámlálhatóan végtelen, viszont az összes racionális számból álló részhalmaza megszámlálhatóan végtelen. A valós számok halmazának számosságát Cantor kontinuumszámosságnak nevezte, mert e halmaz elemei kölcsönös és egyértelmű kapcsolatba hozhatók egy folytonos vonal pontjaival (számegyenes). A valós számhalmaz és a természetes számok halmazának számossága tehát különböző. A következő kérdés az volt, hogy e két különböző számosságot meg lehet-e nagyság szerint különböztetni. Cantor erre a kérdésre igennel felelt a következő definíció megfogalmazásával: A *H* halmaz számossága nagyobb a *K* halmaz számosságánál, ha *H*-nak létezik a K-val ekvivalens részhalmaza, de *H* nem ekvivalens K-val. Eszerint a kontinuumszámosság nagyobb a megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságánál.

Cantor és utána sokan mások is azt tapasztalták, hogy a valós számok halmazának egy nem megszámlálhatóan végtelen részhalmaza mindig kontinuumszámosságú. E tapasztalatok alapján Cantor megfogalmazta az ún. kontinuumhipotézist, amely azt állítja, hogy nincs olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb volna a megszámlálhatóan végtelen halmazok számosságánál, de kisebb lenne a kontinuumszámosságnál. Cantor a halmazok számosságát a héber א (alef) betűvel jelölte. $_{0}\aleph$ jele a legkisebb számosságnak, a megszámlálható halmazok számosságának. Cantor sok más számhalmaz számosságáról is kimutatta, hogy azok nagyobbak $_{0}\aleph$ -nál (729. oldal).

A következő, természetes módon felvetődő kérdés az volt, hogy van-e a kontinuumszámosságnál nagyobb számosság? Cantor erre a kérdésre is igennel felelt. Kimutatta, hogy valamely halmaz számosságánál nagyobb számosságú a halmaz hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazából alkotott halmaz. Hozzuk közelebb ezt a fogalmat egy konkrét példával. Rendre növelve a halmazok elemeinek a számát, írjuk az első oszlopba magát a halmazt (H_n), és vele egy sorba, a második oszlopba pedig a részhalmazok halmazát, a hatványhalmazt (H_{nh}). Az üres halmaz (Ø) minden halmaz részhalmaza, és minden halmaz önmagának is részhalmaza lévén:

$H_0 = \emptyset \qquad H_{0h} = \{\emptyset\}$

$H_1 = \{1\} \qquad H_{1h} = \{\emptyset, \{1\}\}$

$H_2 = \{1, 2\} \qquad H_{2h} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$H_3 = 1, 2, 3 \qquad H_{3h} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\ldots \qquad \ldots$

A felsorolás mutatja, és teljes indukcióval igazolható, hogy az n elemű H_n halmaz H_{nh} hatványhalmazának 2^n eleme van, és így jogos a hatványhalmaz elnevezés. Véges halmazok esetén nyilvánvaló, hogy hatványhalmazuk számossága nagyobb az alaphalmazénál. Ez azonban igazolható végtelen halmazokra is, ami viszont azt jelenti, hogy minden halmaz számosságánál van nagyobb számosság, azaz nincs legnagyobb számosság. Valamely halmaz számosságát szokás a halmaz kardinális számának is

nevezni.

A számosság CANTORnál még igen homályos fogalom. Szokás idézni három definícióját is, de ezek még egymástól is eltérnek, és csak intuitíve fejezik ki a később kialakult pontos fogalmat. A véges halmazoknál, ahol egybeesik az elemek számával, a kardinális szám természetes szám. A végtelen halmazok összehasonlításának eredményeként láttuk, hogy bizonyos értelemben az egyiknek több eleme van, mint a másiknak. Pontosabban: Cantor a végtelen halmazok mindegyikéhez is hozzárendelte a számosságnak nevezett fogalmat úgy, hogy azt az ekvivalens halmazoknál ugyanannak, a nem ekvivalens halmazoknál pedig különbözőeknek vette. Amint láttuk, a számosságok halmazán is lehet definiálni a természetes számokra értelmezett „kisebb” ($<$) relációt, és sikerült bizonyítani a „kisebb” reláció minden jellemző tulajdonságát, kivéve az ún. trichotómiát, amely az a és b két tetszőleges természetes szám esetében úgy szól, hogy az $a=b$, az $a< b$ és $a>b$ három lehetőség közül az egyik és csak az egyik mindig teljesül. Ha pedig a trichotómia a kardinális számokra nem volna érvényes, akkor léteznék legalább két halmaz, amelyekről nem lehetne eldönteni, hogy számosságuk egyenlő-e, vagy az egyiké nagyobb, esetleg kisebb a másikénál.

Cantor azt sejtette, hogy a trichotómia a számosságok rendezésére igaz. A halmazelméleti kutatások során számos kísérlet történt a trichotómia szabatos bizonyítására. Kiderült, hogy a trichotómia teljesen olyan, mint a párhuzamossági axióma a geometriában. Ez úgy értendő, hogy azokból az egyszerű és intuitív módon igaznak elfogadott állításokból, amelyekből később kialakult a halmazelmélet Zermelo-Fraenkel-féle axiómarendszere, nem lehet sem a trichotómiát, sem annak ellenkezőjét bizonyítani. Ezért a halmazelméletben a trichotómiát ma axiómának tekintik, amelyet hozzá lehet csatolni a Zermelo-Fraenkel-féle axiómákhoz.

A későbbi vizsgálatok során kiderült, hogy a trichotómia több sarkalatos halmazelméleti állítással ekvivalens. Ilyen például az a már említett állítás, hogy megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése ismét megszámlálható, illetve

hogy ez az állítás általánosítható tetszőleges számosságra. A trichotómiával ekvivalens az ún. kiválasztási axióma is. Ez azt mondja ki, hogy, ha az *A* halmaz elemei nem üres halmazok, akkor van olyan *B* halmaz, amelynek *A* minden elemével pontosan egy közös eleme van.

Megállapodás szerint, ha a trichotómiáról mint axómáról beszélünk, akkor az egységesség érdekében kiválasztási axiómának hívjuk. A mai matematikában, ha egy tétel a kiválasztási axióma feltevése nélkül is igaz, akkor az „erősebben" igaznak számít. Az ún. konstruktív matematika, amelynek különösen a Szovjetunóban vannak hívei, a kiválasztási axiómát nem fogadja el. Mindenesetre a matematika egy vizsgálati területe azon tételek tisztázása, amelyek igazak a kiválasztási axióma nélkül is.

GOTTLOB FREGE (1848-1925) jénai professzor a számosságot azonosította azon ekvivalens halmazok osztályával, amelyekre a számosság jellemző. A jobb megértés kedvéért gondoljuk át a következőket:

Az *A* halmazon értelmezett ekvivalenciarelációnak nevezzük azt a relációt, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Ilyen például a sík egyeneseinek halmazán értelmezett párhuzamosság relációja. Ez reflexív, mert ha *a, b* és *c* a sík három egyenese, akkor *a* || *a.* Szimmetrikus, mert ha *a* || *b,* akkor *b* || *a.* Tranzitív is, mert ha *a* || *b* és *b* || *c,* akkor *a* || c. A párhuzamosság relácója a sík egyeneseinek a halmazát részhalmazokra bontja: az a-val párhuzamos egyenesek halmazára, a b-vel párhuzamos egyenesek halmazára, a c-vel párhuzamos egyenesek halmazára stb., ahol *a*|| *b*||c|| ... Ezen részhalmazok páronként diszjunktak, azaz páronként nem tartalmaznak közös elemet. Általánosságban az *A* halmazon értelmezett valamely ekvivalenciareláció az *A* halmazt „osztályozza", azaz páronként diszjunkt részhalmazokra, osztályokra bontja. A mi esetünkben a végtelen halmazok összességén értelmezett számosság ekvivalenciareláció, tehát a végtelen halmazok összességét páronként diszjunkt halmazokra, ekvivalenciaosztályokra bontja. Ezen ekvivalenciaosztályok halmazainak számossága azonos. FREGE a számosságot magával az ekvivalenciaosztállyal azonosította, tehát az egyenlő számosság alapján keletkezett ekvivalenciaosztályokat nevezte kardinális

számoknak.

Első pillanatra különösnek tűnik a számosságnak és bizonyos osztályoknak az azonossága. Talán a furcsaságnak ez az érzése eltűnik, ha megfigyeljük, miként értelmezte NEUMANN JÁNOS halmazokként a természetes számokat a ZERMELÓHOZ 1923. augusztus 15-én írt levelében, és miként jutott ezáltal a rendszám egyféle definíciójához. Fogadjuk el a következő definíciókat: Jelentse a 0 számot az üres halmaz, az 1 számot az a halmaz, amelynek egyetlen eleme az üres halmaz, a 2 számot az a halmaz, amelynek eleme az imént értelmezett 0 és 1 stb. Legyen tehát:

$$0 = \emptyset,$$

$$1 = \{\emptyset\},$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$$

$$\ldots$$

Ugyanez rövidebben:

$0=\emptyset,$

$1=\{0\},$

$2=\{0, 1\},$

$3=\{0, 1, 2\},$

$4=\{0, 1, 2, 3\},$

$\ldots$

$n=\{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\},$

$\ldots$

$\omega=\{0, 1, 2, 3, \ldots\},$

ω-val jelöltük az előbbi módon értelmezett természetes számok halmazát. E felfogásban tehát a természetes számok a jól rendezett ω halmaz megfelelő szeletei. Így minden *n* természetes szám azonos az ω halmaznak azzal a valódi szeletével, amelyet az *n* eleme generál. Ez a szelet természetesen maga is halmaz, méghozzá halmazok halmaza. Az így kibontott számfogalomnak megfelelő számot nevezzük rendszámnak. Ez már értelmezhető végtelen halmazokra is.

Legyen ugyanis ω ismét a természetes számok halmaza, és nevezzük magát az ω-t is rendszámnak. Ekkor az ω-ra következő rendszámok:

$$\omega+1=\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega\},$$

$$\omega+2=\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, (\omega+1)\},$$

$$\omega+3=\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, (\omega+1), (\omega+2)\},$$

...

$$\omega+\omega=\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, (\omega+1), (\omega+2), (\omega+3), \ldots\}.$$

A sorozat folytatható. Jelöljük az (ω + ω)-t ω2-vel, akkor:

$$\omega2+1=\{0, 1, 2, 3, \ldots; \omega, (\omega+1), (\omega+2), \ldots; \omega2\}.$$

...

Így tart tovább a rendszámok képzése - és ezek után nehéz leírni, hogy a végtelenségig mert mint látjuk, még ennél is tovább. A végtelen rendszámokat transzfinit (végesen túli) rendszámoknak nevezik. A mostani rendszámértelmezés természetes rendezést szolgáltat a rendszámokon az Ɛ (eleme) reláció segítségével. Ha ui. aƐ9, akkor α < β, amikor is α és β rendszámok.

Az ω, ω + 1, ω + 2, ... ugyanazon számossághoz tartozó rendszámok. Ezek összességét nevezte Cantor számosztálynak (Zahl-klasse), és ennek felhasználásával mondta ki, hogy a számosságokat vagy kardinális számokat ezen számosztályok legkisebb eleme reprezentálja. Ezen számosztályokat azonosíthatjuk a kardinális számokkal.

CANTOR A MOST ISMERTETETT, HÉZAGOSAN ÁTFUTOTT GONDOLATOKAT 1874-TŐL KEZDVE HOZTA NYILVÁNOSSÁGRA. AZ EKKOR MEGJELENT *Über die Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlert* (A valós algebrai számok halmazának tulajdonságairól) című munkája jelzi a halmazelmélet megszületését. 1879 és 1884 között hat tanulmánya jelent meg *Über unendliche, lineare Punktmannichfeltigkeiten* (A végtelen, lineáris ponthalmazokról) címmel. A transzfinit számok részletes ismertetését az 1895-1897-es években közreadott kétrészes *Beitrage zur transfiniten Mengenlehre* (Adalékok a transzfinit halmazelmélethez) tartalmazza. Ezek a művek jelentik a

matematika XX. századi nagy forradalmának a kezdetét. Cantor előtt talán egyetlen matematikus sem formálta át a matematikának szinte minden ágát úgy, ahogyan ő. Új fogalmai kezdetben magukon viselték minden újszülött végső formájának a hiányosságait, de ugyanakkor rendelkeztek azzal a vitalitással is, amely a bennük rejlő lehetőségek teljes kibontakozását biztosította. Definícióiba a korabeli matematikusok beleköthettek, mint ahogy bele is kötöttek, de a szavak takarta új fogalmakat és gondolatokat megsemmisíteni nem tudták. Cantor a matematika világában talán a legnagyobb próféta volt. Vekerdi Lászlónak biztosan igaza van, amikor azt írja, hogy „A középkorban Georg CANTORt valószínűleg megégették volna, vagy legalábbis kiátkozták volna tanait s magát.” Cantor tanainak legnagyobb diadala, hogy amit ő sokszor csak a homályosan definiált, de tisztán látott fogalmaiból következtetett, azt a szabatos formákba öntő utókor mind igazolta. Ma már a matematikának nincs olyan területe, amelyet a halmazelmélet eredményei több-kevesebb mértékben ne újítottak volna meg.

Cantor legnagyobb ellenfele régi mestere, Leopold Kronecker (1823-1891) volt, akinek elismerését talán leginkább szerette volna kivívni. Kronecker számára, aki az egész matematikát a természetes számok aritmetikájára igyekezett alapozni („Az egész számokat a Jóisten teremtette, minden más emberi mű.”), botránykő volt az aktuális végtelen matematikai elismerése. 1891-ben CANTORt nyilvánosan az ifjúság megrontójának nevezte. Még Poincaré, a franciák nagy matematikusa is 1909-ben kijelentette, hogy aktuális végtelen nincs, a végtelen csak egy befejezetlen és be nem fejezhető folyamatot jelöl. A felfedezett igazságaiban sohasem kételkedő CANTORt az el nem ismerés az őrületbe kergette, annak ellenére, hogy voltak megértő barátai is. Dedekind, ha nem is tudta mindig követni, de mellette állt. A francia Hermite, az angol William Henry Young (1863-1942) és a svéd Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) korán felismerték Cantor halmazelméletének fontosságát. Az 1897-es zürichi matematikus kongresszuson Adolf Hurwitz (1859-1919), Hilbert egyik tanára ismertette a halmazelmélet jelentőségét a függvénytanban.

A XIX. század legvégén és a XX. század elején azonban újabb nehézségek mutatkoztak. A DEDEKINDdel és HILBERTtel folytatott levelezéseiből kitűnik, hogy maga Cantor is észrevett elméletében bizonyos logikai nehézségeket. 1897-ben azonban Cesare Burali-Forti (1861-1931) torinói matematikus felfedezte a Cantor-féle ún. naiv halmazelmélet egyik ellentmondását. Tekintsük - mondta - az összes halmazok halmazát. Nyilván ennek a halmaznak a számossága a legnagyobb, vagy legalábbis ennél nagyobb számosság nem képzelhető el. Ez viszont ellenkezik Cantor azon megállapításával, hogy legnagyobb számosság nincs. Egy másik halmazelméleti ellentmondás Bertrand RUSSELLtől ered. Ez az 1902-ben született paradoxon a következő: Vannak halmazok, amelyek önmagukat elemként tartalmazzák, mint például a budapesti egyesületek szövetsége. Ez, minthogy maga is budapesti egyesület, azért e szövetségnek tagja. Nevezzük az önmagukat elemként nem tartalmazó halmazokat rendes halmazoknak, az önmagukat tartalmazókat pedig rendellenes halmazoknak. Az összes rendes halmazok *H* halmaza vajon rendes vagy rendellenes halmaz-e? Tételezzük fel, hogy *H* rendes halmaz. Ekkor önmagának nem eleme, de így nem lehet az összes halmazok halmaza. A másik lehetőség szerint *H* rendellenes halmaz, azaz önmagának eleme. Ekkor viszont *H* elemei között van egy rendellenes halmaz, tehát *H* nem az összes rendes halmazok halmaza. Mindkét felelet ellentmondáshoz vezetett. A Russell-paradoxon különösen kínosan érintette Freget, akinek akkor már nyomdában volt a *Grundgesetzen der Arithmetik* (Az aritmetika alaptörvényei) című könyve. Ekkor kapta meg ugyanis Russell 1902. június 16-i keltezésű levelét, amelyből az idézett ellentmondásról értesült. Módja volt még azonban arra, hogy függelékként a paradoxont könyvében közölje. Nehéz tudományos írónak nagyobb kellemetlenséget elképzelni - írja -, mint amikor már kész műve alapjaiban rendül meg. „Solatium miseris, socios habuisse malorum”. (Vigasztalás a szerencsétlennek, ha társai vannak a bajokban.) „Nekem van ilyen vigaszom, ha ez vigasz, mert mindenki, aki vizsgálataiban felhasználja az osztály, a halmaz fogalmakat, ugyanebbe a helyzetbe került.”

1905-ben érdekes antinómiát közölt Jules Antoine Richard (1862-1956), francia matematikus, amely mutatja, hogy a halmazelméleten kívül is lehet a matematikában paradoxon. Ez a következő: A természetes számokat szavakkal is meghatározhatjuk,

például a 2 helyett mondhatjuk, hogy a páros prímszám. Nevezzük a betűket, számjegyeket, írásjeleket és a szóközöket is jeleknek. Tekintsük azon természetes számok halmazát, amelyek meghatározásához a magyar nyelvben legfeljebb 100 jel szükséges. Ez egy véges halmaz, azért vannak olyan természetes számok, amelyek definiálásához nem elegendő a 100 jel. Ezek közül válasszuk ki a legkisebbet, legyen ez az *n* természetes szám. Az *n* tehát magyar nyelven 100 jellel nem definiálható, vagyis: *„n a legkisebb, magyar nyelven 100 jellel, a szóközöket is beleértve, nem definiálható természetes szám."* Az idézőjelbe tett, dőlt betűs mondat azonban pontosan 100 jelből áll, tehát a szóban forgó *n* definiálható a magyar nyelven 100 jellel. Ez pedig az idézőjeles mondat állítását tagadja.

Ezek és a hozzájuk hasonló ellentmondások felkavarták a kedélyeket a halmazelmélet körül, éppen akkor, amikor nagyfokú használhatóságáról a matematikusok mind jobban kezdtek meggyőződni. A mentőakció háromfelől is elindult. Először az egyik halmazelméleti paradoxon megfogalmazója, RUSSELL és annak munkatársa, Whitehead kísérelte meg az orvoslást. Abból indultak ki, hogy a matematika a logika része (logicizmus), az ellentmondás oka tehát logikai tévedés. Ezt abban vélték felfedezni, hogy a halmaz Cantor-féle definíciója megenged olyan halmazt is, amely elemként tartalmazza az éppen definiálandó halmazt. Az tehát az orvosság, hogy az ilyenfajta meghatározásokat törölni kell a halmazelméletből. A gyakorlati végrehajtás után azonban igen lecsökkent a megengedhető halmazféleségek száma, és ezért a matematika számos más területén - ahova a halmazelméleti fogalmak már jócskán beszivárogtak - kellemetlen, sokszor megoldhatatlannak tűnő nehézségek léptek fel. A logicisták mentési munkája bizonyára azért volt sikertelen, mert abból a hibás tételből indultak ki, hogy a matematika a logika része.

A másik mentési kísérletet az intuicionisták indították meg Luitzen Egbert Jan Brouwer holland matematikus vezérletével. Ez az irányzat arra épített, hogy az ismeretszerzés valójában nem tapasztalati és nem logikai úton, hanem az intuíció (a belső látás) útján történik. A halmazelméleti ellentmondások okát a logikai törvények mechanikus alkalmazásában látták, és úgy vélték, hogy a matematikában csak a megkonstruálható fogalmak

fogadhatók el, ha el akarjuk kerülni az ellentmondást. A felfogás tetszetősnek látszik, de a végrehajtás során kiderült, hogy az intuicionizmus álláspontját elfogadva, le kellene mondanunk a matematika tekintélyes és az alkalmazások próbáit sokszor kiállott részéről. Ez olyan lenne, mintha a betegségek ellen a halállal akarnánk védekezni.

Mind e mai napig az antinómiák kiküszöbölésének legtökéletesebb eszköze a Hilbert által, tanácsolt axiomatikus módszer. E szerint a halmazelméletet és az egész matematikát jó axiómarendszerrel kell megalapozni, és akkor az ellentmondások megszűnnek. A halmazelmélet axiomatikus megalapozása először Zermelónak sikerült 1908-ban. Ugyanő volt, aki 1930-ban Cantor műveinek a kiadását gondozta. Axiómarendszerét kiegészítette egy axiómával Abraham Fraenkel izraeli matematikus, aki Fekete MIHÁLLYal (1886-1957), Fejér Lipót tanítványával, a jeruzsálemi Einstein Akadémián dolgozott. A halmazelmélet egy másik axiómarendszerét állította össze Neumann János, majd később ehhez hasonlót fogalmazott meg Isaak Paul Bernays zürichi matematikus, a bizonyításelméletben Hilbert munkatársa. Ezekkel az axiómarendszerekkel a Cantor-féle halmazelmélet minden lényeges tétele bebizonyítható, az ellentmondások fellépte nélkül.

Ezek után úgy tűnt, hogy minden tökéletesen rendbe jött. Olyan használható axiómarendszerek birtokába jutottunk, amelyen belül az ellentmondásokat hordozó halmazok nem is léteznek. Az összes halmazok halmaza például nem halmaz, tehát fel sem merülhet az az ötlet, hogy önmagának eleme legyen. Igaz, hogy ezt az önmagával szembeni, legújabb kori követelményt a matematika több ága nem elégíti ki megnyugtatóan. A XX. századi axiomatikus halmazelmélet további izgató problémaköre a kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis köré csoportosul. Sokan úgy vélték, hogy a kiválasztási axióma új kellemetlenségek forrásává válhat. 1938-ban GÖDEL bebizonyította (a modellelmélet segítségével), hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere a kiválasztási axióma nélkül (maradék-axiómarendszer) ellentmondás nélküli, akkor az marad a kiválasztási axiómával bővített rendszer is. Kimutatta továbbá, hogy szintén ellentmondásta lan marad a rendszer, ha axiómaként hozzácsatoljuk a kontinuumhipotézist. Ebből viszont következik, hogy ha a halmazelmélet

axiómarendszere nem tartalmaz ellentmondást, akkor benne a kontinuumhipotézis nem cáfolható.

A kontinuumhipotézis ezek szerint vagy bizonyítható, vagy eldönthetetlen. 1963-ban PAUL COHEN amerikai matematikus, a Fields-érem tulajdonosa, bebizonyította (ugyancsak a modellelmélet segítségével), hogy a kiválasztási axióma független a maradékaxiómarendszertől, tehát abban nem bizonyítható, de nem is cáfolható. Bizonyította továbbá azt is, hogy a kontinuumhipotézis független a kiválasztási axiómától is, azaz a kontinuumhipotézis a halmazelmélet teljes axiómarendszerében eldönthetetlen: nem igazolható és nem is cáfolható.

Ezen eredmények alapján úgy látjuk, hogy a kontinuumhipotézisnek olyan szerepe van a halmazelméleti axiómarendszerben, mint a párhuzamossági axiómák az euklideszi axiómák rendszerében. A Zermelo-Fraenkel-axiómarendszer meghatároz egy bizonyos halmazelméletet, ugyanúgy a Neumann-Bernays-féle is. Ez a halmazelmélet kétfelé ágazik aszerint, hogy axiómaként a kontinuumhipotézist csatoljuk hozzá, vagy pedig a kontinuumhipotézis tagadását. A kontinuumhipotézis körüli vélemények azonban még ma sem egyöntetűek. A matematikusok egy része úgy gondolja, hogy megadható a halmazelmélet olyan axiómarendszere, amely elkerüli az ellentmondásokat, és ugyanakkor benne a kontinuumhipotézis vagy bizonyítható, vagy cáfolható. Ez az axiómarendszer azonban még nem született meg.

A halmazelmélet jelentősége azért nagy, mert benne a matematika többi ága modellezhető, azaz megkereshetők azok a halmazelméleti fogalmak, amelyek a szóban forgó fejezet axiómáinak megfelelői, modelljei. Így e fejezet egy tételének egy halmazelméleti tétel felel meg. A halmazelméleti modellen tehát ellenőrizhetők a legkülönfélébb matematikai tételek. Ezáltal a halmazelmélet egyetlen hatalmas egységbe öleli a teljes matematikát, rajta keresztül mintegy kézben lehet tartani az egész területet.

Természetes, hogy a Cantor-féle ún. naiv halmazelmélet erre, a matematikában addig példa nélkül álló szerepre még nem volt alkalmas. Számos kitűnő matematikus alakította, bővítette, csiszolta a halmazelméletet olyanná, hogy ezt a kivételesen jelentős hivatást vállalni tudja. A halmazelmélettel foglalkozó kiváló

matematikusok között felsorolásszerűen említem a következőket: Lebesgue francia; Ivor Otto Bendixson (1861-1935) svéd; Felix Bernstein (1878-1956), Felix Hausdorff, Gerhard Hessenberg (1874 — 1925), Arthur Schoenflies (1853-1928), Gödel német; Kazimes Kuratowski (1896-1980), Waclaw Sierpinski, Alfréd Tarski lengyel; Nyikolaj Nyikolajevics Luzin (1883-1950), Mihail Jakovlevics Szuszlin (1894-1919) orosz; Toralf Albert Skolem norvég; és Neumann János magyar származású amerikai matematikusokat.

A halmazelmélettel foglalkozó magyar matematikusok közül kiemelkedik Kőnig Gyula, aki Bernstein egyik tételéből kiindulva az 1904-es heidelbergi matematikai kongresszuson igen szellemes gondolatmenettel igazolta, hogy a kontinuumhipotézis téves. Sajnos a Bernstein-tétel az általa tárgyalt esetre nem volt érvényes. A hibát a hallgatóság soraiban helyet foglaló Cantor, Hilbert, Klein, sőt maga Bernstein sem vette észre. Az előadásának első részében tárgyalt Kőnig-egyenlőtlenség azonban maradandó értéknek bizonyult. Ennek segítségével végtelen sok számosságról állapíthatjuk meg, hogy azok nem kontinuumszámosságok. A nevét viselő egyenlőtlenségből az is következik, hogy a kontinuum-számosság nem lehet megszámlálhatóan végtelen sok, nála kisebb számosság összege. A halmazelmélet fejlődéséhez még jelentősen hozzájárult a magyar matematikusok között Haar Alfréd és Kalmár László is. Kalmár tanítványának, Hajnal ANDRÁSnak köszönhetően a halmazelmélet egyik ágát ma magyar iskolaként tartja számon a világ, sőt sokszor használják a magyar halmazelmélet kifejezést is.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS FEJLŐDÉSE

A valószínűség mint tapasztalati fogalom nem szorul definícióra. A legszerencsésebbnek látszik úgy bevezetni, ahogyan azt Jánossy Lajos fizikus teszi *A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása* című, 1965-ben kiadott könyvében. Abból indult ki, hogy a valószínűség fizikai mennyiség, mint például a hőmérséklet, amelynek minőségi változásait mindenki észleli, és mennyiségi formát csak akkor vett fel, amikor mérésére a fizikusok alkalmas mértékegységet és hőmérsékleti skálát találtak. Ehhez hasonlóan, az események bekövetkezésének valószínűséget tulajdonítunk kvalitatív módon, azután a matematikusok a lehetetlen esemény valószínűségéhez a 0 számot, a biztosan bekövetkező esemény valószínűségéhez pedig az 1-et rendelve, megállapítottak egy valószínűségi skálát. Ennek segítségével a különböző valószínűségeket jellemző mérőszámok a 0 és az 1 között rendeződnek, és így a valószínűség kvantitatív jelleget ölt.

A valószínűségszámítás elemi fogalmai az ősidők óta ismert hazárdjátékok kapcsán jelentkeztek. Például egy 1477-ben, Velencében kiadott Dante-kommentár ismertet egy kockajátékot, amelynél 3 kockát kell egyszerre feldobni. Még az eredmények gyakoriságát is részletezi. A 3 pont csak egyetlen esetben képzelhető el, ha mind a három kocka l-esre áll. Ugyanígy csak egyféle esetben jön létre a 4 pontot érő dobás, amikor két kocka 1-est és a harmadik 2-est mutat. Ahogyan a két legalacsonyabb pontértékű dobás csupán egyféleképpen jöhet létre, ugyanúgy a két legnagyobb pontszámú dobás is (a 18 és a 17). Ezeket az eseteket a könyv „azari”-nak nevezi. A szó az arab „asar”-ból származik, amelynek jelentése: „nehéz”. Ez az asar-azari szó az eredete a hazárd jelzőnek, amellyel azokat a játékokat jellemezték, amelyekben a véletlennek jutott a fő szerep.

Az első, aki a hazárdjátékokban meglátta a matematikai problémát, talán Pacioli volt. Az 1494-ben megjelent *Summa de arith*meticájában olvasható a következő feladat: Egy játékban az

nyer, aki először éri el a 6 pontot. A játék azonban félbeszakadt akkor, amikor az egyik félnek 5, a másiknak pedig 2 pontja volt. Kérdés: Hogyan osztozzanak a letétbe helyezett eredményen? Pacioli e feladatban pusztán arányos osztást látott, és tévesen az 5 : 2 arányban való osztozkodás jogosultságát mondta ki. Pacioli tévedését Tartaglia és Cardano is felismerte, de ők sem jutottak helyes eredményre. Cardano jól látta, hogy a tét elosztásában szerepet játszik a nyeréshez szükséges pontok száma is.

Ő ehhez a feladathoz egy másikat is csatolt, amely később a „pétervári paradoxon" néven lett híres. Ez Cardano megszövegezésével a következő: Egy gazdag és egy szegény egyenlő tét befizetésével hazárdjátékot játszik. Ha a szegény megnyeri az első játékot, akkor köteles a tétjét megduplázva kiállni a második játékra is. Ha a második játékot is megnyeri, akkor az eredeti tét négyszeresét betéve harmadikat is kell játszania és így tovább, vagyis a szegénynek minden nyertes partija után az előbbi játék tétjét megduplázva ki kell állnia a következő fordulóra is. Ha a gazdag nyer, a játék befejeződik, amikor is a nyertes az iménti módon felszaporodott betétet zsebre vághatja. Kérdés, hogy a szegény mennyiért veheti át a játékban a gazdag szerepét? Ezt a feladatot 1725-ben Daniel Bernoulli is felvetette a pétervári Akadémia folyóiratában azzal a változtatással, hogy a gazdagot Pálnak, a szegényt Péternek hívták, és a játék egy érme feldobálásából állt. Ha az első dobás fej, akkor Pál ad Péternek egy dukátot. Ha az első dobás írás, de a második fej, akkor is Pál fizet, de már két dukátot. Ha a fej csak a harmadik dobásra sikerül, akkor Péter négy dukátot kap, és így tovább. Általában ha a fej csak az n-edik dobásnál jelent meg, akkor Pál 2^{n-1} dukátot tartozik fizetni. Kérdés, hogy Pál mennyiért veheti meg Pétertől az ilyen feltételekkel folyó játék jogát. Péter „matematikai reménye"

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}+\ldots$$

lévén, úgy tűnik, hogy végtelen nagy összeget ér a játék. Georges Louis Leclerc Buffon (1707-1788) francia természettudós azonban nem hitt ennek az eredménynek, és 2084 játékban kipróbálta, hogy mennyit nyerhet Péter. A végtelen nagy összeg helyett

csupán 10,057 dukát volt az eredmény. A XVIII. században a pétervári paradoxont sokféleképpen magyarázták. A legtöbben úgy, hogy a feladat lehetetlenséget rejt, hiszen ha be is következnék egy ilyen végtelen „fej”-sorozat, akkor sem tarthatna a játék a végtelenségig, mert Pálnak előbb vagy utóbb elfogy a pénze, sőt egyszer a halál is utoléri.

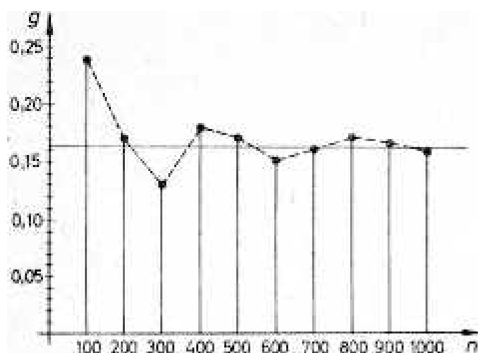
A pétervári paradoxonnal kissé előreugrottunk az időben. A valószínűségszámítás feladatkörének elkülönülése Pascal és Fermat nevéhez fűződik, de nem hagyható el Chevalier de Méré (Sieur de Bossay; 1607-1684) szerepe sem. De Méré lovag nem volt matematikus, ám bosszantotta, hogy a matematika törvényei nincsenek összhangban a gyakorlati élettel. Az ő számára a gyakorlati életet főleg a szerencsejátékok jelentették. Több, az akkor divatos kockajátékokra vonatkozó kérdéssel fordult PASCALhoz. Az egyik a következő volt: A játékos egy kockával játszik a bank ellen. A bank nyer, ha a játékos négy dobásból legalább egy 6-ost dob. A kérdés az, hogy ez a feltétel kifizetődik-e a banknak? A lovag persze eleget játszott ahhoz, hogy ebben ne legyen kétsége, mégis kíváncsi volt a matematikus válaszára. Pascal átfogalmazta a feladatot a játékos szempontjából. Mekkora a valószínűsége - kérdeznénk szaknyelven - annak, hogy a játékos nyer, azaz hogy négy dobásból egy sem lesz 6-os? A kedvező esetek száma 5, a lehetséges dobások száma 6, tehát négy dobásnál annak a valószínűsége,

hogy a 6-os nem jelentkezik, $(5/6)^4 \approx 0{,}482$. Ez valamivel kisebb a

0,5-nél, tehát a lovag kérdésére a matematika válasza alátámasztotta a gyakorlatot. De Méré lovag kérdéseinek többségét Pascal megtárgyalta FERMAT-val is. Számításaikban jól alkalmazhatóaknak bizonyultak a binomiális együtthatók (Pascal-háromszög). Pascal működése nyomán keletkezett a valószínűségszámítás (a név nem tőle származik) több olyan feladata, amely kombinatorikus módszerekkel megoldható. A párizsi Akadémia őriz egy 1654-ben keletkezett levelet, amelyben Pascal kinyilvánította azon szándékát, hogy kiépíti a véletlenek matematikáját. Innen szokás számítani a valószínűségszámítás megszületését.

Huygens 1655-ben értesült Párizsban Pascal és Fermat kutatásairól. Anélkül, hogy a részleteket ismerte volna, ő is elkezdett önállóan foglalkozni a véletlenek matematikájával és ennek eredménye az 1657-ben megjelent *De ratiociniis in ludo aleae* (A kockajátékra vonatkozó megfontolásokról), amelynek előszavában elismerte ezen vizsgálatokban Pascal és Fermat elsőbbségét. Ő vezette be a matematikai remény fogalmát.

A továbblépést Jacob Bernoulli *Ars coniectandi* (A találgatás tudománya) című könyve jelentette, amely szerzőjének halála után, 1713-ban látott napvilágot. Ennek első részében Bernoulli kommentálta Huygens tanulmányát, annak tárgykörét és eredményeit jelentősen kibővítve. A mű második része az ismétlés nélküli variációt és kombinációt ismerteti, mint olyanokat, amelyek a valószínűségszámításban sűrűn alkalmazásra találnak. A könyv harmadik és negyedik része valószínűségszámítási feladatokat tartalmaz. A kockajátéknál egyetlen kocka különböző dobásaira előre feltételezte, hogy a bekövetkezések valószínűsége azonos. - Közbevetőleg: A valószínűség szó ebben a könyvben olvasható először, de pontos definíciók nélkül. A feladatok megoldása mutatja, hogy Bernoulli is úgy értelmezte, mint a „kedvező” és a „lehetséges” esetek hányadosát. Ez a megfogalmazás azonban először LAPLACE-nál jelent meg 1812-ben.



360. ábra

- Az, hogy a kockadobásnál egy meghatározott számnak, például a 4-esnek a valószínűsége 1/6, kísérletileg is belátható.

A *360. ábrán* grafikon mutatja a 100, 200, 300, ..., 1000 dobás alkalmával tapasztalt relatív gyakoriságot. (Ha például az $n=100$ dobásból a 4-es $m=24$-szer fordul elő, akkor a 24 gyakoriságnak és az összes dobásszámának a hányadosa, a $g=0{,}24$, a relatív gyakoriság.) Ez a relatív gyakoriság jól láthatóan az *n* növekedésével mind közelebb kerül a $0{,}16\approx 1/6$ értékhez.

BERNOULLInak a megfigyelése, hogy ti. egy kísérletsorozatnál a relatív gyakoriság egy határértékhez közeledik, eredményezte a róla elnevezett „nagy számok törvényét", ahogyan ezt a törvényt LEIBNIZcel folytatott levelezésében nevezte. Eszerint, ha az *E* esemény bekövetkezésének a valószínűsége *p,* akkor az *E* igen nagy számú bekövetkezése esetén várható, hogy a relatív gyakoriság, az m/n hányados, igen közel kerül a *p* valószínűséghez. A BERNOULLI által bizonyított „nagy számok törvénye" mai alakjában így szól: Legyen az *E* esemény valószínűsége *p.* Ha *n* számú, egymástól független kísérletet végzünk, amelyek mindegyikében E vagy bekövetkezik, vagy nem, akkor *m* jelentse az *E* esemény gyakoriságát, tehát m/n a relatív gyakoriságot. Legyen továbbá ε és δ tetszőlegesen kicsiny pozitív szám, akkor annak a *P* valószínűsége, hogy az m/n a p-től ε-nál nagyobb számmal tér el, azaz, hogy $|(m/n)—p| > \varepsilon$, kisebb δ-nál, ha *n* elég nagy. Szimbólumokkal:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}<\delta, \quad \text{ha} \quad n\geqq N,$$

ahol *N* értéke csak ε és δ megválasztásától függ. BERNOULLI tehát meglátta annak a lehetőségét, hogy a valószínűség fogalmát statisztikai adatokra is alkalmazza. Ezzel a tárgykör gyakorlati alkalmazhatóságát jelentősen megnövelte.

Igen fontos szerep jutott még az ún. Bernoulli-képletnek is. Legyen az *E* esemény bekövetkezésének a valószínűsége *p,* azaz a be nem következés valószínűsége (1 — p). Kérdés: Mi a valószínűsége annak, hogy n egymástól független kísérletben *E* éppen k-szor következik be? Az *n* kísérlet bármelyikénél az *E* valószínűsége *p,* a k-szori bekövetkezés valószínűsége tehát p^k. A feltételek szerint egyetlen kísérlet eredménytelenségének a

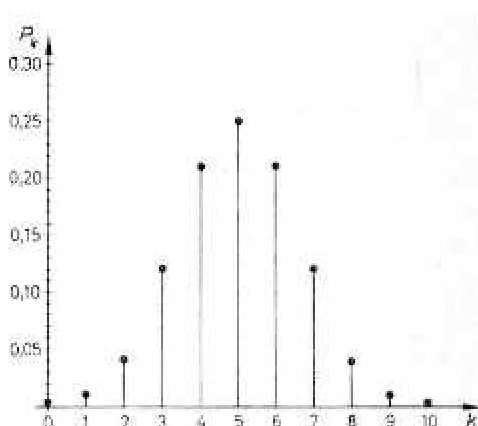
valószínűsége (1—p), tehát az *n* kísérletből (*n*—*k)* eredménytelenség valószínűsége $(1-p)^{n-k}$. Annak a valószínűsége pedig, hogy az első *k* kísérlet sikerül és a többi (*n*-*k*) kísérlet nem: $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, mert az egyes kísérletek egymástól függetlenek. Még csak azt kell meggondolnunk, hogy az *n* kísérletből *k* számú annyiféleképpen teljesülhet, ahányféleképpen *n* elemből *k* elem kiválasztható, a kiválasztás sorrendjére való tekintet nélkül, azaz

$\binom{n}{k}$-féleképpen,

továbbá hogy ezen esetek mindegyike kizárja a többit. Így az egyenlő eséllyel bekövetkező esetek valószínűségei összeadódnak, tehát a keresett valószínűség:

$$P_k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ez Bernoulli képlete.



361. ábra

Rögzített *n* esetén, ha *k* változik 0-tól n-ig, akkor a $P_0, P_1\ P_2, ..P_n$ valószínűségek a (0, *n)* intervallum fölött egy bizonyos eloszlást mutatnak. A Bernoulli-törvénynek megfelelő eloszlást binomiális eloszlásnak nevezik. Az eseményekben rejlő természeti törvények szerint ettől eltérő eloszlások is lehetségesek. A szemléletesség kedvéért, példa gyanánt, ábrázoljuk a (k; P_k)

derékszögű koordináta-rendszerben a következő kérdésre vonatkozó eloszlást: Mi a P_k valószínűsége annak, hogy 10 dobásból k páros lesz, ha $k=0,1,2,3,\ldots, 10$? Most $\boldsymbol{p}=0,5$ és $1 — p=0,5$.

A Bernoulli-képlet szerint készített értéktáblázat:

k 0 123456789 10

P_k 0,001 0,01 0,04 0,12 0,21 0,25 0,21 0,12 0,04 0,01 0,001

Az eloszlás grafikonját a *361. ábra* mutatja.

A XVIII. században sokan foglalkoztak valószínűségszámítási kérdésekkel. Közöttük kiemelkedik Abraham de Moivre, az Angliába menekült hugenotta matematikus, aki 1711-ben írt egy hosszú tanulmányt, amelynek jócskán kibővített alakja 1718-ban jelent meg *Doctrine of Chances* (Az esélyek tana) címen. Benne mintegy ötven valószínűségszámítási problémával foglalkozik. Az egymástól független események együttes bekövetkezésének valószínűségét úgy számítja ki, hogy a részesemények valószínűségeit összeszorozza. Foglalkozik könyvében az életjáradékok számításával is. Ő a valószínűségszámításban valamiféle új algebrát látott, és ezért igen érdekelte az alkalmas jelölések bevezetésének a lehetősége, valamint a feladatok általánosítása. Egyik ilyen rá jellemző, általánosító feladata: Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott számot dobunk n olyan játékkockával, amelynek k oldala van? Az 1717 utáni eredményeit, összegyűjtve, 1730-ban fogta össze a *Miscellanea analytica* (Analitikus mindenféle) című könyvében.

Ebben olvasható, valamivel Stirling közlése előtt az

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling-formula, sőt az ugyancsak STIRLINGről elnevezett lg n! hatványsora is.

A valószínűségelméletben nagy szerepet játszó

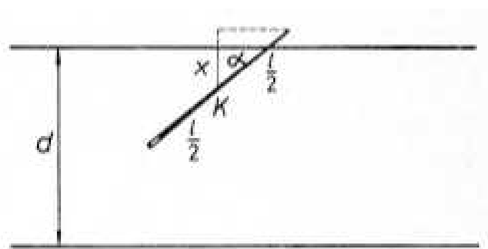
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

képlete 1733-ban került nyilvánosságra. A *Miscellanea analyticában* jelent meg először a híres $(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha$, Moivre-féle képlet is. Ez a kiváló, sok jelentős matematikai eredményt felmutató tudós azonban egyetemi katedrát nem kapott, sőt a történelem múzsája még azt a kegyet is megtagadta tőle, hogy több jelentős felfedezését az ő nevével összekapcsolva emlegessék.

A XIX. század elején új lendületet adott a valószínűségszámítás fejlődésének Laplace munkássága. 1774-től számos kiadós tanulmányt írt e tárgyban, és ezek 1812-re összeálltak a *Théorie analytique des probabilités* (A valószínűség analitikai elmélete) című műben, amelyet két év múlva követett az *Essai philosophique des probabilités* (A valószínűség filozófiai esszéje). Laplace is az elsők között ismerte fel, hogy az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

valószínűségi görbe alatti terület éppen $\sqrt{\pi}$. Általánosította BUFFONnak a tűprobléma néven ismert feladatát is.

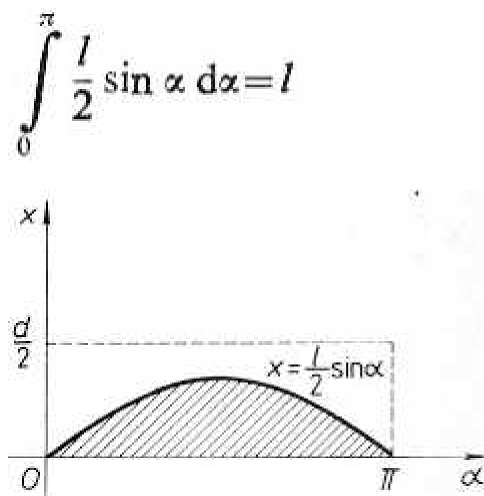


362. ábra

Buffon e feladattal tulajdonképpen a valószínűségszámítás geometriai módszerét vezette be. 1777-ben vetette fel a következő kérdést: Vízszintes síkra rajzoljunk egymástól *d* távolságra futó párhuzamos egyeneseket. Erre a síkra találomra, irányítás nélkül dobáljunk egy

l< *d* hosszúságú tűt. Mi a valószínűsége annak, hogy a tűnek valamelyik egyenessel közös pontja lesz? Buffon a következő megoldást adta:

A *362. ábrán* látható az egyik egyenesre eső, azt metsző *l* hosszúságú tű, amint az egyenessel a szöget zár be, amikor is $0 \leq \alpha \leq \pi$. Ha a tű metszi valamelyik egyenest, akkor *K* középpontja az egyenestől $1/2 \cdot \sin \alpha$-nál nincs távolabb, tehát $x \leq l/2 \cdot \sin \alpha$. Ábrázoljuk most az $x = l/2 \sin \alpha$ függvényt az $(\alpha; x)$ derékszögű koordinátarendszerben. A görbe alatti



363. ábra

terület akkora, mint amelyet befed az összes lehetséges irányban elhelyezkedő, a kiszemelt egyenest metsző tű, az egyenes egy π hosszúságú szakaszán *(363. ábra).* Ezen a szakaszon a kiszemelt egyenesre vonatkoztatva az összes lehetséges módon leeső tű lefedi a $\pi \cdot d/2$ területet.

Így a kedvező esetek számát reprezentálja az *l*, a lehetséges esetek számát pedig a $\pi \cdot d/2$ terület. A keresett valószínűség tehát $p = 2l/2\pi$. Érdekes következménye, egyszersmind ellenőrzési lehetősége az eredménynek, hogy nagyszámú tűdobással a *p* valószínűség értéke tapasztalati úton meghatározható, és vele együtt a π közelítő értéke is, lévén $\pi = 2l/dp$. Ezt meg is tette többek között Stephan Smith (1826-1883) angol matematikus, aki 1855-ben 3200

dobásból álló sorozattal a π számára 3,1553 közelítő értéket kapott.

BUFFON TŰFELADATÁT LAPLACE ÁLTALÁNOSÍTOTTA ARRA AZ ESETRE, AMELYBEN A VÍZSZINTES SÍKOT KÉT PÁRHUZAMOSSEREG HÁLÓZZA BE. HA AZ EGYIKBEN A PÁRHUZAMOSOK TÁVOLSÁGA *a*, az ezeket metsző párhuzamosok távolsága pedig *b* és az e távolságoknál kisebb tű hossza *l*, akkor a „találati” valószínűséget a

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{ab\pi}$$

képlet szolgáltatja.

Ehhez a korszakhoz tartozik még Thomas BAYESnek (1702-1761), LEGENDRE-nak, GAUSSnak és Poissonnak e tárgykörhöz való hozzájárulása.

BAYES, ez az életében ismeretlen angol pap, a feltételes valószínűségekre vonatkozó, róla elnevezett, alapvető törvénnyel gazdagította e tudományágat. Törvénye csak halála után, 1763-ban látott napvilágot. Másik művét pedig, amelyben szintén számos valószínűségszámítási problémát tárgyalt, csak 1958-ban adták ki. Egyike volt a matematikai statisztika úttörőinek.

A hibaszámítás legkisebb négyzetek elvét egymástól függetlenül LEGENDRE és GAUSS dolgozta ki. A normáleloszlással kapcsolatban is csak GAUSS nevét szokás emlegetni, pedig tőle függetlenül LAPLACE is felfedezte, sőt már MOIVRE is foglalkozott vele. Elnevezését LAPLACE egyik tanítványától, LAMBERT QUETELET (1796-1874) belga csillagász-matematikustól kapta, aki szintén egyik megalapítója a matematikai statisztikának.

POISSON általánosította a nagy számok Bernoulli-törvényét és a Moivre-Laplace-törvényt - amelyek az egymástól független kísérletekre vonatkoznak - az egymástól függő eseményekre is. Ezek alapján egy új valószínűségeloszlást fogalmazott meg, ami a binomiális eloszlás határesete, és igen fontos alkalmazásra talált a csillagászatban, a mikroszkopikus biológiai vizsgálatokban, a Brown-féle mozgások tanulmányozásában és bizonyos tüzérségi kérdések megválaszolásában. Valószínűségelméleti eredményeit

POISSON az 1837-ben megjelent *Recherches sur la probabilité des jugements* (Az ítéletek valószínűségére vonatkozó kutatások) című könyvében foglalta össze.

LAPLACE és POISSON után Nyugat-Európában időlegesen lelassult a valószínűségszámítás fejlődése. Ennek egyik oka paradox módon az, hogy bár számos gyakorlati területen meglátták hasznosságát, mégis a kellő elméleti alapok hiányában a hibás alkalmazások kudarcai elvették tekintélyét, hitelességét. A tudományág fejlődésének súlypontja a XIX. század közepén áttolódott Oroszországba. Az első orosz nyelvű valószínűségszámítási könyvet VIKTOR JAKOVLEVICS BUNYAKOVSZKIJ (1804-1889), a pétervári Akadémia tagja írta. Az 1846-ban megjelent könyve, az *Osznovanyija matematicseszkoj teorij verojatnosztej* (A valószínűség matematikai elméletének alapjai) áttekinti a valószínűségszámítás történetét és elért eredményeit, valamint alkalmazásait a biztosítási ügyekben, a lakossági statisztikák elemzésében és számos ipari fejlesztésben. A könyv jó összefoglalásnak bizonyult, de a további lehetőséget PAFNUTYIJ LVOVICS CSEBISEV alapozó munkái mutatták meg. Négy alapvető tanulmányával (1845, 1846, 1867, 1887) megteremtette a pétervári valószínűségelméleti iskolát. Fő törekvése szerint igyekezett erről a területről száműzni az akkor divatos analízis fogalmait. A határérték fogalmát egyenlőtlenségekkel küszöbölte ki, és a tévedéseket a minimumra szorította azzal, hogy rendszeresen törekedett a hibák megbecslésére, valamint ezen becslések pontosságának a fokozására. Nála jelent meg 1866-ban a Bernoullí-féle nagy számok törvényének a legáltalánosabb alakja a bizonyítással együtt. A centrális határeloszlás tételét az általa bevezetett momentummódszerrel igazolta. Ennek hiányosságát tanítványa: Andrej Andrejevics Markov pótolta. Nevét őrzi a Markov-láncok elmélete, ő a momentumelmélet teljes kifejtője. A pétervári iskola másik nagy képviselője Alekszandr Mihajlovics Ljapunov, aki a karakterisztikus függvények módszerét teremtette meg.

Időközben a valószínűségi problémák iránti érdeklődést Európában ismét felkeltette a fizika, pontosabban a termodinamika kinetikus hőelmélettel való megalapozása, ami Rudolf Clausius (1822-1888) után főként Ludwig Boltzmann (1844-1906), James Clerk Maxwell és Josiah Willard Gibbs érdeme. Ők az elméleti fizikába bevezették a statisztikus módszereket és ezzel a valószínűségi szemléletet.

Boltzmann 1877-es alapvető törvénye szerint valamely termodinamikai rendszer entrópiája az állapotvalószínűség logaritmusával arányos. Kiderült, hogy számos természeti jelenség nem determinisztikus, hanem valószínűségi törvényeken alapul.

Ezt a felfogást megerősítette Francis Galton (1822-1911), Walter Weldon (1860-1906) és Karl Pearson (1857-1936) biometriai iskolája, amely a biológiai megfigyelések feldolgozásában a matematikai statisztika módszereit igyekezett alkalmazni.

Új irányzatot indított el az Augustus de Morgan, Emanuel Czuber (1851-1925), Boole hármas azzal, hogy a valószínűségszámítást a matematikai logikára igyekeztek alapozni. Ennek az irányzatnak volt a híve William Stanley Jevons (1835-1882), Boole tanítványa és John Wenn (1834-1923) cambridge-i logikus is. A matematikai logika és a valószínűségszámítás kapcsolata ma is ad fel tisztázásra szoruló kérdéseket.

A valószínűségelmélet mai korszakát Richard Mises (1883-1958) német és Szergej Natanovics Bernstein (1880-1968) szovjet matematikus nyitotta meg. Mises vezette be a valószínűségszámításba a Stieltjes-integrál alkalmazását és megmutatta, hogy a Markov-láncoknak milyen nagy jelentősége van a fizikában. Ugyancsak ő kísérelte meg 1919-ben a valószínűség fogalmát visszavezetni a gyakoriság fogalmára a határérték segítségével. Munkáiban jelentkezett elsőként a valószínűségelmélet axiomatikus megalapozása, amely azonban nála még logikai nehézségekhez vezetett. Ezt bírálta Alekszandr Jakovlevics Hincsin (1894-1959) szovjet matematikus. Bernstein továbbfejlesztette Ljapunov és Markov eredményeit. Az elsők között, Misesszel körülbelül egy időben (1917), ő is megkísérelte a valószínűségszámítás axiomatikus megalapozását.

Végül is Andrej Nyikolajevics Kolmogorov szovjet matematikus építette fel az első elfogadható valószínűségelméleti axiómarendszert. Még 1925-ben HINCSINnel együtt kezdte el a valószínűség elméleti megalapozását, amely végül is 1933-ban neki sikerült. A Borel-féle eseményalgebrára épített. A FÉLIX ÉDOUARD ÉMILE BOREL francia matematikus nevével jelzett eseményalgebrát képzeljük el egy kockadobás lehetőségeivel kapcsolatban:

Egy játékkockát dobálunk. Minden dobás egy elemi esemény, tehát bekövetkezhet hat elemi esemény. Jelöljük ezeket E_n-nel, ahol n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. E_p jelentse azt az eseményt, amelyben páros számot dobunk. Tehát $E_p = E_n$, ha $n = 2$ vagy 4 vagy 6. E_p tehát három egymást kizáró eseményre bontható. Jelentse továbbá E_{III} a háromnál nagyobb dobást, tehát $E_{III} = E_n$, ha n = 4, vagy 5, vagy 6. Az ismert jelölésekkel

($\vee$ = vagy, $\wedge$ = és):

$$E_p = E_2 \vee E_4 \vee E_6 \quad \text{és} \quad E_{III} = E_4 \vee E_5 \vee E_6.$$

Ha az elemi események együttesét egy halmaznak, eseményhalmaznak tekintjük, akkor értelmezhetjük az E_p és E_{III} események unióját (összegét) és metszetét (szorzatát). Nyilván:

$$E_p \cup E_{III} = E_2 \vee E_4 \vee E_5 \vee E_6$$

és

$$E_p \cap E_{III} = E_4 \vee E_6.$$

Mivel E_k és E_l egymást kizáró események, azért

$E_k \wedge E_l = 0,$

ha $k \neq l$, azaz ekkor

$E_k \wedge E_l$

lehetetlen esemény. Ellenben az $E = E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee E_4 \vee E_5 \vee E_6$ biztos esemény, mert az elemi események egyike mindig megvalósul. Az E eseményt az elemi események eseményterének is szokás nevezni. Az E eseményt tekinthetjük az E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6 elemi események halmazának és akkor beszélhetünk a részhalmazainak halmazáról is, azaz az E hatványhalmazáról.

Most példánktól, a kockadobástól függetlenül is tekintsük az

$E = \{E_1\ E_2\ E_3\ E_4, ..., E_5\ E_6\}$

halmazt, ahol E_1 E_2, ..., E_n, egymást kizáró véletlen elemi

események. Az E minden részhalmazához hozzá tudunk rendelni egy eseményt (összetett eseményt). Például az {E_2 *E_3,E_5}* részhalmaz azt az eseményt jelenti, amelyben az E_2, E_3 és E_5 elemi események közül pontosan az egyik létrejön. Az E részhalmazaiból álló eseményeknek (véletlen eseményeknek) a V jellel összekapcsolt halmazát Borel-féle eseménymezőnek (eseményalgebrának) nevezzük.

A lényeg tehát az, hogy valamely véges eseményalgebra minden összetett eseményéhez hozzárendelhető az őt alkotó elemi események halmaza. Kolmogorov belátta, hogy minden eseményalgebrához tartozik egy azzal izomorf halmaz, tehát az eseményalgebra modellezhető a halmazalgebrában. Ez a tény már lehetővé teszi a valószínűségszámítás axiomatikus alapon való kifejtését, amit Kolmogorov meg is tett 1933-ban a *Grundbegriffe dér Wahrscheinlichkeitsrechnung* (A valószínűségszámítás alapfogalmai) című, Berlinben megjelent könyvében. Ennek az 1974-es orosz nyelvű kiadásából készült az 1982-es magyar fordítás. Ebből idézzük:

„Legyen Ω azon ω elemek halmaza, amelyeket mi elemi eseményeknek fogunk nevezni, Ɔ pedig *Q* bizonyos részhalmazainak halmaza. Az Ɔ halmaz elemeit *véletlen eseményeknek* (illetve egyszerűen *eseményeknek), Ω-t* pedig az *elemi események terének* fogjuk nevezni.

I. Ɔ *halmazalgebra.**

II. *Minden Ɔ-beli A halmaznak megfelel egy P(A) nemnegatív valós szám. Ezt a számot az A esemény valószínűségének nevezik.*

III. $P(\Omega) = 1$.

IV. *Ha A és B diszjunktak, akkor*

$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Az I-IV. axiómákat kielégítő' *(Ω, Ɔ, P)* objektumot *valószínűségi mezőnek* fogjuk nevezni.”

* Az I. axiómához tartozó lábjegyzetből:

„Az Q halmaz részhalmazainak Ɔ rendszerét *algebrának* nevezzük ha Ω Ɛ Ɔ, a rendszer két halmazának egyesítése, metszete és különbsége ismét ehhez a rendszerhez tartozik."

Az idézett axiómákból kiindulva Kolmogorov levezette a valószínűségszámítás minden lényeges eredményét. Adódtak azonban a Kolmogorov axiómával felépített rendszerben is nehézségek bizonyos gyakorlati kérdésekkel kapcsolatban. A magyar Rényi ALFRÉDnak - aki aspirantúráját a moszkvai Jurij Vlagyimirovics Linnik vezetésével végezte - sikerült úgy általánosítania Kolmogorov axiómarendszerét, hogy a nehézségek elhárultak. Rényi elméletében, amely a Kolmogorov-rendszert különleges esetként foglalja magába, elsődleges szerepet kapott a feltételes valószínűség fogalma. A valószínűségszámítás kiváló magyar képviselői közt említést érdemel még Jordán Károly (1871-1959), akinek munkássága a matematikai statisztika és a klasszikus valószínűségelmélet területén világszerte ismert.

Befejezésként megemlítem, hogy a XX. században a valószínűségelméletből több fontos, önálló kutatási terület nőtt ki.

Ilyen az információelmélet, amelyet az 1940-es évektől kezdve a híradástechnika és a számítógépekkel kapcsolatos kérdések indítottak el, de ma már a kibernetika egyik alapja, és nem nélkülözheti a közgazdaságtan, a biológia, sőt a pszichológia és a nyelvészet sem. Megalapozója Claude Elwood Shannon (1916—) amerikai mérnök-matematikus, aki arra a kérdésre keresett feleletet, hogy miképpen lehet a legkevesebb jellel (például Morse-jellel) a legtöbb információt közvetíteni. Neves művelője, Norbert Wiener (18941964) a kibernetika területén ért el kimagasló eredményeket.

A valószínűségszámítás egy másik, napjainkban jelentőssé lett ága a játékelmélet. Ennek megalapítója az 1928-ban megjelent tanulmányával Neumann János. Az elmélet (a társasjátékokon kívül) fontos alkalmazásra talált a közgazdaságtan területén, sőt még a pedagógiában is. Az alapfeladatot Neumann így fogalmazta meg:

„n játékos, S_1, S_2, ..., S_n egy adott T társasjátékot játszik. Hogyan kell a játékosok egyikének, S_m-nek játszania, hogy a lehető legkedvezőbb eredményt érje el?"

A „játékokban” rejlő „konfliktusszituáció” matematikai elemzése lehetővé teszi a „játékos” részére a legeredményesebb „stratégia” meghatározását.

Talán azért is érdemes volt a valószínűségszámítás történetét a halmazelmélet fejlődése után áttekinteni, mert Kolmogorov axiomatikus alapozása éppen a halmazelmélet nagy hatásterületét, az egész matematikát összefogó erejét mutatja.

Megjegyzendő, hogy a Kolmogorov-féle axiómarendszer a valószínűségszámításban megkötést is jelent, mert miatta a logikának csak egy bizonyos fajtája (disztributiv logika) alkalmazható. Ennek megszüntetése kívánatos lenne.

A SZÁMÍTÓGÉP-TUDOMÁNY FEJLŐDÉSE

A gyors számolás vágya egyidős a számolással. Az egyiptomi, babiloni táblázatok már ezt a célt szolgálták. Ezen a területen az első igazi ugrást a helyi értékes számírás feltalálása hozta. A helyi érték és a 10-es számrendszer társulása volt az elvi alapja az első technikai számolóeszköznek, az abakusznak, majd az abból kifejlődő különféle golyós számológépeknek. Ezek a Kínában és a Földközitenger partvidékén elterjedt eszközök rendelkeztek azzal a nagy előnnyel is, hogy segítségükkel az alapműveletek gyors elvégzésére az analfabétáknak is lehetősége nyílott. Ma már kevesen gondolnak arra, hogy az abakusznál használt kövecskék latin „calculus” nevét használjuk akkor, amikor azt mondjuk, hogy egy diák például matematikából ötös kalkulust kapott. Ugyanez az eredete a kalkulálni, kalkulátor stb. szavaknak. A golyós számológépeket nagyon sokan ma is bámulatra méltó ügyességgel és biztossággal használják, még az üzleti életben is. Erre ismert példa az a verseny, amely a második világháború idején egy japán hivatalnok és egy amerikai tisztviselő közt folyt le. A japán golyós számológépet, az amerikai egy asztali, mechanikus számítógépet használt. A kitűzött feladatok mindegyikével az abakuszkezelő japán lett előbb készen.

A számolástól nem áll messze a logikai következtetés, a gondolkodás. Ez esetben nem is annyira a gyorsaság, mint inkább a biztosság a kívánatos cél. Természetes hát, hogy a gondolkozó gépek ötlete a filozófusok és a teológusok fejében született meg. Először 1275-ben RAIMUNDUS LULLUS, a „doctor illuminatus” (a megvilágosodott tudós), a Tuniszban megkövezett spanyol hittérítő filozófus agyában kelt életre az a merész gondolat, hogy az igazság mechanikus módszerekkel is igazolható. Módszerének elveit 1276-ban fejtette ki az *Ars magna Lulli* (Lullus nagy tudománya) című könyvében. Ennek alapján készítette el „gondolkozó gépét”, a számológépek egy fajtáját, amelyben azonban a számok helyett az egymással összefüggésbe hozandó fogalmak, illetőleg azok jelei szerepeltek.

1623-ban Wilhelm Schickard (1592-1635) tübingeni professzor (az ún. Pathenot-feladat egyik megoldója) készített olyan számológépet, amelyben egymáshoz illeszkedő tíz- és egyfogú fogaskerekek működtek. Ezen a mai fordulatszámlálókhoz hasonló elvű gépen el lehetett végezni mind a négy alapműveletet.

Nem véletlen, hogy Schickard csillagász is volt. A XVII-XVIII. században a hajózási térképek, táblázatok és a csillagászati számítások hosszadalmas, idegőrlő munkát jelentettek, és így természetes volt minden, a számítások megkönnyítésére irányuló törekvés. Ez az igény hozta létre a Napier (1614), Briggs (1617) és Bürgi (1620) által összeállított logaritmustáblázatokat is, amelyek nyomán már 1620-ban megjelent az első logarléc Edmund Gunter angol professzornak köszönhetően.

1642-ben Pascal szerkesztette meg ugyancsak fogaskerék-áttételes összeadógépet, az arithmométert. Tulajdonképpen ennek tökéletesített formája volt Leibniz összeadó- és szorzógépe 1671-1673-ban, amellyel már mind a négy alapműveletet el lehetett végezni.

E fogaskerék-áttételes számológépek gyors ütemben fejlődtek. 1820 körül Párizsban már sorozatban gyártották ezeket az eszközöket, amelyek a szorzást ismételt összeadással és az osztást ismételt kivonással végezték. 1878-ban azonban Csebisev olyan számológépet tervezett, amely a szorzást nem az összeadásra vezette vissza.

Mintegy 10 év múlva, 1887-ben Theophil Witgold Odhner (1845-1905) svéd mérnök állítható fogazású számkerekekkel szerkesztett gépet. Ekkorra már a gyártási technika is annyira fejlett volt, hogy ez a típus széles körű alkalmazásra találhatott, sőt még ma is gyártanak ilyen típusú számológépeket.

A francia forradalom alatt a konvent elrendelte olyan táblázatok készítését, amelyekben a számok logaritmusa 19, a trigonometrikus függvények logaritmusa pedig 14 jegy pontossággal szerepeljen. Elkészítését Gaspard Clair Francois Marie Riche de PRONYra (1755-1839) bízta, aki az igen rövid határidejű feladatot a következő tervezéssel igyekezett végrehajtani: Megbízott 5 képzett matematikust azzal, hogy a szükséges számításokat - amennyire

csak lehet - bontsák fel a négy alapműveletre. A bonyolultabb számítások elvégzését rábízta 8 gyakorlott számolóra. Alkalmazott továbbá 80 „számolószolgát”, akikkel csak a kivonásokat és az összeadásokat végeztette. Érdekes tapasztalata volt, hogy azok számoltak legmegbízhatóbban, akik csak összeadni és kivonni tudtak. Ez a nagyszerű szervezés megadta a számítógépes feldolgozásnak ma is használt lépcsőit: a rendszerelemzést, a programozást és az aritmetikai munkát. A mai „számolószolga” azonban, az elektronikus számítógép aritmetikai egysége már jóval felülmúlja Prony „számolószolgáit”.

Hasonló alapon sikerült - legalábbis részben - automatizálnia Prony három számítómozzanatát Charles Babbage (1792-1871) angol matematikusnak. Ehhez tudnunk kell, hogy Joseph Marie Jacquard (1752-1834) 1810-ben elkészítette az első lyukkártyákkal vezérelt szövőgépet, amely lehetővé tette, hogy a selyemszöveteket a legkülönbözőbb mintákkal készítsék. A lyukkártyás vezérlés ötlete már a XVIII. században megvalósult például a zenegépek szerkezetében, sőt 1728-ban a francia Falcon már szövőgépeknél is alkalmazta. Jacquard e módszert olyan tökélyre emelte, hogy halálakor már több tízezer ilyen gép termelte a szép mintájú selyemkelméket. BABBAGE-nek jutott először eszébe, hogy a lyukkártya alkalmas lehet az elemeire bontott számítási utasítások gépbe táplálására is. Első gépe, a *Difference-Engine* (differenciagép) képes volt táblázatok készítésére, aminek különösen a csillagászok örültek. A mintegy 10 évi munkával készített gép feltalálóját a csillagászok egyesülete aranyéremmel tüntette ki. Babbage a következő gépének megépítéséhez kezdetben állami támogatást is kapott. Új számítógépe, az *Analytical Engine* (analitikus gép) azonban sohasem készült el, mert Babbage olyan nagy teljesítményű gépet tervezett, amelyet kora gyártási technikája még képtelen volt megvalósítani. A nehézségeket érzékelteti, hogy 1000 tengely mindegyikén 50 helyi értékű számnak megfelelő számkereket szándékozott elhelyezni, ami olyan precíz kivitelezést kívánt, amellyel az iparosok nem tudtak megbirkózni. Kisebb igényekkel törekvéseit biztosan siker koronázta volna, hiszen Georg Scheutz, egy stockholmi nyomdász, aki BABBAGE-nek pusztán egy gépleírását olvasta, 1854-ben olyan jól működő differenciálgépet állított össze, amely 8 helyi értékes számokkal 4 differenciasor segítségével a betűöntés céljait szolgáló sablonok méretezését tette

lehetővé. Babbage ismerte is ezt a gépet. Éppen ő ajánlotta a Royal Society kitüntetésére, amit Scheutz az 1855-ös párizsi világkiállításon meg is kapott. Babbage azonban túlzó terveiről lemondani nem tudva, a sikertelenségtől megkeseredett emberként halt meg. Gépét elfeledték, pedig az az automatizált számítógépek ősének tekinthető.

Babbage felismerte azt is, hogy szükséges a számítási folyamat közben született részeredmények tárolása. Törekedett annak a megvalósítására is, hogy a gép előre meghatározott algoritmus szerint, tehát megszabott sorrendben végezze el a számításokat, vagyis mai szóhasználat szerint: egy programot hajtson végre. Gépének hagyományos, fogaskerekekkel szerkesztett része, a „malom” végezte a számításokat. Ez megfelel a mai elektronikus gépek aritmetikai egységének. A tárolást szintén egy fogaskerék-rendszerrel oldotta meg, amely a mai fordulatszámlálókhoz hasonlóan működött. A gép harmadik részének volt fő eleme a lyukkártya. Minden műveletnek egy lyukkombináció felelt meg. Az egymást követő műveleteket egy mozgó kartonszalagon egymást követő lyuksorokkal rögzítette. A szalaghoz feszülő tapogatókarok a lyukakon átnyúlva hozták működésbe a malmot, illetve a tárolót. Ez a lyukkártyás vezérlő rész azonos a későbbi gépek lyukkártyás vezérlőjével, azzal a különbséggel, hogy a tapogatókarok mechanikus működése helyett elektromos tapogatók, illetve elektroncsövek zárnak és nyitnak megfelelő áramköröket.

A lyukkártyás vezérlés másik alkalmazójaként kell megemlékeznünk az Amerikai Statisztikai Hivatal igazgatójáról, Herman HOLLERITHről (1860-1929), aki 1889-ben a népszámlálás adatainak feldolgozására rendezőgépet dolgozott ki. A népszámlálás minden adatához egy számot rendelt. Így minden polgárhoz egy számkombináció társult, amely annak adatait jellemezte. Ezeket egy nyolcvan oszlopból és tíz sorból álló kártyán lyukasztással rögzítették. A kártya belekerült egy rendezőgépbe, és ott elhaladt egy letapogató tűrendszer alatt. Ha egy tű lyukat talált, akkor zárta egy elektromágnes áramkörét, amely azon a padon, amelyen a

kártya elhaladt, kinyitotta a kártya lyukrendszerének megfelelő ajtót. Ezen át a kártya a neki megfelelő dobozba esett. Ilyen elektromágneseket bekapcsoló kefékkel számológépeket, adatrögzítőket, írószerkezeteket is lehetett működtetni.

A XX. század első felében a mechanikus számológépek az iparnak és kereskedelemnek hasznos segítséget nyújtottak, és kezelésüket meggyorsította, hogy elektromos hajtóművet kaptak, amely megkímélte a gép kezelőjét a működtetőkar forgatásától. Az elektromosság mind nagyobb területen való alkalmazása, az atomfizikai kutatás elektronikus számlálóberendezéseinek a megszületése, a hadiiparnak mind nagyobb igénye sürgette és lehetővé is tette a számítógépek gyors és nagymérvű tökéletesítését. Az elektromechanikus lyukasztó- és számítógépek fejlődésében lényeges előrelépése volt a német Hollerith Társaságnak az a találmánya, amely 1931-ben egy dugaszolótábla segítségével rövid számítóalgoritmusok vezérlését valósította meg. A mechanikus számítógépek végső tökéletesítését a telefonközpontokban használt jelfogók alkalmazása hozta meg. Az erre irányuló első kísérletezők között volt Kozma László (1902-) Kossuth-díjas magyar villamosmérnök. 1938-1939-ben igen gyorsan működő jelfogós gépe mind a négy alapművelet elvégzésére alkalmas volt.

Az első nagy sikerű, jelfogókkal működő, mechanikus rendszerű számítógépet Konrad Zuse (1910-) berlini mérnök alkotta meg. A csupán mechanikus Z1, majd a már jelfogókkal is ellátott Z2 nevű gépe után 1941-ben megépítette a Z3-at, a világ első jól működő, programvezérlésű, 2-es számrendszerrel dolgozó, elektromechanikus számológépét. A 2-es számrendszer használatát a számítógépeknél már Leibniz ajánlotta.

Amíg Zuse Berlinben, addig Louis Couffignal (1902—) Párizsban és Howard Hathavay Aiken (1900-) New Yorkban készített mind tökéletesebb elektromechanikus gépet. Aiken a megalkotója a MARK-I-nek, majd a MARK-II-nek, amelyek központi vezérlésű elektromechanikus analitikus számítógépek.

Az elektromechanikus gépek még legtökéletesebb formájukban is nagyon nehézkesen programozható készülékek voltak. Nem tudták a programot automatikusan megváltoztatni a közbenső eredmények hatására. Sebességüket sem lehetett a fokozódó igényeknek

megfelelően növelni. Ennek határt szabtak a jelfogók. A MARK-II-nek két szám összeadásához 0,3-0,5, szorzásához 5-6, osztásához 15 másodperc kellett.

Norbert Wiener amerikai matematikus 1940-ben a korszerű számítógépek számára a következő kívánalmakat szabta meg:

1. A számítógép aritmetikai egysége numerikus legyen.

2. A mechanikus és elektromos kapcsolókat fel kell hogy váltsák az elektroncsövek.

3. Az összeadás és szorzás elvégzésére a 2-es számrendszert kell alkalmazni.

4. A műveletsort a gép emberi beavatkozás nélkül, automatikusan végezze, és a közbenső logikai döntéseket is be kell táplálni a gépbe.

5. Legyen lehetőség az adatok tárolására, könnyű előhívására és törlésére.

Ezeknek az elveknek a megvalósítását nagyon sürgette a második világháború alatt rohamosan fejlődő hadiipar. A nagy hatósugarú lövedékek lőelemtáblázatait az elektromechanikus számológépek igen nagy kiszolgáló személyzettel is csak hónapok alatt tudták előállítani. A lövedékek gyors röppályaszámítása végett épült meg 1943 és 1946 között az első elektronikus számítógép Philadelphiában a Pennsylvania Egyetemen. E gép neve ENIAC, az Electronic Numerical Integrator and Calculator rövidítése. A gép alkotói: J. P. Eckert, J. W. Mauchly és Herman H. Goldstine. Az ENIAC-ot 18 000 elektroncső működtette, 100-150 kWó energiát fogyasztott, elhelyezéséhez 30 m-nél hosszabb teremre volt szükség, 30 t-t nyomott, 10-es számrendszerrel működött, a relés gépeknél mintegy ezerszer gyorsabban. 10 tizedes pontossággal az összeadást és a kivonást 0,0002, a szorzást 0,0023 másodperc alatt végezte el. Memóriatárolójában csak 20 darab, egyenként 10 jegyű szám fért el, tehát programtárolásra nem volt alkalmas. Programozását egy huzalos dugaszolótábla tette lehetővé. Rengeteg elektroncsövének meghibásodásai az üzembiztosságot nagyon lecsökkentették. A gép

1956-ig működött, akkor lebontották.

A vázolt jelfogós és elektroncsöves számítógépeket első generációs gépeknek szokás nevezni. Korszakuk mintegy 1960-ig tartott. 5000-10 000 műveletet végezhettek másodpercenként, és igen sok elektromos energiát fogyasztottak.

Ezekhez a gépekhez tartozik még a hidrogénbomba gyártásával kapcsolatos számítások elvégzésére tervezett EDVAC (Electronic Variable Automatic Computer= Elektronikus Változtatható Automatikájú Komputer), amelynek egyik változatát tervezőjének, Neumann Jánosnak a tiszteletére „Johnnyac”-nak is hívták. Neumann az 1940-es években kezdett foglalkozni a számítógépekkel, GOLDSTINE-nel karöltve. Egy bizalmas jelentésben foglalták össze kutatási eredményeiket 1948-ban. Ez tartalmazta az első, belső programvezérlésű elektronikus digitális univerzális számítógép tervét. Állást foglaltak a már Leibniz által ajánlott bináris számrendszer mellett, és megoldották a programtárolás módját úgy, hogy lehetővé vált nemcsak az adatoknak és a részeredményeknek, hanem a végrehajtási utasításoknak a tárolása is. Az ezen elvek alapján készült „Johnnyac” 1949-ben kezdte meg működését.

1946-ban Neumann volt munkatársának, M. V. Wilkes professzornak a tervei alapján az angolok elkészítették Cambridge-ben Európa első elektronikus számítógépét, az EDSAC-ot (Elektronic Storage Automatic Calculator= Elektronikus Tárolójú Automatikus Kalkulátor).

A Szovjetunió első elektronikus digitális számológépe 1951-bcn készült el. Ez a MESZM (Malaja Elektronnaja Szcsotnaja Masina = Kis elektronikus számológép) másodpercenként 50 elemi műveletet végzett. A gépet Szergej Alekszejevics Lebegyev (1902-1974) tervezte. Második gépe az 1953-ban elkészült BESZM (Büsztrogyejtszvujuscsaja Elektronnaja Szcsotnaja Masina= Gyors működésű elektronikus számológép) már 7000-8000 műveletet végzett másodpercenként. Ezt követőleg láttak napvilágot a Szovjetunióban a Sztrela, az Ural-I, az M-II és M-III gépek.

Az 1948-ban feltalált tranzisztort és a mágnesgyűrűs tárat az 1960-as évek első felében kezdték alkalmazni. A számítógépek második

generációja már tranzisztorokat használ kapcsolóelemként a gyakran meghibásodó elektroncsövek helyett. Ezzel megindulhatott a számítógépek miniatürizálása is. Ezek a gépek már 50 000100 000 műveletet végeznek másodpercenként.

A harmadik generációs számítógépek jellemzője az 1965-ben feltalált integrált áramkörök alkalmazása, amelyek 1 millió/s műveleti sebességre képesek.

A negyedik generációs elnevezéssel azokat a gépeket jelölik, amelyekben az integráltság még magasabb fokú, amelyekben egy teljes működési egység egyetlen szilárd testben valósul meg.

A mikroelektronika fejlődésével a számítógép további fejlődése is várható, akár számolási, logikai képességeik növelésére, akár speciális területre való alkalmazásuk tekintetében. Az 1950-es években megszületett hatalmas számítógépipar ma már ontja a kisméretű, üzembiztos és olcsó számítógépek ezreit. Az 1960-as években megnőtt igények kielégítésére számítógépes hálózatokat szerveztek, amelyek lehetővé teszik, hogy például egy magyarországi gyár műholdas közvetítéssel számítógépével bekapcsolódhassék egy amerikai hálózatba ahonnan a kívánt adatot szinte pillanatokon belül megszerezheti. Éppen a számítógépes hálózatok kiépítése az utóbbi időben nagyon megnövelte a „miniszámítógépek" jelentőségét.

A fejlődés gyors ütemének jellemzésére hasonlítsuk össze az EN1AC fentebb közölt adataival az 1983-as, Commodore nevű kisgép néhány adatát. A Commodore eredetileg játékgépnek készült, de rengeteg más készülékhez való csatlakozási lehetőségei miatt számos ipari és más területen is használható. Az ára 196 USA-dollár, mérete 400 x 210 x 70 mm, súlya 1,8 kg, memóriamérete 64 kbyte, és igen megbízhatóan működik.

Hazánkban az első számítógépet a szovjet M-3 dokumentációja alapján gyártották 1955-1959-ben. Ezt 1968-ban kiselejtezték. Ugyanakkor készítette el az Elektromos Mérőműszerek Gyára az EMG 830 nevű második generációs gép tervét, amely 24 bit szóhosszúságú (24-szer 8 bináris számjegyű) számokkal, másodpercenként 25 000 műveletre képes. A szocialista országok összefogtak egy közös típus kialakítására. Ez az összefogás az

amerikai IBM-360/370-es számítógépcsalád továbbfejlesztésével hozta létre az ESZR-család egymás utáni tagjait: az R10, R15, R45, R55, R60 és R65 jelölésű gépeket. Ebből hazánk a család legkisebb tagját, az R10-et gyártotta. Nagyfokú gyártástechnikai elmaradottságunk felszámolására a Minisztertanács 1982-ben alapította meg a Mikroelektrotechnikai Vállalatot.

Annak a megértésére, hogy nem hazánk matematikusainak kell szégyenkezniük az említett elmaradottság miatt, ismernünk kell a számítástechnika mai fejlődési irányait. Kezdetben a számítástechnika területe szinte teljes egészében a gép tervezését jelentette, azt a törekvést, hogy növekedjék a gép működési sebessége, megbízhatósága, és ugyanakkor csökkenjen a mérete és az ára. Az elvi tervezés és a megvalósító mérnöki munka eredményes volt. Valóban csodálatos gépek születtek, olyan gyors működésűek és olyan sokoldalúak, hogy a legtöbb gyakorlati területen ilyen nagy teljesítményekre még szinte nincs is szükség. A gépek fejlesztése azonban nem állt meg. A fejlesztésnek ezt az elsősorban mérnöki, technikai részét nevezik angol eredetű szóval „hardver"-nek (hardware). Emellett azonban mindinkább előtérbe nyomult a „szoftver" (software) rész, amely a gép működtetésére irányuló szellemi tevékenységet jelenti, tehát a gépet vezérlő, irányító programok és a gép alkalmazási lehetőségeit biztosító programok kialakítása a feladata. Ez utóbbi területen már nincs szégyenkeznivalónk. Különösen nincs akkor, amikor arra gondolunk, hogy ma már időszerűvé vált a gépes számítástechnika neumanni értelmezése. Eszerint a gépet, a gépi programokat és a gépkezelő embert együttesen kell tekintetbe venni. Amit a gép tud jobban, azt a gépre kell bízni, amit pedig az ember, azt végezze az ember. Ekkor pedig igen nagy jelentőséget nyer a hardver és a szoftver mellett a szervezés, az „orgver" is. A gépi elemeknek, a csatlakozó és kiegészítő berendezéseknek, a felhasználási módnak a jó megszervezése, a gépnek és az embernek egymáshoz közelebb hozása alkalmas közös nyelv megteremtésével, a jó logikai programok készítése a gépi számítástechnikában szintén ugrásszerű fejlődéshez vezetett, éppen napjainkban. Lassan már idejét is múlta, hogy alkatrészeik szerint soroljuk különböző generációkba a számítógépeket. Előtérbe került az orgver, a szervezés. Ezen a területen pedig nyugodtan állíthatjuk, hogy a világ élvonalához tartozunk. Nálunk dolgozták ki például a PROLOG nevű gépi nyelv

tökéletesebb változatának, az EM-PROLOG-nak a laboratóriumi keretekből már kilépő, széles körű alkalmazhatóságának gyakorlati feltételeit. Ezzel és kiváló logikai programok készítésével már a világpiacon is sikereket értünk el.

1978 végén Japán Nemzetközi Kereskedelem és Iparügyi Minisztériuma megbízta a japán Elektrotechnikai Laboratóriumot, hogy 1990-re tervezzen meg és építsen fel egy számítógépet „Ötödik generációs komputer" elnevezéssel. A terv 1982 áprilisára elkészült. Az „ötödik generációs" jelzőt megérdemli egyrészt azzal az újítással, hogy gépi kódja biner számok helyett logikai formulákból áll, másrészt pedig azzal a változtatással, hogy az eddigieknél hűebben képes utánozni az emberi agy működését. Ez utóbbit többek között úgy éri el, hogy benne a folyamatok nem egymás után, sorban, hanem egyszerre, párhuzamosan mennek végbe. A gép létrehozásában a fő szerepet a logikai programozás és a már említett PROLOG gépnyelv játssza. A japánok ötödik generációs számítógépe, ha sikerül, akkor bizonyos mértékig már a mesterséges intelligenciát valósítja meg.

A PROLOG a logikai programozás fogalmának a gyakorlati megvalósítása. Feltalálója Alain Colmerauer, a marseille-i egyetem tanára. Azóta igen különböző alkalmazási területeken (természetes nyelvek, fordítás, algebrai szimbólumokkal való műveletek stb.) használják, főként Európában. A természetes nyelvi folyamatok vonatkozásában, ami az ötödik generációs számítógépnél igen fontos, különösen széles alkalmazási skálát fejlesztettek ki hazánkban.

A hardver tehát, a gép a maga fizikai valóságában, gyakorlatilag késznek mondható. Ez azonban a szoftver nélkül nem intelligens, meglepően „buta". A programok készítése tehát kulcskérdés. Azt, hogy ez nem akadálytalan, mutatja a „szoftver válsága" kifejezés. Erre a problémára mutat rá Andréka Hajnal és Németi István cikke a *Magyar Tudomány* 1983-as 2. számában. Ennek a fejezetnek a végén érdemes ebből az írásból néhány mondatot idézni. Miután a cikk megállapítja, hogy a programok gyártástechnológiája még nem fejlődött ki. ennek okait keresve, a következőket mondja:

„Általában az összes hagyományos típusú termékre igaz, hogy

gyártástechnológiájuk mögött meghúzódik egy meglehetősen gazdag és komplex szubkultúra a műszaki-természettudományos kultúrán belül, mely különböző absztrakciós szintű és beállítottságú elméletek és fogalmi rendszerek szövevényeként áll elő. ... A programok gyártástechnológiája mögül egyszerűen hiányzik ez a kulturális háttér. ... Ma a számítástechnika telítve van olyan programrendszerekkel, melyek komplexitása elképzelhetetlenül nagy azokhoz a mesterséges rendszerekhez viszonyítva, amelyeket civilizációnk a számítástechnika előtt valaha is létrehozott. ... új, önálló és legégetőbb problémaként megjelent a komplex rendszerek problematikája mint teljesen önálló problémakör. Szükség lenne a *komplex rendszerek elméletére* mint önálló, de egzakt matematikai elméletre, mely minden egyébtől függetlenül a komplex rendszerek létrehozásának, kezelésének, megismerésének módszertanát tűzné ki célul."

A továbbiakban a cikk kifejti, hogy a programozáselméletnek az univerzális algebrára van szüksége, mert egyrészt a programgyártással kapcsolatos struktúrákról nem tudhatjuk előre, hogy a rögzített axiómarendszerek közül ki fogják-e valamelyiket elégíteni, másrészt a számítástudományban az absztrahálás folyamata a fontos. Aztán így folytatódik: „A számítástudomány talán legkiemelkedőbb kutatója, J. Goguen azt írja, hogy az absztrakció matematikai elmélete és módszertana az, amire a legnagyobb szükségünk lenne, az absztrahálási folyamat egzakt törvényeit kellene kutatni, mert az új, megváltozott helyzetben olyan mértékű és mennyiségű absztrakciót kell végezni gyakorlati szakembereknek (tehát nemcsak elméleti kutatóknak), amire korábban nem volt példa. ... az absztrakció már a rutinszerű programozásban is kötelező eszközzé vált." A cikkírók a befejező mondatokban leszögezik, hogy a komplex rendszerek kultúrájának alapjait képező új, ún. „minőségi" matematika számára a legígéretesebb területek: az univerzális algebra, a kategóriaelmélet, az algebrai logika és a modellelmélet.

Az olvasottak alapján úgy tűnik, hogy a „leggyakorlatibb" számítástechnika sem boldogulhat az absztrakció legmagasabb fokát megkívánó elméleti alapok nélkül.

Valóban, habár a számítógép látszólag mérnöki alkotás, de mérnöki,

technikai problémái mögött meghúzódik egy kimondottan matematikai jellegű kutatási terület, amelyet *elméleti számítógép-tudománynak* nevezünk. Ez kutatja és tanulmányozza azokat a fogalmakat és rendező elveket, amelyek a számítógép-technika hátterében rejtőznek. így például a programkészítés technikájához keresi magának a programnak a definícióját és a programozási feladat fogalmát, amelyekből új tételek következtethetők.

A programozási feladat, amint ezt Turing meglátta, egy függvény. Ha például egy program nem igényli, csak a természetes számok halmazát, ha abból nem lép ki, akkor a programozási feladat egy olyan f függvény, amely a természetes számok halmazából a természetes számok halmazába hat. Minden n természetes számhoz hozzárendeli az $f(n)$ természetes számot.

A programnak mint matematikai fogalomnak a meghatározása már sokkal nehezebb és ellentmondásosabb feladat. Szintén TURING volt, aki az 1930-as években elsőként adta meg a program és a programozható számítógép matematikai modelljét, a róla elnevezett ún. Turing-gép fogalmát. Erre vonatkozik ALONZO CHURCH (1903-) amerikai matematikus 1936-ban felállított tézise, amely szerint minden programhoz található egy azzal ekvivalens Turing-gép, és fordítva, azaz a Turing-gép tökéletes modellje a programfogalomnak. Érdemes észrevennünk, hogy ez az állítás már kilép a matematika világából, és összekapcsolja a matematikát egy matematikán kívüli valósággal.

A következő kérdés az volt, hogy van-e olyan programozási feladat, amely nem oldható meg, amelyhez nem található Turing-gép? A válasz igen volt. Ennek legegyszerűbb bizonyítását KALMÁR LÁSZLÓ adta meg 1943-ban. Kézenfekvő a következő kérdés:
Mely feladatok, függvények programozhatok? 1937-ben TURING bebizonyította, hogy kizárólag a rekurzív függvények programozhatók, és azok mindig. Arra, hogy ezen vizsgálatoknak milyen nagy gyakorlati, sőt kimondottan gazdasági jelentőségük van, rámutat a következő történet: Az elmúlt években a világ legnagyobb számítógépes vállalata, az IBM (International Business Machiness) óriási összegeket költött egy program tökéletesítésére, mert nem ismerte az elméleti számítástudománynak azt a tételét,

amely szerint a kívánt, tökéletesített programhoz Turing-gép nem készíthető, azaz bizonyítottan megoldhatatlan feladatot akart megoldani. A Turing-géphez hasonló matematikai modellt mások is találtak (Kalmárgép), de ezekről mindig kiderült, hogy a Turing-géppel ekvivalensek.

Kezdetben az elméleti számítógép-tudomány és az általános rendszerelmélet a kibernetika tárgyköréhez tartozott. Ma már a számítógép-tudomány önálló kutatási terület. Napjainkban a japán ötödik generációs kalkulátor bejelentése az érdeklődés előterébe hozta a számítástudomány mesterséges intelligencia nevű fejezetét. A mesterséges intelligencia elméletének szintén TURING az előfutára. Ő fogalmazta meg a híres Turing-tesztet, amely meghatározza, hogy egy program mikor intelligens. Akkor, ha a programmal kommunikáló kísérleti személyek nem tudják eldönteni, hogy emberrel vagy programmal állnak-e szemben.

A matematikai logika és a számítógép-tudomány mindjobban összefonódó területek. Az 1950-es években sokan úgy gondolták, hogy GÖDEL nemteljességi tétele a mesterséges intelligencia lehetetlenségét is bizonyítja. Az érvelés lényege a következő: Egy mesterséges intelligencia mindig egy program, tehát egy Turing-gép. Az ebben tárolt axiómarendszer nyelvén megfogalmazható olyan kérdés, amelyre az axiómarendszerből nem vezethető le igen-nem jellegű válasz. Tehát e mesterséges intelligencia számára érthető nyelven megfogalmazható olyan kérdés, amelyre nem tud sem igennel, sem nemmel válaszolni. Ennek az érvelésnek egyik bírálata kétségbe vonja, hogy a Turing-gép alkalmas modellje a mesterséges intelligenciacélokra programozott komplex számítógép-rendszernek. Nem alkalmas például robot modellezésére, hiszen a robot nem egyszerűen input-output viselkedésű, mint a Turing-gép, hanem környezetével kölcsönhatásba lép, tapasztalataiból tanul, tehát környezetével együtt változik, fejlődik. Ez a kétely a Church-tézis érvényességét bizonyos, eddig még pontosan nem határolt korlátok közé szorítja.

A Gödel-tételre alapozott érvelés másik kritikája arra hívja fel a figyelmet, hogy az nem az emberi értelem gépi utánzásának a lehetetlenségét bizonyítja, hiszen az, hogy bizonyos kérdésekre nem tud felelni, az emberi gondolkodásnak is jellemzője. Az érvelés

tehát csak azt állítja, hogy az emberi értelmet felülmúló, mindent tudó gép nem alkotható.

A számítástudomány ma két nagy ágra szakadt: a szintaktikai (alaktani, formai) és a szemantikai (jelentéstani, tartalmi) ágra. A szintaktika a programozási nyelvek esetében azt mondja meg, hogy milyen jelsorozatok tekinthetők programnak, a szemantika pedig azt, hogy egy programot jelentő jelsorozat mit jelent, hatására mit csinál a gép. A logikában (765. oldal) a szintaktikai kérdések a jelsorozatokra, formulákra és azok átírási szabályaira vonatkoznak (bizonyításelmélet), a szemantikai kérdések pedig a formulák jelentésére a különböző struktúrákban (modellelmélet, 765. oldal). Nem véletlen tehát, hogy a modellelmélet megalkotójának, TARSKI-nak két tanítványa tudott először kielégítő választ adni a nehéz szemantikai kérdésekre: RICHARD MONTAGUE a természetes nyelvekkel és gépi megértésükkel kapcsolatban, DANA SCOTT pedig a programozási nyelvekre vonatkozóan alapozta meg a matematikai szemantikát.

Arra, hogy a szemantikai problémák mennyivel nehezebbek, mint a szintaktikai kérdések, jó példa az 1960-ban megjelent ALGOL 60 nevű programozási nyelv szintaktikai ismertetése. A könyv azt ígéri, hogy az ALGOL 60 szemantikája néhány hónap késéssel fog megjelenni. Azóta sem jelent meg, pedig a számítástechnika legjobbjaiból álló nemzetközi gárda dolgozik rajta. Így tűnt ki igen élesen, hogy nagy szükség van a szemantika hiányzó matematikai elméletére. Az elmélet kidolgozásának a nehézségét mutatja az is, hogy ehhez segítségül kell hívni a matematika és speciálisan az algebra legelvontabb és a mainál fejlettebb fejezeteit; a kategóriaelméletet, az algebrai logikát, a modellelméletet és az univerzális algebrát. KALMÁR LÁSZLÓ kitűnő előrelátását bizonyítja, hogy már 1957-ben sürgette az univerzális algebra továbbfejlesztését.

A szemantika matematikai elméletének megszületését JOHN MCCARTHY *Towards a mathematical Science of computation* (A számítástudomány egy matematikai elmélete felé) című írásától számítjuk.

Az 1970-es években jelentek meg a programozási folyamat törvényszerűségeit kutató programozáslogikák. E téma egyik

fellendítője V. R. PRATT amerikai elektromérnök, aki a Tarski-féle cilindrikus algebrákra és a relációalgebrákra alapozva definiálta a dinamikus algebrákat. A programozáslogikákkal kapcsolatban megemlítjük, hogy az első működő magyar programhelyesség-bizonyító programot 1974-ben készítette el a NIM IGÜSZI programozáslogikai csoportja, amely KALMÁR LÁSZLÓ szellemi támogatását élvezte. Ugyanitt született meg az a programozási rendszer is, amelyet ma magyar PROLOG néven ismernek. Az utóbbi mondatok jelzik, hogy hazánkban is sok kitűnő tudós foglalkozik számítástudománnyal. Közülük megemlítem CSIBI SÁNDOR (1927-), KÁTAI IMRE (1938-) és VÁMOS TIBOR (1926-) akadémikusokat.

UTÓSZÓ

A könyv bevezetésében körvonalazott, szerény célkitűzésű munkám befejezéseként szeretnék néhány, szerintem megszívlelendő gondolatot idézni a XX. század talán legnagyobb matematikusától, a Budapesti Evangélikus Gimnáziumból elinduló, a budapesti tudományegyetemen doktoráló Neumann JÁNOStól. Ezeket az idézeteket a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadónál megjelent, *Válogatott előadások és tanulmányok* című kis kötetéből válogattam.

Az egyik a matematika hasznosságáról szól, hasznosságon értve azt, hogy valamely matematikai eredmény, közvetlenül vagy közvetve, nem matematikai területen is alkalmazható. Hogy a matematika igen tekintélyes része ilyen, az köztudott. Ehhez azonban Neumann hozzáfűzi a következőket:

„Meg kell mondanom, hogy vannak ellenkező példák is. De mégis a matematika nagy területei, amelyek hasznossá váltak, a hasznosítás minden vágya nélkül fejlődtek ki, és olyan helyzetben, amikor senki sem tudhatta, hogy melyik területen válnak majd hasznossá; és általában semmi sem mutatott arra, hogy ez valaha is bekövetkezik... Ez minden tudományra igaz. A sikereket gyakran annak köszönhették, hogy teljesen megfeledkeztek arról, amit végső soron akartak, vagy hogy egyáltalán akartak-e végső soron valamit; hogy visszautasították a profitáló dolgok kutatását és kizárólag az intellektuális elegancia kritériumának vezetésére hagyatkoztak; e szabály követése eredményezte, hogy a valóságban, hosszú távlatban ténylegesen előrejutottunk, jobban, mint ahogyan bármiféle utilitárius folyamat lehetővé tette volna."

A másik idézet a matematikusoknak mond lényegeset a matematikáról:

„Úgy hiszem, viszonylag helyes megközelítése az igazságnak - amely túl bonyolult, hogysem mást, mint megközelítést megengedjen -, hogy a matematikai eszmék a tapasztalatból származnak, habár származástörténetük néha hosszú és homályos.

De ha egyszer így létrejöttek, a tárgy saját külön életét kezdi élni, és hasonlatosabb a majdnem teljesen esztétikai motívumok által vezérelt alkotó tevékenységhez, mint bármi máshoz, különösen mint a tapasztalati tudományhoz. Van azonban még egy további pont, amely nézetem szerint hangsúlyozandó. Ha egy matematikai diszciplína messzire távolodik tapasztalati forrásától, vagy még inkább, ha már a második vagy harmadik nemzedéket csak közvetve érik el a »valóságból« származó eszmék, ez súlyos veszélyt rejt magában. Egyre inkább tiszta esztétizálássá válik, egyre tisztább l'*art pour l'art-rá.* Ez nem feltétlenül rossz, ha a területet csatlakozó tárgyak veszik körül, amelyek még szorosan kapcsolódnak a tapasztalathoz, vagy ha a tudományág kivételesen fejlett ízlésű emberek befolyása alatt áll. De súlyos a veszély, hogy a tárgy a kisebb ellenállás irányába fejlődik, hogy a forrásától eltávolodott folyó jelentéktelen ágak sokaságává különül el, és a diszciplína részletek és bonyodalmak szervezetlen tömegévé válik. Más szóval, tapasztalati forrásától nagy távolságban vagy sok »absztrakt« behatás után a matematikai tárgyat a degenerálódás fenyegeti. Mindenesetre, bármikor is következik be ez az állapot, számomra az egyetlen megoldásnak látszik a megfiatalító visszatérés a forráshoz: többé-kevésbé közvetlen tapasztalati eszmék újraátgondolásához. Meggyőződésem, hogy ez a szükséges feltétel őrizte meg a tárgy frissességét és életerejét, s hogy ez ugyanígy igaz marad a jövőben is.”

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

Tudománytörténeti és matematikai művek:

1. ALEKSZANDROVA, H. V.: *Matematicseszkije terminü.* Moszkva, 1978.

2. ANDRÉKA HAJNAL-NÉMETI ISTVÁN : „Minőségi" matematika. *Magyar Tudomány,* Bp., 1983. 2. sz.

3. ARKHIMÉDÉSZ : *A spirálisról.* (Angol nyelvű.) New York-Dover, 1912.

4. BALL-ROUSSE : *A short account of the history of mathematics.* Dover, 1960.

5. BELL, E. T.: *Development of mathematics.* New York, 1945.

6. BELL, J. L.-SLOMSON, A. B.: *Models and ultraproducts.* London, 1969.

7. BENEDEK ISTVÁN: *A tudás útja.* Gondolat, Bp., 1972.

8. Berezkina, E. I.: *Matematika drevnyeva kitaja.* Nauka, Moszkva, 1980.

9. BERNAL, J. D.: *Tudomány és történelem.* Gondolat, Bp., 1963.

10. BOLGARSZKIJ, B. V.: *Ocserki po isztorii matematiki.* Minszk, 1979.

11. BOLYAI JÁNOS: *Appendix.* Akadémiai, Bp.. 1952.

12. BONOLA, ROBERTO: *Non-euclidean geometry.* New York-Dover, 1955.

13. BOROGYIN-BUGAJ : *Biograficseszkij szlovarj gyejatyeleji v ob-lasztyi matematiki.* Kijev, 1979.

14. BOYER, CARL B.: *History of analytic geometry.* New York, 1956.

15. BOYER, CARL B.: *The history of the calculus and its conceptual development.* New York-Dover, 1949.

16. BOYER, CARL B.: *A history of mathematics.* New York, 1968.

17. CAJORY, F.: *A history of matematical notations.* London, 1928— 1929.

18. CANTOR, MORITZ : *Vortesungen über Geschichte dér Mathema-tik.* Teubner, Leipzig, 1892-1908.

19. COOLIDGE, J. L.: *A history of geometrical methods.* Oxford, 1940.

20. COURANT, R.-ROBBINS, H.: *Mi a matematika?* Gondolat, Bp., 1966.

21. CSOBANOV-GYESZIMIROV : *Matematiki i fiziki* v *drevnosztta.* Szófia, 1973.

22. DAVIS-HERSH : *A matematika élménye.* Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1984.

23. *Dictionary of scientific biography I-XV.* (Ed. Ch. C. Gillispie.) New York, 1970-1976.

24. DIOFANT: *Arifmetika i knyiga o mnogougoljnüh csiszlah.* Nau-ka, Moszkva, 1974.

25. DOEHLEMANN, KARL : *Projektive Geometrie.* Leipzig, 1905.

26. DÖRRIE, HEINRJCH : *A diadalmas matematika.* Gondolat, Bp.,

1963.

27. ÉRDÉLYI-KJEDVESSY : *Számítástechnikai ismeretek.* (Főiskolai jegyzet). Külkereskedelmi Főiskola, Bp., 1982.

28. ERDŐS-SURÁNYI : *Válogatott fejezetek a számelméletből.* Tankönyvkiadó, Bp., 1960.

29. EUKLEIDÉSZ : *Elemek.* Gondolat, Bp., 1983.

30. FALUS RÓBERT: *Görög harmónia.* Gondolat, Bp., 1980.

31. FARAGÓ LÁSZLÓ: *A számelmélet elemei.* Tankönyvkiadó, Bp., 1954.

32. FÉNYES IMRE: *Fizika és világnézet.* Kossuth, Bp., 1966.

33. FRIED ERVIN : *Absztrakt algebra elemi úton.* Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1972.

34. FUCHS LÁSZLÓ : *Algebra.* (Kézirat.) Tankönyvkiadó, Bp.,

1971.

35. IFJ. GAZDA ISTVÁN-MARIK MIKLÓS : *Csillagászattörténeti*

ABC. Tankönyvkiadó, Bp., 1982. •

36. IFJ. GAZDA ISTVÁN-SAIN MÁRTON : *Fizikatörténeti ABC.* Tankönyvkiadó, Bp., 1979.

37. GERICKE, H.: *Mathematik in Antiké und Orient.* Springer, Berlin, 1984.

38. GOLDSTINE, HERMÁN H.: *A history of numerical analysis.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

39. GOODSTEÍN, R. L.: *Development of mathematical logic.* Glasgow, 1971.

40. HAJNAL ANDRÁS: *Halmazelmélet.* (Egyetemi jegyzet.) Bp.,

1972.

41. HEATH, T. L.: *Apollonios of Perga.* New York, 1961.

42. HEATH, T. L.: *History of Greek Mathematics.* New York, 1921.

43. HERMANN, B. DIETER : *Az égbolt felfedezői.* Gondolat, Bp., 1981.

44. HOFMAN, J. E.: *Geschichte dér Mathematik.* Berlin, 1963.

45. HORVÁTH ÁRPÁD: *Korok, gépek, feltalálók.* Gondolat, Bp., 1966.

46. HORVÁTH ÁRPÁD : *Nagy vállalkozások.* Gondolat, Bp., 1976.

47. *Isztoriko matematicseszkije iszledovanyija XXVI.* Moszkva, 1982.

48. JÁNOSSY LAJOS : *A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása.* Tankönyvkiadó, Bp., 1965.

49. JÁNOSSY LAJOS-TASNÁDI PÉTER : *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Bp., 1972.

50. JECH, THOMAS: *Set Theory.* New York-San Francisco-London, 1978.

51. JUSKEVICS, A. P.: *A középkori matematika története.* Gondolat, Bp., 1982.

52. JUSKEVICS, A. P.: *Hresztomatia po isztorii matematiki.* Moszkva, 1977.

53. JUSKEVICS, A. P.: *Po isztorii matematiki.* Moszkva, 1976.

54. KLEIN, FÉLIX: *Vorlesungen über die Entwicklung dér Mathematik im 19. Jahrhundert.* Springer-Verlag, Berlin, 1926-1927.

55. *Kleine Enzyklopadie Mathematik.* Leipzig, VEB B. I., 1979.

56. KLINE, M.: *Mathematicál thought jrom ancient to modern times.* New York, 1972.

57. KOflER, EDWARD : *Fejezetek a matematika történetéből.* Gondolat, Bp., 1965.

58. KOLCSINSZKIJ-KORSZUNY-RODRIGESZ : ***Asztronomii.*** Kijev,

1977.

59. KOLMOGOROV, **A. N.:** ***A valószínűségszámítás alapfogalmai.*** **Gondolat, Bp., 1982.**

60. KOLMOGOROV-JUSKEVICS **:** ***Matematika XIX. véka /-//.*** **Nauka, Moszkva, 1978., 1981.**

61. LAKATOS **Imre:** ***Bizonyítások és cáfolatok.*** **Gondolat, Bp., 1981.**

62. LÁNCZOS KORNÉL : ***A geometriai térfogalom fejlődése.*** **Gondolat, Bp., 1976.**

63. LÉVÁRDI LÁSZLÓ-SAIN MÁRTON **:** ***Matematikatörténeti feladatok.*** **Tankönyvkiadó, Bp., 1982.**

64. ***Lexikon dér Antiké.*** **Leipzig, VEB B. I., 1979.**

65. ***Matematika i asztronómia*** **v** ***trudah ucsenüh szrednyevekovova vosztoka.*** **Taskent, 1977.**

66. ***Matematikai érdekességek.*** **Gondolat, Bp., 1969.**

67. MASON, STEPHAN **F.:** ***A*** *history of Science.* **New York, 1962.**

68. MAUER GYULA **: „Néhány gondolat a matematikai kutatásról.”** ***Korunk.*** **Kolozsvár, 1972. 11. sz.**

69. MENNINGER, KARL **:** ***Zahlwort undZiffer: Eine Kulturgeschichte dér Zahlen.*** **Göttingen, 1957-1958.**

70. MESCHKOWSKI, HERBERT: ***Problemgeschichte dér Mathematik /-///.*** **B. I. Wissenschaftverlag, Zürich, 1978-1979.**

71. MESCHKOWSKI, HERBERT: ***Problemgeschichte dér neuere Mathematik.*** **B. I. Wissenschaftverlag, Zürich, 1978.**

72. NEEDHAM, JOSEPH : ***Science and Civilization in Chine.*** **Cambridge, 1959.**

73. NEUGEBAUER, OTTÓ : *Egzakt tudományok az ókorban.* **Gondolat, Bp., 1984.**

74. NEUGEBAUER, **O.:** ***Die Grundlagen dér agyptischen Bruchrechnung.*** **Springer-Verlag, Berlin, 1926.**

75. NEUGEBAUER-SACHS: ***Mathematical cuneiform Texts.*** **New Haven, 1945.**

76. NEUMANN JÁNOS : ***A számológép és az agy.*** Gondolat, Bp., **1972.**

77. NEUMANN JÁNOS **:** ***Válogatott előadások és tanulmányok.*** **Közgazdasági és Jogi Kiadó, Bp., 1965.**

78. OBÁDOVICS GYULA **:** ***Gyakorlati számítási eljárások.*** **Gondolat, Bp., 1972.**

79. ***O fizikák.*** **Tbiliszi, 1979.**

80. ŐRE OYSTEN **:** ***Bevezetés a számelmélet világába.*****Gondolat, Bp.,**

1977.

81. PAUL-PEIRCE-STIEF **:** ***Motion in the heavens.*** **Toronto-Montreal, 1973.**

82. PEKELÍSZ, VIKTOR **:** ***A kibernetika érdekes kérdései.*** **Gondolat, Bp., 1977.**

83. RADEMACHER-TOEPLITZ **:** ***Számokról és alakzatokról.*** **Tankönyvkiadó, Bp., 1933.**

84. RADÓ FERENC: **„Algebrai és geometriai struktúrák kapcsolata."** ***Korunk*** **1973-as évkönyve, Kolozsvár. .**

85. RÉNYJ ALFRÉD: ***Ars mathematica.*** **Magvető',** Bp., 1973.

86. RÉNYI ALFRÉD **:** ***Napló az információelméletről.*** **Góndolat, Bp., 1976.**

87. Ribnyikov, K. *A.: A matematika története.* Tankönyvkiadó, Bp., 1974.

88. Rosenfeld-Juskevics: *Omar Hajjám.* Nauka, Moszkva, 1965.

89. Rozsanszkij : *Anticsnaja nauka.* Nauka, Moszkva, 1980.

90. Rúzsa Imre: *A matematika néhány filozófiai problémájáról.* Tankönyvkiadó, Bp., 1966.

91. Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC.* Tankönyvkiadó, Bp., 1980.

92. Sarton, George: *Introduction to the History of Science*. Washington, 1927-1948.

93. Sárközi Pál: *A differenciálegyenletek elméletének elemei.* Pannonhalma, 1932.

94. Schmidt Tamás : „Beszámoló a hazai algebrai kutatásokról." *Matematikai Lapok,* 24. évf. 3-4. sz. Bp., 1973.

95. Schmidt Tamás : *Algebra.* (Kézirat.) Tankönyvkiadó, Bp.,

1978.

96. Simonyi Károly : *A fizika kultúrtörténete.* Gondolat, Bp., 1978.

97. Stáckel : *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai.* MTA, Bp., 1914.

98. Struik, Dirk J.: *A matematika rövid története.* Gondolat, Bp., 1958.

99. Szabó Árpád : *Anfange dér griechischen Mathematik.* Akadémiai, Bp., 1969.

100. Szabó Árpád : *A görög matematika kibontakozása.* Magvető, Bp„ 1978.

101. SZÁSZ GÁBOR : *Az axiomatikus módszer.* Tankönyvkiadó, Bp., 1972.

102. SZÁSZ GÁBOR: *Hálóelmélet.* Tankönyvkiadó, Bp., 1978.

103. SZELE TIBOR: *Bevezetés az algebrába.* Tankönyvkiadó, Bp,

1964.

104. SZÉNÁSSY BARNA: *A magyarországi matematika története.* Akadémiai, Bp., 1970.

105. SZÉNÁSSY BARNA : *Bolyai Farkas.* Akadémiai, Bp., 1975.

106. SZÉNÁSSY BARNA: *Kőnig Gyula 1849-1913.* Akadémiai, Bp.,

1965. •

107. SZERÉNYI TIBOR : *A matematika fejlődése.* (Kézirat.) Tankönyvkiadó, Bp., 1978.

108. TARJÁN REZSŐ: *Gondolkozó gépek.* Bibliotheca, Bp., 1958.

109. *The world of mathematics.* Simon and Schuster, New York, 1956.

110. TORO TIBOR : „Nem-euklideszi geometriák a modern fizikában és a relativisztikus kozmológiában.” *Korunk* 1973-as évkönyve, Kolozsvár.

111. TURBULL, H. W.: *The great mathematicians.* New York, 1961.

112. TROSZTNYIKOV, V. N.: *Konstruktív módszerek a matematikában.* Gondolat, Bp., 1981.

113. VEKERDI LÁSZLÓ: *A matematikai absztrakció történetéből.* Kriterion, Bukarest, 1972.

114. VOGEL, KURT: *Vorgriechische Mathematik.* Hannover, 1959.

115. WAERDEN, **B.** L. VAN DÉR: ***Egy tudomány ébredése.*** **Gondolat, Bp., 1977.**

116. WESZELY TIBOR: ***Bolyai János matematikai munkássága.*** **Kriterion, Bukarest, 1981.**

117. WESZELY TIBOR: ***Vályi Gyula élete és munkássága.*** Kriterion, Bukarest, 1983.

118. WEYL, ANDRÉ: ***Number Theory.*** **Birkháuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1984.**

119. WOLTERS, MARTIN **:** ***Kulcs a számítógépekhez.*** **Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1974.**

120. WIELEITNER, **H.:** ***Geschichte dér Mathematik /-//.*** **Leipzig,. 1921-1923.**

121. WUSSING, **H.:** ***Vorlesungen zw Geschichte dér Mathematik.*** **VEB Deutscher Verlag dér Wissenschaften, Berlin, 1979.**

122. WUSSING-ARNOLD **:** ***Biographien bedeutender Mathematiker.*** **Berlin, 1983.**

123. ZEUTHEN, **H. G.:** ***Die Mathematik in Altertum und im Mittelal-ter.*** **Kopenhaga, 1949.**

124. ZEUTHEN, **H. G.:** ***Geschichte dér Mathematik.*** **Teubner, Leip zig, 1903.**

125. ZVORIKIN—OSZMOVA—CSERNISEV—SUHARGYIN **:** ***A technika története.*** **Kossuth, Bp., 1964.**

126. Zohar Manna: ***Programozáselmélet.*** **Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1981.**

Művelődéstörténeti és művészettörténeti művek:

1. ÁGH ATTILA: ***Betemetett nyomok, emlékek rönkje.*** Móra, Bp., **1981.**

2. BAKTAY ERVIN: *India művészete.* Képzőművészeti Alap, Bp., 1981.

3. BALÁZS-FÉNYES-GÉCZY-HORVÁTH: *Mi az idő?* Gondolat, Bp., 1980.

4. BALÁZS DÉNES : *Vándorúton Panamától Mexikóig.* Gondolat,

Bp., 1981. .

5. BARÁT-ÉBER-TAKÁCS : *A művészet története.* Dante, Bp., 1934.

6. BONGARD-LEVIN, G. M.-GRANTOVSZKIJ : *Szkitiától Indiáig.* Gondolat, Bp., 1981.

7. CASTIGLIONE LÁSZLÓ: *Pompeji, Herculanum.* Gondolat, Bp.,

1979.

8. CHADWICK, JOHN: *A lineáris B megfejtése.* Gondolat, Bp.,

1980.

9. GÁBORINÉ CSÁNK VERA : *Az ősember Magyarországon.* Gondolat, Bp., 1980.

10. GOMBRICH, E. H.: *A művészet története.* Gondolat, Bp., 1974.

11. HOMÉROSZ: *Iliász.* Európa Könyvkiadó, Bp., 1959.

12. KÁKOSY LÁSZLÓ: *Ré fiai.* Gondolat, Bp., 1979.

13. KLENGEL, HORST: *Az ókori Szíria története és kultúrája.* Gondolat, Bp., 1977.

14. KUHN, THOMAS : *A tudományos forradalmak szerkezete.* Gondolat, Bp., 1984.

15. KUZMISCSEV, V. A.: *A maja papok titkai.* Kossuth, Bp., 1977.

16. KUZNYECOV, B. G.: *Filozófiatörténet fizikusoknak és*

***matematikusoknak*. Gondolat, Bp., 1983.**

17. KYBALOVA, LUDMILLA: ***Keleti szőnyegek*. Corvina, Bp., 1976.**

18. LYKA KÁROLY **: *A művészetek története*. Singer és Wolfner, Bp., 1931.**

19. *Művészeti lexikon I-IV*. Akadémiai, Bp., 1984.

20. ROMÁN, **V.: *A tudományos technikai forradalmakról*. Kossuth, Bp., 1972.**

21. Rossi, P.: *A filozófusok és a gépek*. Kossuth, Bp., 1975.

22. SWIDERKOWNA, ANNA **: *A hellenizmus kultúrája*. Gondolat, Bp.,** 1981.

23. SZMIRNOVA-RAKITYINA **: *Avicenna*. Kossuth, Bp., 1980.**

24. VÁRKONYI NÁNDOR **: *Szíriát oszlopai*. Magvető, Bp., 1972.**

25. ZAMAROVSKIJ, VOJTECH: ***A görög csoda*.** Móra, **Bp.,** 1980.

NÉVMUTATÓ

Megjegyzés: Az időpontok megállapításánál az 1582-ben életbe lépett Gergely-naptárt vettem alapul. Ekkor 1582. 10. 05. helyett 1582. 10. 15-öt kellett írni. A Gergely-naptárt Magyarország elfogadta 1587-ben, az angol nyelvterület 1752-ben (pl.: 1753. 01. 01-ből 1753. 01. 12. lett), a Szovjetunió pedig 1918-ban, amikor is ott 1918. 02. 01. helyett 1918. 02. 14-et kellett írni. A Gergely-naptárt visszamenőleg nem érvényesítették, tehát az 1582. 10.

05. előtti dátumok változatlanok maradtak.

A borító- és kötésterv Kiss István munkája

A kiadásért felel a Gondolat Könyvkiadó igazgatója

Szedte és nyomta az Alföldi Nyomda A nyomdai rendelés törzsszáma: 86.2399.66-14-1 Készült Debrecenben, az 1986. évben Felelős vezető: Benkő István

Felelős szerkesztő: Gcrncr József Műszaki vezető: Tóbi Attila Műszaki szerkesztő: Radó Péter

Megjelent 74,36 (A/5) ív + 24 oldal melléklet terjedelemben, az MSZ 5601-59 és 5602-55 szabvány szerint